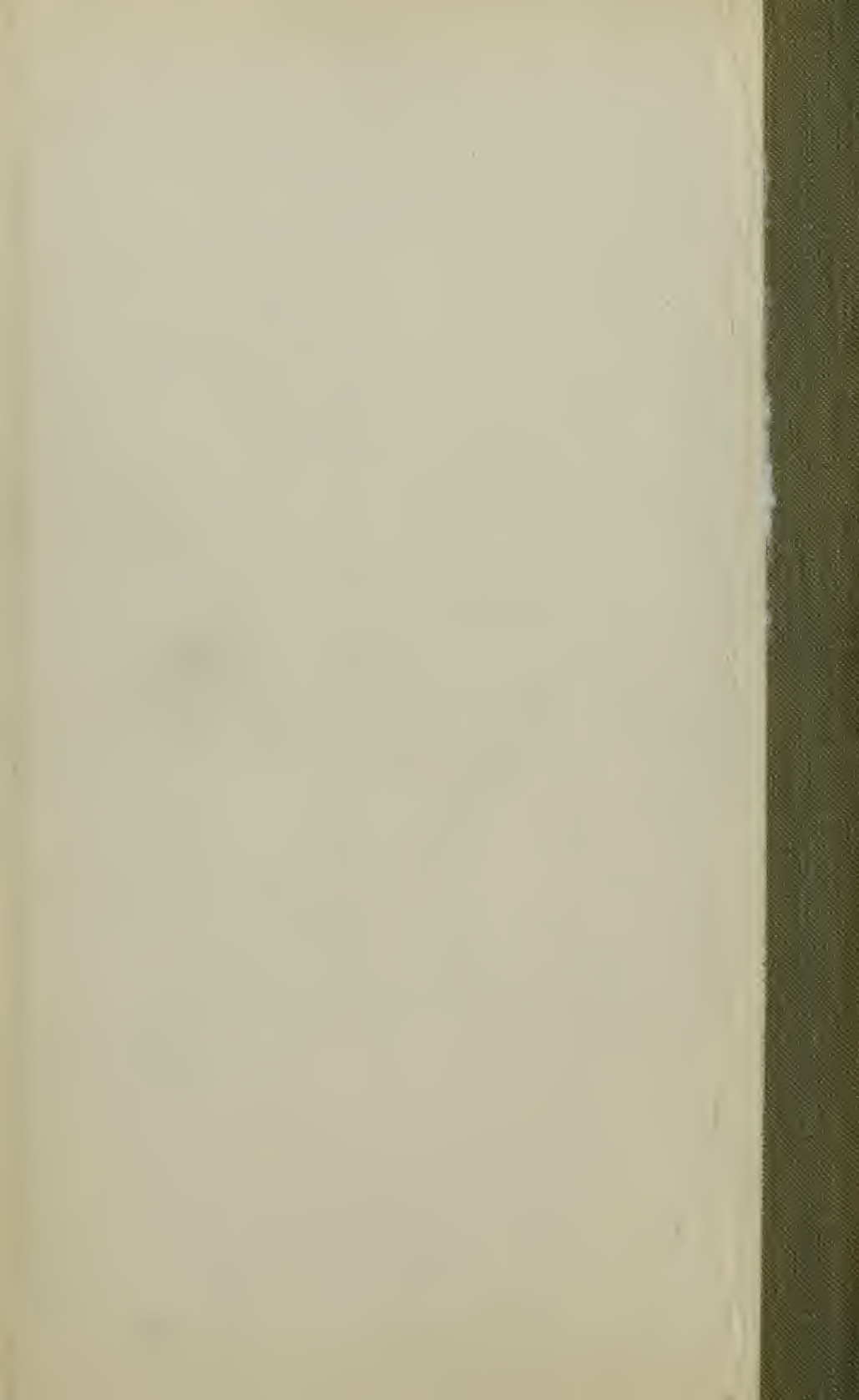
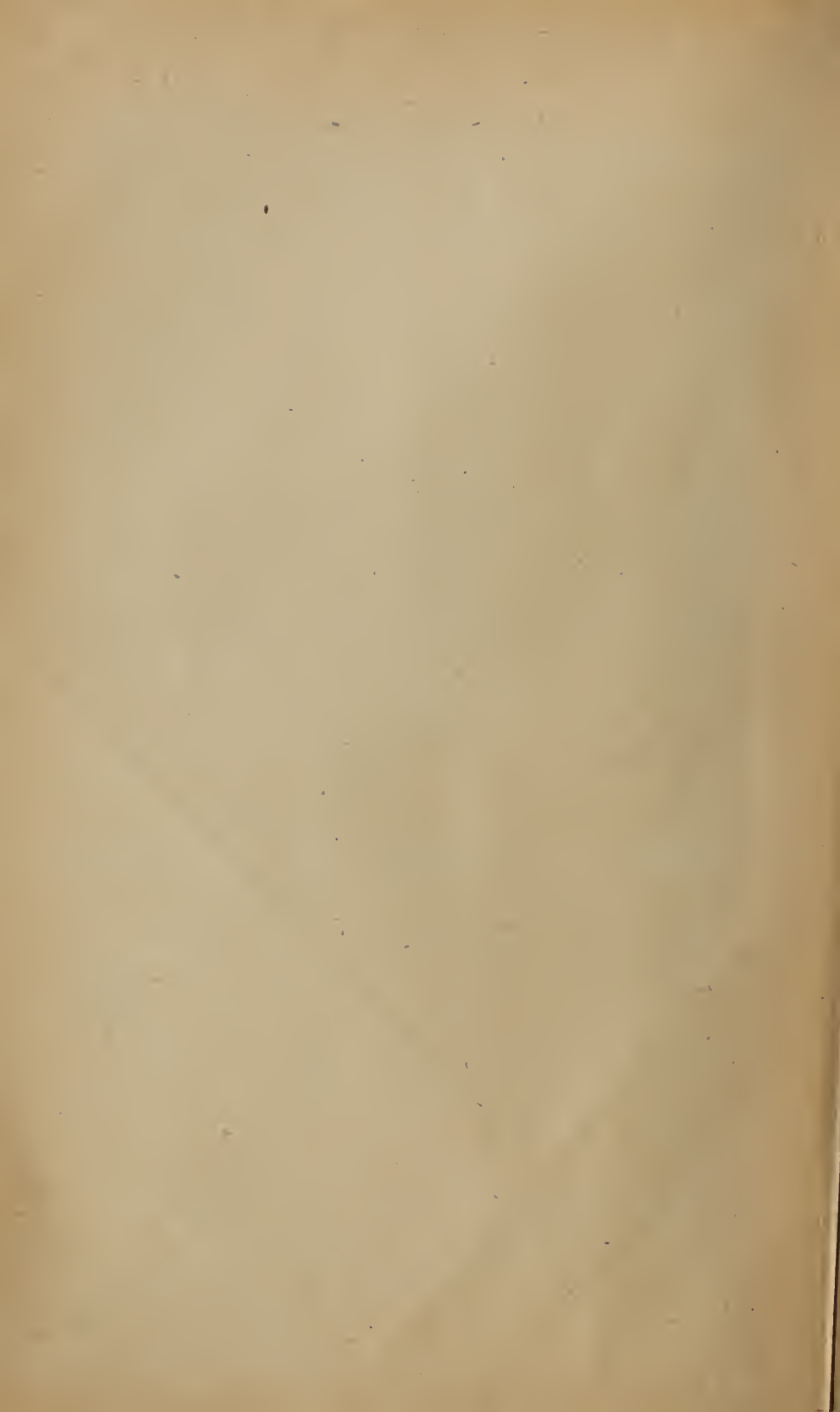




BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.



BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

218253
14.11.27

TOME QUARANTE-HUITIÈME. — ANNÉE 1920:

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

A LA SORBONNE.

—
1920

QA

I

S59

t. 48-59

61340 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie},
Quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

SUR LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE SUIVANT LES INVERSES DE POLYNOMES DONNÉS;

PAR M. P. APPELL.

I. Dans leurs recherches sur les polynômes électrosphériques, MM. Guillet et Aubert ⁽¹⁾ ont rencontré des séries procédant suivant les inverses de polynômes donnés. Je me suis proposé d'étudier, d'une façon générale, ce genre de développements dans diverses Notes aux *Comptes rendus* ⁽²⁾ et dans un article du *Bulletin des Sciences mathématiques* ⁽³⁾. Je voudrais réunir ici les principaux résultats obtenus antérieurement et en ajouter de nouveaux.

II. Considérons une suite donnée de polynômes

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$$

d'un degré marqué par l'indice, dans lesquels le coefficient de la plus haute puissance de x est égal à l'unité. Les racines du polynôme $P_n(x)$ sont supposées, quel que soit n , à l'intérieur d'un cercle fixe de centre O et de rayon déterminé R ; autrement dit, ces racines, réelles ou complexes, ont leurs modules inférieurs à R . On a, dès lors, pour $|x| > R$,

$$\frac{1}{P_n(x)} = \frac{1}{x^n} \left(1 + \frac{P_{1n}}{x} + \frac{P_{2n}}{x^2} + \dots \right),$$

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, t. 155, 1912, p. 130, 204, 708, 820.

⁽²⁾ *Comptes rendus*, t. 157, 1913, p. 5, 1042.

⁽³⁾ *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. XXXVII, nov. 1913.

série convergente. Soit, d'autre part,

$$f(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \dots + \frac{C_v}{x^v} + \dots$$

une fonction développée en série suivant les puissances positives de $\frac{1}{x}$ à l'extérieur du cercle R.

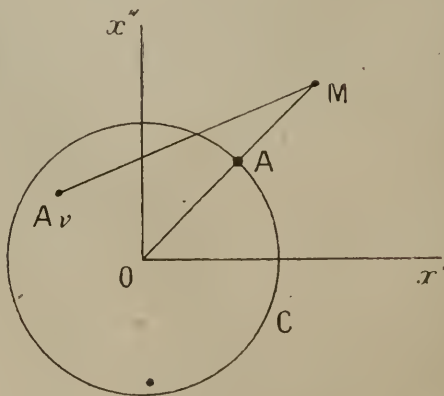
On pourra, par la méthode des coefficients indéterminés, calculer les coefficients a_v du développement

$$(1) \quad f(x) = \frac{a_1}{P_1(x)} + \frac{a_2}{P_2(x)} + \dots + \frac{a_n}{P_n(x)} + \dots$$

en ordonnant les deux membres suivant les puissances de $\frac{1}{x}$.

Ce développement n'est possible que d'une manière.

III. *Convergence.* — Soit M un point d'affixe $x = x' + ix''$ (fig. 1) en dehors du cercle C de rayon R; appelons r le module



$OM > R$. Les racines α_v du polynôme $P_n(x)$ sont représentées par des points A_v dans le cercle C. Le module de $x - \alpha_v$ est A_vM : il est évidemment plus grand que AM , A désignant le point où OM rencontre la circonférence du cercle C; or $AM = r - R$; donc

$$|P_n(x)| = |x - \alpha_1| |x - \alpha_2| \dots |x - \alpha_n| > (r - R)^n.$$

Cela posé, considérons la série auxiliaire

$$\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_n z^n + \dots$$

qui est convergente pour

$$|z| < \rho,$$

ρ étant un certain nombre positif déterminé. Comme on a

$$\left| \frac{1}{P_n(x)} \right| < \frac{1}{(r-R)^n},$$

la série (1) est convergente pour

$$\frac{1}{r-R} < \rho, \quad r > R + \frac{1}{\rho} :$$

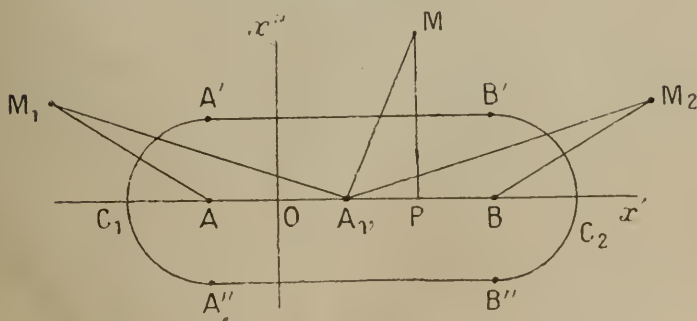
elle est donc convergente à l'extérieur d'un cercle Γ concentrique à C ayant pour rayon $R + \frac{1}{\rho}$.

IV. *Cas particulier.* — Supposons que les polynômes P_n aient toutes leurs racines réelles, comme, par exemple, les polynômes

$$P_n(x) = \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots 2n} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

qui diffèrent par un facteur constant des polynômes X_n de Legendre. Supposons (fig. 2) les racines comprises entre deux

Fig. 2.



nombre réels α et β , $\alpha < \beta$, représentés par les points A et B de l'axe réel Ox' . Soit M un point ayant pour affixe $x' + ix''$. Supposons d'abord $\alpha \leq x' \leq \beta$. Comme la racine α_v de $P_n(x)$ est représentée par un point A_v entre A et B , le module A_vM de $x - \alpha_v$ est évidemment plus grand que la perpendiculaire PM à Ox' :

$$|x - \alpha_v| > |x''|, \quad |P_n(x)| > |x''|^n.$$

La série (1) est alors convergente avec la série $\left| \frac{\alpha_n}{x'^n} \right|$, c'est-à-dire quand

$$|x''| > \frac{1}{\rho}.$$

Supposons ensuite x' extérieur à l'intervalle $\alpha_1\beta$, par exemple $x' < \alpha$, point M_1 . Alors

$$|x - \alpha_v| > AM_1, \quad |P_n(x)| > \overline{AM_1^n};$$

la série est convergente si $AM_1 > \frac{1}{\rho}$. Enfin si $x' > \beta$, point M_2 , la série est convergente si $BM_2 > \frac{1}{\rho}$. En résumé, construisons le contour suivant. D'abord deux segments de droites $A'B'$ et $A''B''$ formés par les points $x'' = \pm \frac{1}{\rho}$, $\alpha \leq x' \leq \beta$; puis deux demi-cercles C_1 et C_2 , de diamètres de base verticaux, décrits de A et B respectivement comme centres avec $\frac{1}{\rho}$ comme rayons. La série (1) sera convergente aux points extérieurs à ce contour. Il peut arriver que $\rho = \infty$, par exemple si

$$\alpha_n = \frac{1}{1, 2, \dots, n};$$

alors le contour se réduit à AB lui-même.

Il est évident qu'un contour analogue peut être tracé si toutes les racines de $P_n(x)$ sont, quel que soit n , sur un segment de droite déterminé AB, par exemple si elles sont toutes purement imaginaires et limitées en module.

V. *Développement de* $\frac{1}{x-y}$. — Pour l'application du théorème de Cauchy, il est utile de connaître le développement de $\frac{1}{x-y}$, avec

$$|x| > |y|.$$

Posons alors

$$\frac{1}{x-y} = \frac{Q_0}{P_1(x)} + \frac{Q_1}{P_2(x)} + \dots + \frac{Q_{n-1}}{P_n(x)} + \dots,$$

les P_n étant donnés, et calculons les coefficients Q_v par la méthode

générale du n° II en écrivant

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{x} + \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x^3} + \dots;$$

on trouve $Q_0 = 1$ et l'on voit que Q_ν est un polynôme de degré ν en y , que nous désignerons par $Q_\nu(y)$, dont le terme de degré le plus élevé est y^ν . On a ainsi le développement

$$(2) \quad \frac{1}{x-y} = \frac{1}{P_1(x)} + \frac{Q_1(y)}{P_2(x)} + \dots + \frac{Q_{n-1}(y)}{P_n(x)} + \dots$$

où figurent de nouveaux polynômes $Q_\nu(y)$ associés à $P_n(x)$. J'ai montré, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* pour 1913, comment on peut calculer les polynômes Q par la méthode des fonctions symétriques. Comme je l'ai indiqué ensuite dans les *Comptes rendus* (décembre 1913), les résultats obtenus pour le calcul des $Q_\nu(y)$ peuvent être résumés dans le théorème suivant.

L'intégrale

$$I_n^\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{Q_\nu(x)}{P_{n+1}(x)} dx,$$

prise le long de la circonférence C dans le sens positif, est égale à zéro si $\nu \geq n$ et à l'unité si $\nu = n$.

Supposons ν donné. Quand $n > \nu$, l'intégrale est nulle, quels que soient les coefficients du polynôme Q_ν , d'après les éléments de l'algèbre. Mais en écrivant qu'elle est nulle pour

$$n = 0, 1, 2, \dots, \nu - 1,$$

on a ν équations linéaires pour déterminer les coefficients $b_1, b_2, \dots, b_\nu$ du polynôme

$$Q_\nu(x) = x^\nu + b_1 x^{\nu-1} + \dots + b_\nu.$$

Par le fait que le coefficient de x^ν est 1, l'intégrale I_n^ν est égale à 1.

Le cas le plus simple est le cas où $P_n(x) = (x - z)^n$ (z constante); alors

$$Q_\nu(y) = (y - z)^\nu.$$

Les polynômes $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ sont identiques.

On peut donner une démonstration intuitive du théorème ci-dessus par le procédé suivant. Supposons

$$|x| > |y|$$

et multiplions les deux membres du développement (2) par $\frac{Q_v(x)}{2\pi i}$, puis intégrons par rapport à x sur la circonférence C , dans le sens positif. Nous aurons

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{Q_v(x) dx}{x-y} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{Q_n(y)}{2\pi i} \int_C \frac{Q_v(x) dx}{P_{n+1}(x)}.$$

Le premier membre est $Q_v(y)$; on a donc

$$Q_v(y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} I_n^v Q_n(y).$$

Quand $n > v$ l'intégrale I_n^v est nulle, car sous le signe $\int$ le degré du dénominateur surpasse, au moins de deux unités, celui du numérateur. On a donc

$$Q_v(y) = I_0^v Q_0(y) + I_1^v Q_1(y) + \dots + I_v^v Q_v(y).$$

Cette identité *entre deux polynomes* exige

$$I_0^v = I_1^v = \dots = I_{v-1}^v = 0, \quad I_v^v = 1.$$

Le théorème est donc démontré.

Ce théorème permet de déterminer les polynomes Q quand les P sont donnés. Il permet ensuite de calculer les coefficients a_n du développement (1).

VI. Pour terminer, nous ferons la remarque suivante : Supposons que, comme les polynomes de Legendre, les polynomes $P_n(x)$ soient alternativement pairs et impairs,

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= x^2 - a, \\ P_3(x) &= x(x^2 - b), \\ P_4(x) &= x^4 - cx^2 - f, \end{aligned}$$

en écrivant

$$\frac{1}{x-y} = \frac{Q_0}{P_1} + \frac{Q_1}{P_2} + \frac{Q_2}{P_3} + \frac{Q_3}{P_4} + \dots$$

et identifiant les deux membres ordonnés suivant les puissances de $\frac{1}{x}$, on trouve, par un calcul facile,

$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = y, \quad Q_2 = y^2, \quad Q_3 = y(y^2 - a), \quad Q_4 = y^2(y^2 - b).$$

Donc, on a pour les premiers termes

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{P_1(x)} + \frac{yP_0(y)}{P_2(x)} + \frac{yP_1(y)}{P_3(x)} + \frac{yP_2(y)}{P_4(x)} + \dots$$

où la loi ne continue pas aussi simple, mais où tous les polynomes $Q_v(y)$ contiennent y en facteur.

Plus généralement, si $P_1(x) = x - \alpha$, les autres $P_n(x)$ étant quelconques, en écrivant

$$\frac{1}{x-y} = \frac{Q_0(y)}{P_1(x)} + \frac{Q_1(y)}{P_2(x)} + \dots + \frac{Q_n(y)}{P_{n+1}(x)} + \dots,$$

on voit, en faisant $y = \alpha$, que tous les polynomes $Q_1, \dots, Q_n$ doivent s'annuler; ils contiennent tous $y - \alpha$ en facteur.

VII. En dérivant par rapport à y , on obtient les développements de $\frac{1}{(x-y)^k}$, $k = 2, 3, \dots$

VIII. *Exemple.* — Si chaque polynome P_n a les mêmes racines que le précédent avec une racine nouvelle, les $Q_n(x)$ sont identiques aux $P_n(x)$. En effet, dans ce cas, on donne une suite de nombres

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots, \quad |\alpha_n| < R,$$

et l'on prend

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

On vérifie que l'on a aussi

$$Q_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n);$$

en effet, l'intégrale I_n^y est alors évidemment nulle si $n < \nu$, car, sous le signe $\int$, le numérateur est divisible par le dénominateur.

On a, dès lors, le développement

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{P_1(x)} + \frac{P_1(y)}{P_2(x)} + \frac{P_2(y)}{P_3(x)} + \dots;$$

ce qu'on peut vérifier, comme il suit. En appelant R_n la différence entre $\frac{1}{x-y}$ et la somme des n premiers termes du développement, on trouve, de proche en proche,

$$R_n = \frac{1}{x-y} \frac{(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\dots(y-\alpha_n)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}.$$

En supposant $|x| > |y|$ de telle façon que

$$\left| \frac{y-\alpha_n}{x-\alpha_n} \right| < a < 1$$

(a positif), pour toutes les valeurs de n , on voit que $\lim R_n = 0$.

Quoique cette hypothèse sorte de ce que nous avons admis, on pourrait supposer

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = -2, \quad \dots, \quad \alpha_n = -n.$$

Alors on aurait

$$R_n = \frac{1}{x-y} \frac{(y+1)(y+2)\dots(y+n)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)};$$

et en posant, par exemple,

$$x = x' + ix'', \quad y = y' + iy'', \\ x' > y',$$

on trouverait $\lim R_n = 0$. Sous ces conditions, on aurait encore

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{(y+1)(y+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots,$$

série intéressante de factorielles. Mais ce résultat apparaît alors comme un cas très particulier des formules que Gauss a données (*Œuvres*, t. III) pour exprimer les fonctions hypergéométriques $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ par des fonctions Γ ou Π .

SUR LES SURFACES ALGÈBRIQUES POSSÉDANT UN SYSTÈME SIMPLE
DONT LES COURBES CONTIENNENT UNE INVOLUTION ;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

On sait que M. Castelnuovo a établi le théorème suivant ⁽¹⁾ :

Si une surface algébrique contient un réseau simple de courbes hyperelliptiques de genre p , cette surface est rationnelle ou réglée de genre p .

On étend facilement ce théorème au cas d'une surface possédant un réseau de courbes contenant des involutions d'ordre 2 et de genre quelconque ⁽²⁾. Plus tard, nous avons, en poursuivant cet ordre de recherches, déterminé les surfaces contenant un système linéaire simple ∞^3 dont chaque courbe possède une involution d'ordre 3 de genre donné ⁽³⁾. Actuellement, nous considérerons le cas plus général d'une surface contenant un système linéaire simple, de dimension r , dont chaque courbe possède une involution d'ordre r . Nous établirons précisément que :

Si une surface algébrique contient un système linéaire simple, de dimension r et de genre p de courbes contenant une involution d'ordre r et de genre π , cette surface est rationnelle, ou réglée de genre π ou p .

On remarquera que dans le cas $r=3$, que nous avons déjà considéré, le théorème auquel nous étions arrivé se trouve notablement précisé.

⁽¹⁾ *Su la superficie che contengono una rete di curve iperellittiche* (Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 1^{re} sem. 1894).

⁽²⁾ Voir par exemple : L. GODEAUX, *Sur les surfaces algébriques dont les courbes canoniques sont elliptiques doubles* (Math. Annalen, Bd LXXII, 1912).

⁽³⁾ L. GODEAUX, *Sur les surfaces algébriques contenant un système linéaire simple dont chaque courbe possède une involution de termes de points* (Annuaire de l'Accad. Polytechnica do Porto, t. VII, 1912).

1. Soit F une surface algébrique contenant un système linéaire simple, $|C|$, ∞^r , de genre p , dont chaque courbe possède une involution γ'_r , d'ordre r et de genre π .

Considérons les courbes C passant par un point P de F , quelconque, et, sur chacune de ces courbes, les groupes de r points dont P fait partie. Nous obtenons ainsi une variété V_p , de dimension $r - 1$, de groupes de $r - 1$ points variables. Il peut se faire que les groupes de V_p se trouvent tous sur une même courbe Γ_p ou qu'ils se distribuent sur toute la surface.

Dans la première hypothèse, trois cas peuvent se présenter : Si nous considérons les courbes Γ_Q lieu des variétés V_Q relatives aux points Q de la courbe Γ_p , il peut se faire que ces courbes Γ_Q se confondent avec la courbe Γ_p , ou se confondent en une seule courbe différente de Γ_p , ou encore soient toutes distinctes. Nous aurons donc en tout quatre cas à examiner :

1° Les groupes de V_p sont sur une courbe Γ_p qui ne varie pas lorsque le point P parcourt cette courbe.

2° Les groupes de V_p sont sur une courbe Γ_p et les groupes des variétés V_Q relatives aux points Q de Γ_p sont sur une même courbe Γ_Q différente de Γ_p .

3° Les groupes de V_p sont sur une courbe Γ_p variable avec le point P .

4° Les groupes de V_p remplissent toute la surface.

Nous examinerons successivement ces différents cas.

2. Dans le premier cas, nous voyons que la courbe Γ_p est rencontrée par les courbes C en des groupes de r points formant une série de dimension r . La courbe Γ_p est par suite rationnelle. De plus, cette courbe passe simplement par le point P , puisque celui-ci peut être choisi arbitrairement sur la courbe. Par suite, par un point arbitraire de F ne passe qu'une seule courbe de la famille $\{\Gamma\}$ lieu des courbes Γ_p . Cette famille est donc un faisceau. Les courbes de ce faisceau découpent, sur une courbe C arbitraire, la série γ'_r de genre π appartenant à cette courbe par hypothèse; c'est donc un faisceau de genre π . La surface F , contenant un faisceau de genre π de courbes rationnelles, se ramène,

par des transformations birationnelles, à une réglée de genre π

$$(p_a = -\pi, p_g = p_2 = \dots = 0).$$

3. Passons au second cas et supposons d'abord les courbes Γ_p, Γ_Q irréductibles. Ces courbes, appartenant à la même famille, doivent rencontrer les courbes C en un même nombre n de points. Fixons l'attention sur une courbe C . À chacun des n points de rencontre de cette courbe avec Γ_p correspondent $r-1$ points de Γ_Q situés sur cette courbe C . On doit donc avoir $n = (r-1)n$, d'où $r=2$. Si $r > 2$, Γ_Q et Γ_p sont réductibles. Remarquons d'ailleurs que quand $r=2$, on a $n=1$, car, d'après la définition de Γ_Q , cette courbe ne peut rencontrer une courbe C passant par Q qu'en un point variable et, éventuellement, en un certain nombre ν de points confondus en Q . Or, actuellement, Q variant sur Γ_p et Γ_Q étant irréductible, on a $\nu=0$, d'où $n=1+\nu=1$.

Supposons $r > 2$ et soit Γ'_p une des parties irréductibles de Γ_p . Nous supposons que la courbe Γ_Q relative à un point Q (variable) de Γ'_p se décompose en $k-1$ fois Γ'_p et en une courbe Γ'_Q . Indiquons par n' le nombre de points communs à une C quelconque et à Γ'_p et fixons l'attention sur une courbe C générique. À un point commun à cette courbe et à Γ'_p correspondent $r-1$ points dont $k-1$ sont sur Γ'_p et les $r-k$ restant parmi les intersections de la courbe C considérée et de Γ'_Q . La courbe Γ'_Q rencontre donc les courbes C en $\frac{n'}{k}(r-k)$ points. Comme les parties irréductibles de Γ'_Q appartiennent évidemment à la même famille $\{\Gamma'\}$ que Γ'_p , on voit que Γ'_Q se décompose en $\frac{r-k}{k}$ courbes que nous désignerons par Γ' .

Observons que la courbe $\Gamma_Q \equiv (k-1)\Gamma'_p + \Gamma'_Q$ relative à un point Q déterminé de Γ'_p rencontre une courbe C passant par Q en $r-1$ points variables et en ν points fixes confondus en Q . Il s'ensuit que Γ'_Q rencontre une courbe C en $r-k$ points seulement et que, par conséquent, on a

$$\frac{n'}{k}(r-k) = r-k,$$

d'où $n' = k$.

Si k est supérieur à l'unité, les courbes C passant par Q

déterminent, sur la courbe Γ_p , des groupes de $k-1$ points en nombre ∞^{r-1} ; on a donc $k \geq r$. Mais $\frac{r-k}{k}$ doit être un entier positif, donc on a nécessairement $k=1$.

Les courbes Γ_p, Γ_q se décomposent donc en r courbes Γ' rencontrant chacune les courbes C en un point. Ces courbes sont par suite rationnelles et, de plus, elles forment un faisceau $\{\Gamma'\}$ de même genre p que les courbes C .

La surface F , possédant un faisceau de genre p de courbes rationnelles, se ramène, par des transformations birationnelles, à une réglée de genre p ($p_a = -p, p_g = P_2 = \dots = 0$).

4. Dans le troisième cas, la courbe Γ_p est rencontrée, par les courbes C passant par P , en ∞^{r-1} groupes de $r-1$ points. La courbe Γ_p est donc rationnelle. La surface F , contenant ∞^2 courbes rationnelles Γ_p , est, d'après un théorème bien connu de M. Castelnuovo, rationnelle ($p_a = P_2 = 0$).

5. Reste à traiter le dernier cas, celui où les groupes de $r-1$ points dont la variété V est formée se distribuent sur toute la surface F .

Considérons les groupes de $r-1$ points de V_p appartenant aux courbes C (passant par P) d'un faisceau. Ces ∞^1 groupes engendrent une courbe que nous désignerons aussi par F . La courbe F relative à un faisceau déterminé de courbes C passant par P est rencontrée par ces courbes en $r-1$ points variables et en un certain nombre de points confondus en P ; par conséquent, toutes les courbes C passant par P rencontrent une courbe F en $r-1$ points.

Supposons $r > 3$ et rapportons projectivement les courbes C passant par P aux hyperplans d'un espace S_{r-1} à $r-1$ dimensions. La surface F se transforme en une surface simple F^* et aux courbes F correspondent sur F^* des courbes F^* d'ordre $r-1$. Or, une courbe d'ordre $r-1$ située dans un espace linéaire à $r-1$ dimensions est rationnelle, donc les courbes F^* et par suite les courbes F sont rationnelles. Il se pourrait que le système $\{F\}$ formé par les courbes F construites plus haut en partant du point P soit composé au moyen d'un faisceau. Mais ce faisceau varie néces-

sûrement avec le point P, car autrement on retomberait sur un des cas précédemment étudiés, puisque tous les groupes de r points des séries γ'_r appartenant aux courbes C se distribuerait sur les courbes d'un unique faisceau. On voit donc que la surface F, dans le cas actuel, possède au moins ∞^1 courbes rationnelles et est, par suite, rationnelle ($p_a = P_2 = 0$).

Supposons enfin $r = 3$. A chaque point P correspond une variété $\infty^2 V_p$ de couples de points qui est rationnelle, car à une courbe C passant par P correspond un couple de V_p et inversement.

Soit π un plan. Entre π et V_p établissons une correspondance birationnelle. A une courbe Γ correspond alors, sur π , une courbe double Γ^* .

Une courbe C passant par P rencontre chaque courbe Γ en deux points variables. Les ∞^2 courbes C passant par P déterminent donc, sur une courbe Γ , soit une g_2^2 , soit une g_2^1 . Mais une Γ contient ∞^1 groupes de deux points de V_p ; dans l'hypothèse d'une g_2^1 , les courbes C découperaient, sur Γ , les ∞^1 groupes de V_p qui se trouvent sur cette courbe. Aux courbes C passant par P correspondent alors sur π des courbes doubles. Or, cela est en contradiction avec l'hypothèse initiale que $|C|$ est simple. On conclut donc que chaque courbe Γ contient une série g_2^2 et est par suite rationnelle. On démontre alors, comme plus haut, que F est rationnelle

$$(p_a = P_2 = 0).$$

SUR LES FONCTIONS DE LIGNES IMPLICITES ⁽¹⁾;

PAR M. PAUL LÉVY.

INTRODUCTION.

L'étude des transformations ponctuelles dans l'espace à n dimensions conduit, lorsque le nombre n augmente indéfiniment et

⁽¹⁾ Le sujet du présent Mémoire a déjà fait l'objet d'une Communication verbale à la Société le 9 janvier 1919, et d'une Communication à l'Académie des Sciences, le 20 janvier.

qu'à la limite on remplace les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ par des quantités dépendant d'une manière continue d'un paramètre, à l'étude des correspondances entre deux fonctions $u(s)$ et $v(s)$, définies toutes deux, pour fixer les idées, pour les valeurs de s comprises entre 0 et 1. Une pareille correspondance étant souvent donnée par une formule permettant de déterminer $v(s)$ lorsque l'on connaît $u(s)$, il est important de savoir résoudre cette formule par rapport à $u(s)$, et calculer cette fonction lorsque l'on connaît la fonction v .

Ce problème n'a été étudié jusqu'ici qu'au point de vue *local*, et dans le cas où la relation qui exprime v lorsque u est connu peut être différenciée.

La résolution par rapport à ∂u de la relation linéaire qui relie ∂u et ∂v , qui est en général ce qu'on appelle une *équation intégrale*, a été obtenue dans des cas importants par M. Volterra d'abord, puis par M. Fredholm. Dans les cas traités par ces savants, la solution rappelle tout à fait celle des équations algébriques linéaires, et présente un caractère tout différent suivant qu'une certaine quantité appelée *déterminant* de l'équation est nulle ou non. Dans d'autres cas, mis en évidence notamment par M. Picard, apparaissent des circonstances très différentes de celles qui se rencontrent dans la théorie des équations algébriques. Quoi qu'il en soit de la généralité de ces cas, l'importance au point de vue des applications des équations résolues par M. Fredholm conduit à porter surtout son attention sur les cas où l'expression de déterminant de l'équation a un sens; dans ces cas, l'équation a une solution déterminée et unique si le déterminant n'est pas nul, c'est-à-dire *en général*.

On peut alors aborder le problème, connaissant la fonction v qui correspond à une fonction particulière u , et sachant résoudre par rapport à ∂u la relation entre ∂u et ∂v , de déterminer la fonction U , à laquelle correspond une fonction V *suffisamment peu différente de v* . C'est le *problème de l'incersion au point de vue local*, qui a été résolu à des points de vue différents par MM. E. Schmidt et Volterra, moyennant certaines conditions qui seront en général réalisées dans les applications.

Au point de vue local, il n'est pas douteux qu'une théorie définitive ait ainsi été établie.

Mais aucune tentative ne semble avoir été faite pour sortir de ce point de vue, et chercher à reconnaître à des caractères généraux de la relation donnée entre u et v , si la résolution par rapport à u est possible et unique par rapport à v . C'est ce problème que nous nous proposons de traiter, en généralisant les résultats obtenus par M. Hadamard dans le cas des transformations ponctuelles et exposés en 1906 dans ce Bulletin.

2. Rappelons d'abord brièvement les résultats obtenus par M. Hadamard.

Supposons que dans une transformation ponctuelle un point A d'un espace à n dimensions ait pour homologue un point B que nous nommerons son *image*. Les coordonnées $y_1, y_2, \dots, y_n$ de B sont supposées fonctions des coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ de A, uniformes, continues, admettant des dérivées, et telles que le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

soit de signe constant. (Si l'on suppose la continuité de toutes les dérivées des y par rapport aux x , il suffit de spécifier que ce déterminant ne s'annule pas.) A ces conditions, l'inversion est possible *au point de vue local*, c'est-à-dire que si un point b est l'image d'un point a , à tout point B *suffisamment voisin de b* correspond dans le voisinage de a un point A dont il est l'image.

Mais l'inversion est-elle possible dans tout l'espace? S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver un point b_1 qui ne serait l'image d'aucun point, et lorsque B se déplacerait de b à b_1 , il devrait à un certain moment passer en un point b' où l'inversion cesserait d'être possible; il est d'ailleurs évident qu'elle serait impossible, non seulement après b' , mais pour ce point lui-même. Cela ne peut s'expliquer que si, pendant que B décrit le chemin de longueur finie bb' , le point A dont il est l'image décrit un chemin de longueur infinie.

Pour exclure cette possibilité, M. Hadamard considère, pour chaque point a , le minimum μ de la quantité

$$\sqrt{\frac{dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_n^2}{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}};$$

ce minimum est positif lorsque Δ n'est pas nul, mais il n'existe aucun rapport déterminé entre lui et Δ , et la considération de μ permet d'obtenir des résultats que l'on ne pourrait obtenir en considérant seulement Δ . Soit μ_ρ le minimum de μ sur la sphère

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \rho^2.$$

M. Hadamard suppose que l'intégrale

$$\int_0^r \mu_\rho d\rho$$

augmente indéfiniment avec r . Sous cette condition, une ligne de longueur infinie ne pourra avoir pour image une ligne de longueur finie. Tout point B admet donc un point A dont il est l'image. M. Hadamard démontre de plus qu'il n'en admet qu'un. L'inversion de la transformation considérée est donc non seulement possible, mais uniforme.

FINITIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES.

3. Cherchons à étendre ces résultats au problème de calcul fonctionnel qui nous occupe.

Considérons donc une fonction $u(s)$, définie et uniforme pour les valeurs de s comprises entre 0 et 1, à laquelle correspondra une fonction $v(s)$, définie et uniforme pour les mêmes valeurs de s . A chaque fonction u correspondra une fonction v et une seule.

Nous écrirons dans la suite $u(s)$ et $v(s)$ lorsque nous considérerons les valeurs de ces fonctions pour une valeur déterminée de s , et simplement u et v lorsque nous considérerons les êtres analytiques constitués par l'ensemble des valeurs de ces fonctions lorsque s varie de 0 à 1.

En raison de la commodité du langage géométrique, nous conviendrons de représenter la fonction u par un point a d'un espace idéal E , et de même la fonction v par un point b d'un espace E' . La correspondance étudiée entre u et v pourra ainsi être considérée comme une transformation ponctuelle dans laquelle b sera dit l'image de a . Nous désignerons par $A, B, a_0, b_0, \dots$ les points correspondant respectivement à des fonctions $U, V, u_0, v_0, \dots$.

Mais le langage géométrique ne doit pas masquer une difficulté

qui se présente. Quand devons-nous considérer un point comme voisin d'un autre? D'une manière plus précise, comment définissons-nous la *distance* entre deux points? Dans l'espace à n dimensions il ne peut y avoir ambiguïté sur la réponse à faire à la première de ces questions, et l'on n'a jamais considéré qu'une seule définition de la distance. Il n'en est pas de même dans le cas qui nous occupe. Bien des définitions sont possibles. Il est évidemment essentiel de leur imposer cette condition, que la distance d de deux points a et A ne soit nulle que si les fonctions u et U sont les mêmes. Les définitions qu'il y a intérêt à proposer ne sont donc pas les mêmes suivant qu'on impose ou non aux fonctions considérées certaines restrictions de continuité. Ainsi la définition donnée par la formule

$$(1) \quad d^2 = \int_0^1 [U(s) - u(s)]^2 ds,$$

qui est la généralisation la plus naturelle de celle adoptée dans l'espace à n dimensions, convient si l'on ne considère que des fonctions continues, et ne convient pas si l'on considère l'ensemble de toutes les fonctions bornées.

On pourrait chercher, en employant le langage abstrait de M. Fréchet, à ne préciser la nature des conditions de continuité considérées et la définition de la distance. Il nous paraît préférable, pour faciliter l'exposé, de préciser ces conditions: nous terminerons par quelques remarques sur les généralisations possibles.

Nous allons ainsi, pour commencer, considérer l'*ensemble des fonctions sommables et des carrés sommables*. Nous entendons le mot *sommable* dans le sens qui résulte des travaux de M. Lebesgue, mais le lecteur qui n'est pas familiarisé avec ces travaux peut sans inconvénient supposer que nous appelons *sommable*, une fonction continue ou admettant une infinité dénombrable de points de discontinuité tels que l'intégrale de cette fonction ait un sens.

Nous ne considérerons pas comme distinctes deux fonctions qui ne diffèrent que pour des valeurs de s constituant un ensemble de mesure nulle.

A cette condition, nous pouvons définir la distance par la formule (1).

Nous dirons que le point A *tend* vers a ou *a pour limite* a lorsque d tend vers zéro. Nous dirons dans les mêmes conditions que U *tend* vers u , bien qu'il puisse exister des valeurs de s , constituant un ensemble de mesure nulle, pour lesquelles $U(s)$ ne tend pas vers $u(s)$. Nous pourrions dire, suivant une expression consacrée, que $U(s)$ *converge en moyenne* vers $u(s)$. Nous préférons l'expression indiquée pour faciliter l'extension au cas où nous modifierons la définition de la distance.

Nous dirons qu'un point A dépend d'une manière *continue* d'un paramètre λ si la distance des points correspondant aux valeurs λ et λ_0 tend vers zéro lorsque λ tend vers λ_0 . Cette définition s'étend au cas de plusieurs paramètres.

Le lieu des points qui dépendent d'une manière continue d'un paramètre sera dit une *ligne continue*.

On dira qu'une ligne continue dépendant d'un paramètre μ *se déforme d'une manière continue* s'il est possible de choisir sur cette ligne un paramètre λ tel que le point défini par ce paramètre dépende d'une manière continue de λ et de μ .

Une *ligne droite* sera le lieu des points correspondant aux fonctions $(1 - \lambda)u_0 + \lambda u_1$, u_0 et u_1 étant deux fonctions particulières et λ un paramètre variable.

On vérifie sans peine que la définition donnée de la distance vérifie cette condition que dans tout triangle chaque côté est au plus égal à la somme des deux autres, l'égalité n'étant réalisée que lorsque le triangle se réduit à trois points en ligne droite.

En appelant *module* d'une fonction u la distance du point qui la représente à celui qui représente l'origine [qui avec la définition précédente de la distance est le module quadratique moyen de $u(s)$], le résultat qui vient d'être énoncé géométriquement peut s'énoncer ainsi : le module d'une somme de deux fonctions u_0 et u_1 est au plus égal à celui de la somme $u_0 + u_1$, l'égalité n'étant réalisée que si $u_1 = cu_0$, c étant une constante positive.

Une *sphère* sera le lieu des points situés à une distance donnée d'un point déterminé appelé *centre*.

4. Nous aurons besoin dans la suite d'une condition pour reconnaître si une fonction qui varie a une limite. Il est évidemment indifférent pour établir la forme de cette condition de considérer

une fonction qui dépend d'un paramètre continu ou une suite de fonctions distinctes. Nous considérerons une suite de fonctions $u_0, u_1, \dots, u_n \dots$, etc., représentées par des points $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, etc.

On pourrait énoncer une *condition de Cauchy* qui serait nécessaire et suffisante pour l'existence de la limite. Il sera plus simple, pour l'application que nous avons en vue, d'énoncer séparément une condition nécessaire et une condition suffisante.

1° *Condition nécessaire.* — Cette condition est que la distance $u_n a_{n+1}$ tende vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Cela résulte immédiatement de ce que, a étant la limite de a_n , cette distance est au plus égale à la somme des distances aa_n et aa_{n+1} , qui tendent vers zéro d'après notre définition de la limite.

2° *Condition suffisante.* — Cette condition est que la distance $d_n = a_n a_{n+1}$ soit le terme général d'une série convergente.

Pour le démontrer, observons que d'après l'inégalité de Schwarz

$$\delta_n = \int_0^1 |u_{n+1}(s) - u_n(s)| ds < d_n.$$

Donc d_n est le terme général d'une série convergente; en d'autres termes, la somme

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^1 |u_{n+1}(s) - u_n(s)| ds = \int_c^1 \sum_{n=1}^{n=\infty} |u_{n+1}(s) - u_n(s)| ds$$

est finie (l'inversion des signes de sommation et d'intégration est légitime puisque tous les éléments sont positifs). Il est donc impossible qu'il existe un ensemble de points de mesure positive pour lequel la fonction intégrée

$$(2) \quad \Sigma |u_{n+1}(s) - u_n(s)|$$

soit infinie. Il en résulte bien que $u_n(s)$ a une limite sauf pour les points d'un ensemble de mesure nulle ⁽¹⁾, et par suite que u_n a

(1) Les fonctions $u_n(s)$ étant des fonctions sommables, il est aisé d'établir que l'ensemble des valeurs de s pour lesquelles la somme (2) est infinie a une mesure bien déterminée. Les deux hypothèses suivant lesquelles cette mesure est nulle ou positive sont donc les seules possibles. Cette remarque est essentielle pour permettre de considérer le raisonnement du texte comme rigoureux.

une limite au sens du paragraphe 3, cette limite étant d'ailleurs, comme chacune des fonctions u_n , une fonction intégrable et de carré intégrable.

En employant le langage géométrique, nous pouvons dire qu'un point qui décrit un chemin de longueur finie a une limite.

5. Considérons maintenant une correspondance entre les fonctions u et v , telle que u soit une *fonctionnelle linéaire continue* de v . D'une manière précise nous supposons que :

1° Si v est de fonction sommable et de carré sommable, il en est de même de u .

2° u est une fonctionnelle continue de v , c'est-à-dire que si le point b représentant v tend vers un point b_0 , le point a représentant u tend vers un point a_0 , qui est naturellement celui qui correspond à b_0 .

3° u est fonctionnelle linéaire de v , c'est-à-dire que la relation

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,$$

où λ_1 et λ_2 sont des constantes, entraîne entre les fonctions u , u_1 et u_2 , correspondant respectivement à v , v_1 , v_2 , la relation

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2.$$

Il suffit même, pour la remarque qui suit, de l'hypothèse que u soit homogène de degré en v , sans être linéaire, c'est-à-dire que $v = \lambda v_1$ entraîne $u = \lambda u_1$.

De ces hypothèses résulte que le module de $\frac{v}{u}$ a une limite inférieure positive.

Si en effet il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver une suite de fonctions v_n de modules m'_n auxquelles correspondent des fonctions u_n de modules m_n tels que le rapport $\frac{m_n}{m'_n}$ augmente indéfiniment avec n . On pourrait alors faire en sorte, en multipliant au besoin les fonctions v_n par des facteurs constants convenables, que m'_n tende vers 0 et m_n vers 1, ce qui est contraire à l'hypothèse de la continuité à l'origine (point représentant la fonction $v = 0$).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

6. Considérons une correspondance entre un point a , représentant une fonction u , et un point b , représentant une fonction v et que nous appellerons *image* de a . Supposons vérifiées les conditions suivantes :

a. v est une fonctionnelle de u , définie d'une manière unique, continue et admettant une différentielle, c'est-à-dire que, u étant donné, on peut trouver une fonctionnelle linéaire δv de δu , fonction de s , telle que, V étant la fonction qui correspond à une fonction U tendant vers u , le module de $V - v = \delta v$ soit infiniment petit par rapport à celui de $\delta u = U - u$.

b. L'inversion est possible localement et est continue, c'est-à-dire que le point a et le nombre positif ε étant donnés, on peut trouver une petite sphère ayant pour centre son image b telle que tout point intérieur à cette sphère soit l'image d'un point et un seul d'un petit volume entourant a et tout entier intérieur à la sphère de centre a et de rayon ε .

Cette condition exige que la relation δu et δv soit résoluble par rapport à δu . Alors, d'après le paragraphe 3, le rapport du module de δv à celui de δu a une limite inférieure positive μ .

c. Lorsque le point a est intérieur à une sphère de rayon ρ ayant pour centre l'origine (point qui représente la fonction $u = 0$), en d'autres termes lorsque le module de u est inférieur à ρ , μ admet une limite inférieure positive μ_ρ .

Il faut remarquer que si dans le cas de l'espace à n dimensions étudié par M. Hadamard l'existence de μ_ρ résulte nécessairement de celle de μ , lorsqu'on suppose la continuité des dérivées premières (à cause de la continuité uniforme), il n'en est pas de même dans le cas qui nous occupe, même si l'on suppose que δv dépende d'une manière continue de u et de δu .

d. L'intégrale

$$\int_0^r \mu_\rho d\rho$$

augmente indéfiniment avec r .

De cette condition résulte évidemment qu'il ne sera pas possible que a décrive un chemin de longueur infinie pendant que b décrit un chemin de longueur infinie.

Sous ces conditions, l'inversion de la transformation est possible et uniforme; en d'autres termes, tout point b est l'image d'un point a et d'un seul.

7. Démontrons d'abord que *l'inversion est possible.*

S'il n'en était pas ainsi, on pourrait imaginer un point B qui se déplace d'un point b_0 pour lequel l'inversion soit possible à un point b_1 pour lequel l'inversion soit impossible, et cela en suivant un chemin de longueur finie. Il devrait donc exister sur ce chemin au moins un point b tel que l'inversion soit possible un peu avant b et impossible après. Nous allons montrer que cela est en contradiction avec les hypothèses faites.

Lorsque B arrive en b en décrivant un chemin de longueur finie, le point A décrit aussi un chemin de longueur finie (condition d), et par suite a une limite a (§ 4), qui, à cause de la continuité (condition a), a pour image le point b . Mais alors l'inversion est possible dans tout l'intérieur d'une petite sphère entourant b (condition b) et par suite un peu au delà de ce point, contrairement à ce que nous avons supposé.

La possibilité de l'inversion est donc démontrée.

8. Démontrons maintenant que *l'inversion est uniforme.*

Considérons à cet effet deux points a_0 et a_1 ayant une image b et montrons qu'ils ne peuvent être distincts.

Une ligne C allant de a_0 en a_1 a pour image une ligne fermée C commençant et finissant en b . On peut évidemment supposer que C' , sans cesser de commencer et finir en b , se déforme d'une manière continue et finisse par se réduire au point b . La ligne C qui a C' pour image doit pendant ce temps varier d'une manière continue ⁽¹⁾; ses extrémités varient donc d'une manière continue.

(1) On peut considérer que ce point n'est pas évident. Observons que la ligne C décrit dans sa déformation une *surface*, sur laquelle un point B peut être déterminé par deux paramètres. Ce fait qu'il n'y ait que deux paramètres permet d'employer les raisonnements basés sur la continuité uniforme et rendre parfaitement rigoureux le raisonnement du texte. Ces raisonnements sont trop connus pour qu'il soit utile d'y insister.

Mais comme ses extrémités ont constamment b pour image, et que dans le voisinage de chacun des points a_0 et a_1 il n'existe aucun autre point ayant b comme image (condition b), elles ne peuvent se détacher de a_0 et a_1 . Comme C doit se réduire à un point en même temps que C' , ses extrémités a_0 et a_1 ne peuvent être distinctes.

Le théorème fondamental est donc bien démontré.

GENERALISATIONS DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

9. On peut, de bien des manières, généraliser le théorème précédent en modifiant la nature des restrictions de continuité imposées aux fonctions considérées; on peut aussi leur imposer des conditions d'égalité ou même d'inégalité. La nature des restrictions qu'il est utile de considérer et par suite la définition de la distance qui sera la plus indiquée dépendent de la nature de la correspondance envisagée. Nous allons le préciser par des exemples avant de montrer à quelles conditions notre théorème fondamental sera applicable.

10. Considérons d'abord la correspondance entre u et v définie par la formule

$$(3) \quad v(s) = \int_0^s u(t) dt.$$

Si la fonction u est supposée continue, il faut supposer la fonction v continue, à dérivée continue, et de plus s'annulant pour $s = 0$. Ces conditions sont nécessaires pour que l'inversion soit possible localement, et si elles sont réalisées il n'y a aucune difficulté à passer du point de vue local au point de vue général.

Les points a et b qui représentent respectivement u et v ont alors pour lieux deux domaines différents E et E' . Dans le domaine E , on peut garder la définition habituelle de la distance; mais il n'est pas indiqué de la garder dans E' , dont tous les points représentent des fonctions admettant des dérivées; il est préférable dans E' de définir la distance δ par la formule

$$(4) \quad \delta^2 = \int_0^1 \left[\frac{dV(s)}{ds} - \frac{dv(s)}{ds} \right]^2 ds.$$

De cette manière, la fonction u pourra être considérée comme

une fonctionnelle continue de v , et l'on se rend compte que notre théorème généralisé sera applicable. Au contraire, si l'on gardait la définition initiale de distance, u ne dépendrait pas de v d'une manière continue.

II. Considérons maintenant la correspondance définie par la formule

$$(5) \quad v(s) = u(s) + \mathfrak{M} \lfloor \lfloor u \rfloor \rfloor,$$

$\mathfrak{M} \lfloor \lfloor u \rfloor \rfloor$ désignant le plus petit des nombres M tels que

$$u(s) \leq M; \quad (0 \leq s = 1),$$

c'est-à-dire la limite supérieure (au sens algébrique) de $u(s)$ quand s varie de 0 à 1.

Il suffit pour que la fonction v soit bien définie que la fonction u soit bornée supérieurement; et inversement, si v est bornée supérieurement, on peut obtenir u par la formule

$$(6) \quad u(s) = v(s) - \frac{1}{2} \mathfrak{M} \lfloor \lfloor v \rfloor \rfloor.$$

Dans l'étude d'une telle correspondance aucune autre restriction de continuité que l'existence d'une borne supérieure n'est nécessaire, et il faut considérer comme distinctes deux fonctions qui diffèrent pour une seule valeur de s . Il y a alors lieu d'appeler distance des points a et A le module maximum de $U(s) - u(s)$, et de ne pas distinguer entre le domaine lieu de b et le domaine lieu de a .

12. Si l'on envisage des généralisations telles que celles qui résultent des exemples précédents, à quelles conditions notre théorème sera-t-il applicable? Nous ne recommencerons pas la démonstration, mais indiquerons seulement les circonstances nouvelles ou qu'il paraît utile de préciser.

1° L'existence de la quantité α sera toujours une conséquence de la condition b , le raisonnement du paragraphe 3 étant indépendant de la définition de la distance.

Ainsi dans l'exemple de la relation (3) et si l'on garde la défi-

nition de la distance considérée d'abord, cette quantité n'existe pas, mais la condition b n'est réalisée qu'en ce qui concerne la possibilité de l'inversion et non en ce qui concerne la continuité. Mais, avec la définition de la distance correspondant naturellement au champ fonctionnel dans lequel la fonction c est située, la continuité de l'inversion est assurée et la quantité p existe.

2° Nous avons eu besoin pour démontrer l'unicité de l'inversion d'admettre que la ligne C' puisse se déformer d'une manière continue de façon à se réduire à un point. Il faudra s'assurer que cela est possible, c'est-à-dire que le domaine C' est à *connexion linéaire simple*. Si les restrictions de continuité imposées à la fonction v ne risquent pas d'empêcher cette condition d'être réalisée, il n'en est pas de même des conditions d'égalité ou d'inégalité.

3° S'il y a des conditions d'inégalité limitant l'un des domaines E ou E' , il est essentiel que la définition de distance soit modifiée d'après ces conditions de manière à faire paraître ce domaine infini. Il faut donc que les points qui, d'après les conditions d'inégalité, limitent ce domaine soient considérés comme lui étant extérieurs, et que la définition de la distance soit telle que ces points ne puissent être atteints de l'intérieur par un chemin de longueur finie, mais que deux points intérieurs soient toujours à une distance finie l'un de l'autre.

Ainsi, si le domaine E' est constitué par les points représentant les fonctions v telles que

$$\int_0^1 [v(s)]^2 ds < 1,$$

on pourra définir la distance de deux points b et B , représentant les fonctions v et V , par la formule

$$d^2 = \int_0^1 \left[\frac{V(s)}{1-M^2} - \frac{v(s)}{1-m^2} \right]^2 ds,$$

dans laquelle m et M représentent les modules quadratiques moyens des fonctions v et V . A cette condition on pourra appliquer notre théorème. En effet, $v(s)$ est lié d'une manière biunivoque par la

formule

$$w(s) = \frac{v(s)}{1 - m^2}$$

à une fonction w qui elle ne vérifie aucune condition d'inégalité et l'on peut appliquer notre théorème à la correspondance entre les fonctions u et w .

13. On peut chercher dans un autre ordre d'idées l'extension de notre théorème en faisant disparaître la condition que les fonctionnelles considérées admettent une différentielle. On se rend compte en effet que cette condition facilite les raisonnements, mais n'est pas essentielle.

Les conditions essentielles sont évidemment :

1° Que v dépende de u d'une manière continue; sans cette condition le principe du raisonnement par continuité manquerait et toute la théorie précédente disparaîtrait.

2° Que l'inversion soit possible localement. (L'existence des différentielles n'a d'autre intérêt que d'aider à reconnaître si cette condition est réalisée.)

3° Que le domaine E' soit à connexion linéaire simple.

4° Qu'on puisse donner une définition de la distance dans chacun des domaines E et E' telle que ces domaines soient tous les deux infinis dans tous les sens, que tout chemin de longueur finie ait une limite, et qu'à un chemin de longueur infinie dans E ne puisse correspondre un chemin de longueur finie dans E' .

Comme exemple simple de relation pour laquelle la notion de différentielle ne s'applique pas en chaque point, nous n'avons qu'à reprendre l'exemple du paragraphe II. Pour faciliter le langage, bornons-nous à considérer le cas où u est une fonction continue.

Pour les fonctions u n'atteignant leur maximum M que pour une valeur s_1 de s , v admet une différentielle définie par la formule

$$\delta v(s) = \delta u(s) + \delta u(s_1)$$

Mais si u atteint son maximum pour deux valeurs s_1 et s_2 , on ne peut savoir *a priori* laquelle des expressions

$$\delta u(s) + \delta u(s_1), \quad \delta u(s) + \delta u(s_2)$$

représente au second ordre près la variation de v . Si

$$\partial u(s) = f(s) d\lambda, \quad f(s_1) \neq f(s_2),$$

l'une de ces expressions conviendra pour $d\lambda > 0$ et l'autre pour $d\lambda < 0$. On est ainsi dans le cas correspondant à celui des fonctions d'une variable ayant une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Comme le montre la formule (6), cela n'empêche pas l'inversion de la correspondance d'être possible d'une manière unique.

PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES D'UNE CLASSE DE NOMBRES RATIONNELS;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

Désignons par g_k l'entier qu'on obtient en écrivant le chiffre 9 k fois consécutivement, par exemple

$$g_1 = 9, \quad g_2 = 99, \quad g_3 = 999, \quad \text{etc.}$$

L'Arithmétique élémentaire enseigne des propriétés curieuses de nombres ainsi composés et de leurs combinaisons. J'y ajouterai quelques propriétés que je crois nouvelles.

1. Soient

$$(1) \quad a, b, c, \dots, g,$$

$$(2) \quad m, n, p, \dots, s$$

deux suites données d'entiers positifs, les entiers (1) étant premiers entre eux, et soit h un entier positif variable. L'expression

$$(3) \quad N = \frac{g(m+1)ah}{9ak} \times \frac{g(n+1)bh}{9bk} \dots \frac{g(s+1)gh}{9gh}$$

représente un entier à λh chiffres, où

$$(4) \quad \lambda = ma + nb + \dots + sg$$

jouissant de la propriété suivante :

Désignons par $P(k)$ l'entier positif indiquant de combien de

approchée du nombre $P(k)$ pour un système donné $(k, a, b, c, \dots, g)$ et pour tous les systèmes possibles $(x, y, \dots, t)$, avec l'erreur commise ayant une limite supérieure *indépendante de k* .

Dans le cas, par exemple, de l'équation à deux inconnues

$$k = ax + by,$$

la formule de Laguerre fournit

$$P(k) = \frac{k}{ab} + \delta,$$

où la valeur absolue de δ est plus petite que 1; pour l'équation à trois inconnues

$$k = ax + by + cz,$$

elle fournit

$$P(k) = \frac{k^2}{2abc} + \frac{k(a+b+c)}{2abc} + \delta,$$

le terme complémentaire δ étant en valeur absolue plus petit qu'une certaine quantité fixe pour tous les k .

Ces formules permettent d'assigner à h l'une des valeurs que suppose la proposition précédente.

Remarquons que

$$(12) \quad \frac{9^{\frac{\mu+1}{2}zh}}{9zh}$$

est l'entier à $2z h$ chiffres ayant pour valeur

$$(13) \quad \underbrace{100\dots01}_{\alpha h-1 \text{ zéros}} \underbrace{00\dots01}_{\alpha h-1 \text{ zéros}} \underbrace{00\dots010\dots}_{\alpha h-1 \text{ zéros}},$$

où le groupe de chiffres $00\dots01$ se répète z fois. Ceci permet de calculer le nombre N en additionnant les unités convenablement distribuées et d'imaginer même un appareil simple effectuant rapidement ce calcul.

Pour l'équation, par exemple

$$3x + 2y = k,$$

$$0 \leq x \leq 10, \quad 0 \leq y \leq 9,$$

comme le nombre

$$\log \left(1 + \frac{\lambda}{ab} \right) = \log \left(1 + \frac{18}{6} \right) = \log 9$$

est plus petit que 1, on peut prendre $h = 1$, ce qui fournit

$$N = 1011111212222323333434334334334 \dots$$

et le nombre $P(k)$ coïncide avec le $(k+1)^{\text{ième}}$ chiffre de N . Ainsi, l'équation

$$3x + 2y = 19$$

a exactement trois solutions en $x \leq 10$ et $y \leq 9$: ce nombre est bien indiqué par le vingtième chiffre de N .

II. Considérons le nombre rationnel

$$(14) \quad S_{m,h} = M_{m,h} Q_h,$$

où

$$(15) \quad M_{m,h} = \frac{1}{9h} + \frac{1}{92h} + \dots + \frac{1}{9mh},$$

$$(16) \quad Q_h = 10^{-h} \frac{9^m}{9 \cdot 9h}$$

et où m et h sont deux entiers positifs arbitraires. Convertis en fractions décimales, $M_{m,h}$ est une fraction périodique *simple* ayant une période de mh chiffres, et Q_h est une fraction périodique *mixte* dont la partie non périodique et la période ont chacune h chiffres. Le nombre $S_{m,h}$ lui-même, converti en fraction décimale, sera donc une fraction périodique *mixte* dont la partie non périodique a h chiffres et la période mh chiffres.

Partageons la suite S de décimales de $S_{m,h}$ formant l'ensemble de sa partie non périodique et la première période, en tranches successives $T_1, T_2, \dots, T_{m+1}$ à h chiffres, de sorte que la tranche T_k ($k=1, 2, \dots, m+1$) commence par le $[(k-1)h+1]^{\text{ième}}$ et se termine par la $kh^{\text{ième}}$ décimale de $S_{m,h}$, et considérons les tranches $T_1, T_2, \dots, T_m$.

Dès que h surpasse une certaine valeur, l'entier formé du groupe de chiffres significatifs de la tranche T_k coïncide avec le nombre de diviseurs de k autres que 1 et k , et cela pour toute valeur de $k \leq m$.

Pour le faire voir, je remarque que $S_{m,h}$ représente la valeur numérique que prend pour $x = 10^{-h}$ la fraction rationnelle

$$(15) \quad F(x) = f(x) - (x)\varphi,$$

où $f(x)$ est la série de Lambert limitée

$$(16) \quad f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \dots + \frac{x^m}{1-x^m}$$

et

$$(17) \quad \varphi(x) = \frac{x(x+1)}{1-x} = x + 2(x^2 + x^3 + x^4 + \dots).$$

D'après la propriété bien connue de la série de Lambert, le coefficient $N(k)$ du développement

$$(18) \quad F(x) = N(1)x + N(2)x^2 + N(3)x^3 + \dots$$

coïncidera avec le nombre de diviseurs de k autres que 1 et k .

Prenons pour h un entier quelconque tel que 10^h ne soit inférieur au nombre de diviseurs d'aucun entier $k < m$. Le produit $10^{-hk}N(k)$ sera alors le nombre $0,00\dots0N(k)$ où la partie significative $N(k)$, composée de l_k chiffres, est précédée d'un nombre de zéros égal à $h - l_k$ et toujours positifs pour $k = 1, 2, \dots, m$. Il s'ensuit que

$$(19) \quad F(10^{-h}) = \underbrace{0,00\dots0}_{h-l_1 \text{ zéros}} N(1) \underbrace{00\dots0}_{h-l_2 \text{ zéros}} N(2) \underbrace{00\dots0}_{h-l_3 \text{ zéros}} N(3) 0\dots,$$

ce qui démontre le résultat énoncé.

En désignant comme *lacune* toute tranche T_k formée exclusivement de zéros, on en tire le corollaire suivant :

Le nombre de lacunes que présente l'ensemble de k premières tranches $T_1, T_2, \dots, T_k$ de la période de $S_{m,a}$ est égal au nombre des nombres premiers inférieurs à k , et cela pour toute valeur de k plus petite ou égale à m .

Si l'on remarque que

$$\frac{1}{9kh} = 0, \underbrace{0\dots01}_{kh-1} 0, \dots, 01 \underbrace{0\dots01}_{kh-1} 0, \dots, 01 \underbrace{0\dots01}_{kh-1},$$

$$10^{-h} \frac{92h}{9 \times 9h} = 0, \underbrace{0\dots01}_{h-1} 0, \dots, 02 \underbrace{0\dots02}_{h-1} 0, \dots, 02 \underbrace{0\dots02}_{h-1} \dots,$$

on voit que la suite S se calculerait, pour tout m et h donnés, par la seule addition d'unités, par exemple à l'aide d'un appareil simple à imaginer.

Le nombre h remplissant les conditions précédentes peut être déterminé de diverses manières. Comme l'on a

$$N(k) < k < m,$$

on peut prendre pour h un entier quelconque supérieur ou égal à m .

On peut aussi le choisir de la manière suivante : en prenant pour m une factorielle

$$m = 1.2.3 \dots \lambda,$$

on s'assure par des considérations arithmétiques élémentaires que le nombre de diviseurs (autres que 1 et k) d'un entier $k \leq m$ ne surpasse jamais $2^{\lambda-1}$, et comme

$$2^{\lambda-1} < 10^{\frac{\lambda-1}{3}},$$

on peut prendre pour h un entier quelconque supérieur ou égal à $\frac{\lambda-1}{3}$.

Je rappelle aussi l'inégalité de M. Wigert :

$$N(k) < 2^{(1+\varepsilon) \frac{\log k}{\log \log k}},$$

valable pour $\varepsilon > 0$ et arbitraire, pourvu que k soit assez grand.

On trouve, par exemple, pour $m = 100$ (ce qui fournit $h = 2$) :

$$S_{100,2} = 0,00000001000200020102000400020203000400040002000601 \dots$$

Les 20 premières tranches à deux chiffres contiennent 9 lacunes, les 100 premières tranches en contiennent 26, indiquant qu'il y a 9 nombres premiers inférieurs à 20, qu'il y en a 26 inférieurs à 100, etc.

Le même procédé, appliqué à diverses fonctions rationnelles analogues aux précédentes, conduit à d'autres nombres entiers ou rationnels, composé de chiffre 9 et jouissant des propriétés arithmétiques intéressantes.

SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES;

PAR M. P. FATOU.

(DEUXIÈME MÉMOIRE.)

CHAPITRE IV.

26. Nous exposerons dans ce Chapitre les théorèmes généraux auxquels on parvient quand on applique aux fonctions itérées d'une fonction rationnelle les principes concernant les suites de fonctions analytiques. Nous ferons un usage constant de la notion de familles normales de fonctions holomorphes ou méromorphes qui est due à Montel, et nous supposerons connus les résultats exposés dans les Mémoires de cet éminent géomètre ⁽¹⁾. Nous rappelons qu'une famille de fonctions méromorphes dans le domaine D est normale si, de toute suite infinie formée avec les fonctions de la famille, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément dans le domaine ouvert D vers une fonction limite. Cette fonction limite est une fonction méromorphe qui peut, dans certains cas, être une constante finie ou infinie.

Il résulte, des développements des Chapitres précédents, que les itérées d'une fonction rationnelle peuvent former une famille normale dans certains domaines. C'est ce qui a lieu notamment si la substitution correspondante possède un point double ou un cycle de multiplicateur plus petit que 1 en module, ou égal à 1 en module avec un argument commensurable à 2π . Dans ce cas, il y a des domaines dans lesquels les fonctions itérées $R_n(z)$ convergent

⁽¹⁾ Sur les suites infinies de fonctions (*Annales de l'École Normale*, 1907).

Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine (*Annales de l'École Normale*, 1912).

Sur les familles normales de fonctions analytiques (*Annales de l'École Normale*, 1916).

Sur la représentation conforme (*Journ. de Math.*, 7^e série, t. III, 1917).

périodiquement vers les p constantes qui correspondent aux points du cycle, la suite des R_n étant ainsi divisée en p suites partielles pour lesquelles les indices n ont même reste (mod p) et qui convergent au sens ordinaire du mot vers une constante.

Nous dirons avec Montel qu'une famille de fonctions méromorphes dans un domaine D est normale en un point P intérieur à D , si elle est normale dans un cercle de centre P . Une famille normale dans D est normale en chaque point P intérieur à D et, réciproquement, une famille normale en chaque point P intérieur à D est normale à l'intérieur de D . Si les fonctions $R_n(z)$ forment une famille normale en un point ξ , il en sera de même en tous les points conséquents ou antécédents de ξ . Car si la suite de fonctions

$$R_{\alpha_1}(z), R_{\alpha_2}(z), \dots, R_{\alpha_n}(z), \dots$$

converge uniformément dans un cercle c de centre ξ , la suite

$$R_{\alpha_1-1}(z), R_{\alpha_2-1}(z), \dots, R_{\alpha_n-1}(z), \dots$$

converge uniformément dans le domaine c_1 qui est décrit par le point $z_1 = R(z)$, quand z décrit c , et ce domaine c_1 contient à son intérieur le point $\xi_1 = R(\xi)$; les deux fonctions limites ont les mêmes valeurs en deux points correspondants des domaines c et c_1 . Dire que les R_n forment une famille normale en ξ revient à dire que, de toute suite $R_{\lambda_1}(z) \dots R_{\lambda_n}(z) \dots$, on peut en extraire une autre, $R_{\alpha_1}(z) R_{\alpha_2}(z) \dots R_{\alpha_n}(z) \dots$, qui converge uniformément dans c ; donc, de toute suite $R_{\lambda_1-1}(z) \dots R_{\lambda_n-1}(z) \dots$, on peut en déduire une autre : $R_{\alpha_1-1}(z) \dots R_{\alpha_n-1}(z) \dots$, qui converge uniformément dans c_1 , et par suite dans un cercle de centre ξ_1 .

Réciproquement, supposons que la suite

$$R_{\alpha_1}(z), R_{\alpha_2}(z), \dots, R_{\alpha_n}(z), \dots$$

converge uniformément dans un cercle de centre ξ , et soit ξ_{-1} un point racine de l'équation $R(z) = \xi$; si l'on désigne par c_{-1} le domaine contenant ξ_{-1} à son intérieur et qui correspond à un élément de la surface de Riemann à plusieurs feuillets attachée à l'équation algébrique $R(y) = z$ et projeté suivant le cercle c , la suite

$$R_{\alpha_1+1}(z), R_{\alpha_2+1}(z), \dots, R_{\alpha_n+1}(z), \dots$$

est uniformément convergente quand z décrit c_{-1} , et par suite quand z est intérieur à un cercle de centre ξ_{-1} .

27. L'ensemble des points pour lesquels les $R_n(z)$ forment une famille normale est donc un ensemble *complètement invariant*, pouvant former un nombre fini ou une infinité dénombrable de domaines.

Il en est de même, par conséquent, de l'ensemble des points en lesquels la suite des $R_n(z)$ n'est pas normale. Ce dernier ensemble, d'après ce qu'on a vu au Chapitre I, renferme toujours au moins une infinité dénombrable de points; par exemple, les points doubles pour lesquels on a soit $|s| > 1$, soit $s = +1$, et leurs antécédents. Cet ensemble est évidemment fermé. Nous le désignerons par la lettre $\mathcal{F}$ et nous allons étudier les principales de ses propriétés (1).

I. $\mathcal{F}$ ne change pas si l'on remplace $R(z)$ par $R_h(z)$, quel que soit l'entier h . En effet, de toute suite infinie des $R_n(z)$, on peut en extraire une autre dans laquelle les n ont tous le même reste (mod h); soient $R_{\lambda h+p}(z)$ les fonctions de cette nouvelle suite. Si les $R_{np}(z)$ forment une famille normale dans un domaine, on peut extraire de la suite des $R_{\lambda h}(z)$ une autre suite qui converge uniformément dans ce domaine. Soient $R_{\lambda' h}(z)$ les fonctions de cette nouvelle suite qui convergent vers $\Phi(z)$. La suite des fonctions $R_{\lambda' h+p}(z)$ converge à son tour uniformément vers $R_p[\Phi(z)]$, puisque $R_{\lambda' h+p}(z) = R_p[R_{\lambda' h}(z)]$.

L'ensemble des points où les $R_n(z)$ forment une famille normale ne changeant pas si l'on remplace R par R_h , il en est de même du complémentaire $\mathcal{F}$ de cet ensemble.

On en déduit en particulier que tous les points des cycles de multiplicateur > 1 en module ou de la forme $e^{2i\pi \frac{p}{q}}$ appartiennent à $\mathcal{F}$. En ces points, aucune suite extraite des $R_n(z)$ ne converge uniformément (cf. § 13, 14, 15). Il en est de même pour tous les antécédents de ces points.

II. Tout point de $\mathcal{F}$ est limite d'antécédents d'un point quelconque du plan, sauf au plus de deux points exceptionnels.

En un point ξ de $\mathcal{F}$, les $R_n(z)$ ne forment pas une famille nor-

(1) Certaines propositions qui suivent, de caractère géométrique et tout à fait intuitif, exigent pour la précision des discours parfois assez longs et d'aspect rébarbatif, le lecteur les saisira de suite en s'aidant par des figures schématiques.

male. Ces fonctions prennent donc dans leur ensemble, même en négligeant un nombre fini d'entre elles, toutes les valeurs, sauf deux au plus, dans un cercle de centre ξ et de rayon ε arbitrairement petit. Cela revient à dire qu'étant donné un point z_0 du plan, distinct au besoin de un ou deux points exceptionnels, il existe un antécédent de z_0 et de rang supérieur à tout nombre donné n' , qui est à une distance de ξ inférieure à ε .

En faisant tendre ε vers zéro, on voit que ξ est limite d'antécédents de z_0 , ces antécédents pouvant d'ailleurs être tous confondus avec ξ lui-même. Nous devons dire en toute rigueur que ξ est un antécédent ou un point limite d'antécédents de tout point du plan, abstraction faite d'un ou de deux points exceptionnels.

Je dis que ces points exceptionnels sont indépendants de ξ .

En effet, soit a l'un de ces points. Je suppose donc que les équations

$$R_n(z) = a,$$

où $n > n'$, n'ont pas de solutions dans un cercle de centre ξ et de rayon ε ; a possède au plus deux antécédents distincts, y compris a lui-même; car soit a_{-p} un antécédent de rang p de a ; l'équation

$$R_n(z) = a_{-p}$$

n'a pas de solutions dans le cercle considéré, car on déduirait

$$R_{n+p}(z) = a,$$

qui par hypothèse n'a pas de solutions puisque $n+p > n'$. S'il existait trois antécédents distincts, il y aurait trois équations exceptionnelles; les $R_n(z)$ formeraient une suite normale; a possède donc au plus deux antécédents distincts. Quels sont les points qui satisfont à cette condition? La réponse a déjà été donnée au Chapitre I, mais nous allons la donner de nouveau. Supposons que le point a soit le point à l'infini, l'autre point antécédent distinct de a , s'il existe, étant à l'origine; on peut toujours faire cette supposition moyennant une transformation homographique préalable effectuée sur z et $Z = R(z)$ simultanément. Si le point à l'infini n'a pas d'autre antécédent que lui-même, la substitution est polynomiale. Si le point à l'infini n'a d'autres antécédents que lui-même et l'origine, la substitution doit

être de la forme

$$Z = \frac{\text{polynome en } z}{z^q}.$$

Mais le point $z = 0$ à son tour ne devant pas avoir d'autres antécédents que lui-même et l'infini, le polynome du numérateur doit être une constante. On a donc $Z = \frac{A}{z^q}$. Dans ce dernier cas, il y a deux valeurs exceptionnelles, 0 et ∞ , formant un cycle d'ordre 2 et de multiplicateur nul. On voit directement ou comme conséquence de la théorie actuelle que tous les autres points ont une infinité d'antécédents distincts. Dans le premier cas où l'on a $Z = \text{polynome en } z$, peut-on avoir une valeur exceptionnelle autre que $z = \infty$? Soit $z = 0$ une telle valeur. Si dans la relation

$$Z = P(z) = A z^q + B z^{q-1} + \dots,$$

on remplace Z par $\frac{1}{Z}$ et z par $\frac{1}{z}$, on obtient

$$Z = \frac{z^q}{A + B z + \dots},$$

qui doit être encore de la forme $Z = \text{polynome en } z$. Donc tous les coefficients sauf A sont nuls, et l'on a $P(z) = A z^q$, qui admet les deux valeurs exceptionnelles $z = 0$, $z = \infty$ et celles-là seulement. On voit par là que les points exceptionnels n'appartiennent pas à $\mathcal{F}$ et que les équations exceptionnelles telles que $R_n(z) = a$ qui leur correspondent sont telles pour tous les points ξ de $\mathcal{F}$. Cela explique qu'il ne puisse y en avoir plus de deux, puisqu'il y a toujours des points de $\mathcal{F}$.

Il résulte également de ces considérations que tout point n'ayant qu'un nombre fini d'antécédents distincts ne peut en avoir plus de deux et coïncide avec l'un des points exceptionnels que nous venons de considérer, car si a est un tel point, comme il y a une infinité de points de $\mathcal{F}$, il y en a un ξ qui est distinct de a et de ses antécédents. Pour ce point ξ , les équations $R_n(z) = a$, $R_n(z) = a_{-1}$, ... sont des équations exceptionnelles et il ne peut y en avoir plus de deux. On comparera ce qui précède avec l'exposé du paragraphe 5 (Chap. I).

Je dis maintenant que l'ensemble $\mathcal{F}$ est parfait. Soit ξ un point

de $\mathcal{F}$. Les équations $R_n(z) = z'$, $R_n(z) = z''$ ont des solutions dans un cercle de centre ξ et de rayon ε , si z' et z'' ne sont pas des points exceptionnels, par exemple s'ils appartiennent à $\mathcal{F}$. Nous avons vu (Chap. I, § 4) qu'il existe des points doubles ou périodiques qui appartiennent à $\mathcal{F}$ en vertu de la nature de leurs multiplicateurs et qui n'ont jamais les mêmes conséquents. Si z' et z'' sont deux tels points, pour l'une au moins des deux équations précédentes on n'aura jamais la solution $z = \xi$, quelle que soit la valeur de n . Supposons que ce soit le cas pour l'équation $R_n(z) = z'$. ξ est alors certainement limite d'antécédents de z' qui appartiennent à $\mathcal{F}$ comme z' lui-même. $\mathcal{F}$ qui est fermé est donc parfait.

De plus, tout point ξ de $\mathcal{F}$ est bien limite d'antécédents d'un point quelconque du plan z_0 distinct des points exceptionnels, car ξ est limite de points qui sont des antécédents de z_0 ou qui sont eux-même limites d'antécédents de z_0 .

III. Soit $\bar{P}$ le plan (ou la sphère de Riemann) d'où l'on a enlevé un ou deux cercles de rayons arbitrairement petits contenant les points exceptionnels, s'ils existent, et soit ξ un point de $\mathcal{F}$. Le $n^{\text{ième}}$ conséquent d'un domaine quelconque contenant ξ à son intérieur couvre $\bar{P}$ pour n suffisamment grand.

Pour l'établir, démontrons-d'abord le lemme suivant : Soit D un domaine tel que les équations $R_n(z) = z'$ possèdent des racines intérieures à D , lorsque z' appartient au domaine fermé $\bar{P}$; supposons, en outre, qu'en appelant D_1 le conséquent immédiat du domaine D , D soit intérieur au sens large à D_1 ; je dis que le domaine ouvert D_n , $n^{\text{ième}}$ conséquent de D , couvrira $\bar{P}$ pour une valeur finie de n .

On a, en effet, les inégalités topologiques

$$D < D_1 \leq D_2 \leq \dots \leq D_n \leq \dots$$

Si le lemme n'était pas exact il existerait dans le domaine fermé P des points $\xi^{(\alpha_1)}, \xi^{(\alpha_2)}, \dots, \xi^{(\alpha_n)}, \dots$ respectivement extérieurs aux domaines $D_{\alpha_1}, D_{\alpha_2}, \dots, D_{\alpha_n}, \dots$ ou sur la frontière de ces domaines. Ces points ont au moins un point limite ξ qui appartient à $\bar{P}$. ξ n'est intérieur à aucun domaine D_p ; sinon D_p contiendrait un cercle de centre ξ et de rayon ε qui renferme lui-même des

points $\xi^{(\alpha_i)}$ dont l'indice α_i est supérieur à p ; $\xi^{(\alpha_i)}$, intérieur à D_p , est *a fortiori* intérieur à D_{α_i} , ce qui est contraire à l'hypothèse. Or, dire que ξ n'est intérieur à aucun domaine D_n revient à dire que les équations $R_n(z) = \xi$ n'ont aucun point racine intérieur à D , ce qui est encore contraire à l'hypothèse. Le lemme est donc démontré.

Considérons maintenant un point double répulsif α ; si $\mathcal{Q}$ désigne l'intérieur d'un cercle de rayon suffisamment petit et de centre α et $\mathcal{Q}_1$ le conséquent immédiat de $\mathcal{Q}$, on a $\mathcal{Q} < \mathcal{Q}_1$; comme les fonctions $R_n(z)$ prennent toutes les valeurs à l'intérieur de $\mathcal{Q}$, sauf les valeurs exceptionnelles, le lemme précédent s'applique et $\mathcal{Q}_n$ recouvre $\bar{P}$ à partir d'une certaine valeur de n .

Si α est un point double de multiplicateur égal à $+1$, la propriété subsiste comme nous allons le voir. Soit autour de α , le développement de $R(z)$

$$R(z) = z + \alpha(z - \alpha)^{q+1} + \dots$$

Considérons l'étoile relative au point α et particulièrement les domaines D' assemblés autour de α et d'angle au sommet $\frac{2\pi}{q}$ dans lesquels les antécédents de z , obtenus au moyen de la branche de fonction inverse $R_{-1}(z)$ égale à α pour $z = \alpha$, convergent vers α ; chacun de ces q domaines a un antécédent qui lui est intérieur sauf en O ; inversement, les conséquents de ces domaines les comprennent à leur intérieur au sens large. Ces domaines D' sont tous intérieurs à un cercle c de centre α et de rayon ρ aussi petit qu'on le veut. Si maintenant on décrit un cercle c' de rayon $\rho' < \rho$, on peut prendre ρ' assez petit pour que les régions de c' , qui n'appartiennent pas aux D' et qui forment q domaines d'angle au sommet nul assemblés autour de α , fassent partie des secteurs de convergence des $R_n(z)$ vers α , c'est-à-dire soient intérieures aux domaines que nous avons désignés par Δ (§ 10, 11).

Ceci posé, soit β un point double ou périodique faisant partie de $\mathcal{F}$ et distinct de α (§ 4). Il y a dans c' des antécédents de β , en vertu de l'alinéa précédent, et qui sont nécessairement distincts de α ; ces antécédents se trouvent nécessairement dans l'intérieur d'un des secteurs tels que D' puisque, dans les autres parties de c' , $R_n(z)$ tend vers α pour n infini; il y a donc un conséquent de ce

domaine D' , soit D'_h , qui contient β à son intérieur. Or, on a

$$D' \subseteq D'_1 \subseteq D'_2 \subseteq \dots \subseteq D'_h \subseteq D'_{h+1} \subseteq \dots,$$

et comme D'_h contient un point de $\mathcal{F}$, on peut encore appliquer le lemme précédent. Si l'on pose $D'_h = E$, le $n^{\text{ième}}$ conséquent de E , soit E_n , couvrira $\bar{P}$ à partir d'une certaine valeur de n ; comme D' est contenu dans le cercle c , on voit que c_{n+h} couvrira $\bar{P}$.

Si maintenant ξ est un point quelconque de $\mathcal{F}$, un cercle c de centre ξ et de rayon ε contient un antécédent de rang h de tout point double α de multiplicateur > 1 en module ou égal à $+1$; et il y a au moins un point α remplissant l'une ou l'autre de ces conditions; le domaine conséquent c_h contient alors un cercle de centre α auquel s'applique ce que nous venons de démontrer; les conséquents de ce cercle et par suite les conséquents de c recouvriront donc $\bar{P}$ à partir d'un certain rang.

Il s'ensuit que non seulement en ξ les $R_n(z)$ ne forment pas une suite normale, mais qu'aucune suite extraite des $R_n(z)$ ne peut converger uniformément ou non vers une fonction limite méromorphe en ξ . Car un cercle de centre ξ et de rayon ε arbitrairement petit renferme des antécédents de même rang de tous les points de $\bar{P}$, par exemple d'un point double α et d'un point β faisant partie d'un cycle d'ordre q ; soient z' et z'' ces deux antécédents; $R_n(z')$ est constamment égal à α dès que n est assez grand et $R_n(z)$, dans les mêmes conditions, ne prend que les valeurs $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{q-1})$ distinctes de α ; il n'y a donc pas de fonctions limites continues au point ξ .

III. L'ensemble $\mathcal{F}$ a même structure dans toutes ses parties.

En effet, le conséquent de rang h d'un domaine quelconque qui renferme un point ξ de $\mathcal{F}$ est un domaine qui comprend tous les points de $\mathcal{F}$ pour une valeur convenable de l'entier h , puisque aucun point de $\mathcal{F}$ n'est un point exceptionnel. Or la fonction $R_h(z)$ réalise une correspondance continue entre la sphère simple de Riemann et la sphère à d^h feuilletts qui est attachée à l'équation algébrique $R_h(y) = z$.

Il s'ensuit aisément que si la partie f de $\mathcal{F}$ contenue dans D est continue, $\mathcal{F}$ est continu; si f , en particulier, est formé d'un seul arc régulier de courbe analytique et si de plus $\mathcal{F}$ ne renferme pas de

points critiques de $R_{-1}(z)$, $\mathcal{F}$ sera constitué par une courbe fermée analytique sans points singuliers. Si f est discontinu en chaque point il en sera de même de $\mathcal{F}$; car chaque point m de f peut alors être entouré d'une courbe formée d'arcs analytiques et dont tous les points sont infiniment voisins de m et cette propriété sera conservée par la substitution $[Z | R_h(z)]$.

Si $\mathcal{F}$ renferme des points intérieurs, c'est-à-dire si $\mathcal{F}$ renferme tous les points d'un cercle, il comprend tout le plan. En effet dans ce cas il n'y a pas de points exceptionnels, car les points exceptionnels n'appartiennent jamais à $\mathcal{F}$, mais bien à des régions où les $R_n(z)$ convergent régulièrement ou périodiquement, et si l'on prend les antécédents d'un point d'une telle région, il y en a qui sont infiniment voisins de tout point de $\mathcal{F}$ qui par suite n'est dense nulle part. Si donc $\mathcal{F}$ comprend un domaine circulaire c , le $n^{\text{ième}}$ conséquent de c couvre tout le plan pour une valeur convenable de n ; donc tous les points du plan appartiennent à $\mathcal{F}$. Cette circonstance peut se produire et c'est ce que prouve l'exemple suivant dû à S. Lattès. On considère la fonction elliptique de Weierstrass pu et la fonction rationnelle qui permet d'exprimer $p2u$ en fonction de pu

$$p2u = R[pu].$$

Si l'on pose $z = pu$, à une valeur z_0 de z correspondront plusieurs valeurs de u dans le parallélogramme des périodes; soit u_0 l'une d'elles. A un petit cercle c entourant z_0 correspond un petit domaine δ entourant u_0 ; le domaine $2^n\delta$ couvre tout un parallélogramme de périodes pour n suffisamment grand, et comme on a $R_n(z) = p(2^n u)$, $R_n(z)$ prend toutes les valeurs dans c , c'est-à-dire que c_n couvre tout le plan. Il s'ensuit évidemment que tout point z_0 du plan appartient à $\mathcal{F}$. C'est là un cas fort curieux, mais l'itération d'une telle fraction rationnelle ne présente que peu d'intérêt au point de vue de la théorie des fonctions. La recherche de l'ensemble dérivé des conséquents d'un point est alors un problème arithmétique sur lequel on trouvera quelques indications dans la Note de M. Lattès.

Si nous laissons de côté ce cas singulier, $\mathcal{F}$ est alors un ensemble parfait sans point intérieurs qui peut être partout discontinu, ou au contraire formé d'un continu unique; dans ce dernier cas, il peut

être constitué par une courbe de Jordan fermée ou par une courbe non fermée telle qu'un segment de droite. Nous avons étudié dans le Chapitre précédent des exemples de ces différentes sortes, les lignes ou ensembles frontières considérées dans ce Chapitre coïncidant évidemment avec l'ensemble désigné ici par $\mathcal{F}$.

Relativement au cas où $\mathcal{F}$ est partout discontinu, on peut démontrer le théorème suivant : *Si, en appelant comme toujours d le degré de $R(z)$, on a $|R'(z)| > d$ en tous les points de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ est un ensemble parfait discontinu de longueur nulle.*

Je dis d'abord que $\mathcal{F}$ est borné, car si $\mathcal{F}$ contenait le point à l'infini, ce point n'étant pas un point double attractif, on aurait pour de grandes valeurs de z

$$R(z) = kz + h + \frac{l}{z} + \dots,$$

$$|R'(\infty)| = |k| \leq 1 < d.$$

$\mathcal{F}$ ne contient d'ailleurs aucun point critique de $R_{-1}(z)$ et l'on a en tout point de $\mathcal{F}$ et pour toutes les branches de $R_{-1}(z)$

$$|R'_{-1}(z)| < \frac{1}{d}.$$

De chaque point de $\mathcal{F}$ comme centre décrivons un cercle de rayon ε ; on peut prendre ε assez petit pour que l'on ait à l'intérieur de tous ces cercles

$$|R'_{-1}(z)| < c < \frac{1}{d}.$$

Il existe alors, en vertu du lemme de Borel-Lebesgue, un nombre fini de cercles de cette famille, jouissant de cette propriété que tout point de $\mathcal{F}$ est intérieur à l'un au moins d'entre eux. Ces cercles en nombre fini forment un ou un nombre fini de domaines simplement ou multiplement connexes, limités chacun par des courbes formées d'un nombre fini d'arcs de cercle et qu'on peut supposer sans points doubles; ces domaines renferment tous des points de $\mathcal{F}$ et tout point de l'un d'eux est à une distance de $\mathcal{F}$ au plus égale à r .

Transformons cette figure par la substitution algébrique $[z|R_{-1}(z)]$ qui appliquée aux points de $\mathcal{F}$ donne de nouveau tous les points de $\mathcal{F}$. Considérons l'une des courbes γ qui limitent un

de nos domaines; quand z décrit γ dans le sens direct, les valeurs de $R_{-1}(z)$ se répartissent en un certain nombre de cycles, les valeurs d'un même cycle se permutant circulairement entre elles. A un cycle d'ordre ν correspond ainsi une courbe γ_{-1} qui se ferme quand z a décrit ν fois γ ; en vertu de la relation qui lie les différentielles de deux arcs correspondants et de l'hypothèse faite sur $R'(z)$, on aura, en appelant l et l_{-1} les longueurs des deux courbes γ et γ_{-1} ,

$$l_{-1} < \nu cl,$$

et pour l'ensemble des courbes γ_{-1} qui correspondent à une même courbe

$$\Sigma l_{-1} < cl \Sigma \nu = dcl.$$

Comme $dc = K < 1$, on a

$$\Sigma l_{-1} < Kl.$$

En appelant L la somme des longueurs de toutes les courbes γ et L_{-1} la somme des longueurs de toutes les courbes γ_{-1} , on a également

$$L_{-1} < KL.$$

Les domaines initiaux sont ainsi remplacés par d'autres également bornés et limités par des courbes formées d'arcs algébriques, sans points doubles et sans points communs deux à deux, dont la somme des longueurs vérifie la relation précédente. Les points de ces nouveaux domaines sont encore à une distance de $\mathcal{F}$ moindre que r , car à un chemin de longueur $\leq r$ intérieur à un domaine initial et aboutissant en un point de $\mathcal{F}$, correspondra un chemin de longueur inférieure à r et même à $\frac{r}{d}$ aboutissant en un point de $\mathcal{F}$. Les inégalités

$$|R_{-1}(z)| < c < \frac{1}{d}$$

seront donc encore vérifiées dans les nouveaux domaines.

En leur appliquant de nouveau la même transformation, on arrivera à la $n^{\text{ième}}$ opération à enfermer les points de $\mathcal{F}$ dans des domaines bornés limités par des courbes dont la somme des longueurs sera inférieure à $K^n L$; on pourra, bien entendu, ne conserver que celles de ces courbes qui n'en renferment pas d'autres

à leur intérieur. Comme $K^a L$ peut être rendu aussi petit qu'on le veut, $\mathcal{F}$, qui est parfait, est partout discontinu et même de longueur nulle. On voit que le théorème a été établi sans faire *a priori* aucune hypothèse sur les points doubles de la substitution. Mais on démontre facilement, en s'appuyant sur ce qui sera démontré à la fin de ce Chapitre, qu'il y a alors un point double attractif unique dont le domaine a pour frontière $\mathcal{F}$.

Remarquons qu'il n'est guère possible de remplacer les hypothèses faites par d'autres de même nature qui soient moins restrictives; en effet, pour $R(z) = z^d$, l'ensemble $\mathcal{F}$ est la circonférence $|z| = 1$, donc un continu, et l'on a en tout point de $\mathcal{F}$

$$|R'(z)| = d \quad (1).$$

Il peut également arriver et nous en verrons plus tard des exemples que $\mathcal{F}$ ne soit ni continu, ni partout discontinu. Dans ce cas $\mathcal{F}$ renferme au moins une infinité dénombrable de continus distincts. J'esquisse seulement la démonstration, car nous en trouverons d'analogues à propos des domaines des points doubles. Soit C un ensemble continu faisant partie de $\mathcal{F}$ et tel que tout ensemble contenant C et contenu dans $\mathcal{F}$ soit discontinu; nous dirons que C est continu maximum. En transformant C par $R_{-1}(z)$ on obtient un ou plusieurs continus distincts qui sont des continus maxima, antécédents immédiats de C , d'où l'on déduira les antécédents successifs de C . Si C renferme un antécédent ξ_{-h} de l'un ξ de ses points, C est invariant par la substitution $[z | R_h(z)]$. Dans ce cas on peut supposer $h = 1$, en remplaçant $R(z)$ par $R_h(z)$, ce qui ne change pas $\mathcal{F}$. Ceci posé, $\mathcal{F}$ n'étant pas continu, il existe un antécédent C_{-1} de C distinct de C , sinon les antécédents successifs d'un point ξ de C seraient toujours de C ; or il existe au moins un point a de $\mathcal{F}$ extérieur à C qui est limite d'antécédents de ξ . Si C ne renferme jamais les antécédents de ses points on formera une

(1) J'ai toutefois obtenu la proposition suivante qui s'obtient en appliquant aux fonctions $R_h(z)$ un théorème de M. Koebe (voir Chap. VI) :

« Si en tout point de $\mathcal{F}$ on a $|R'(z)| \geq d$, les points de $\mathcal{F}$ peuvent être enfermés à l'intérieur d'un nombre fini de courbes dont la somme des longueurs reste bornée et dont tous les points sont à une distance de $\mathcal{F}$ inférieure à un nombre positif arbitraire ε . »

$\mathcal{F}$, continu ou discontinu, est alors de longueur finie.

suite de continus $C_{-1}, C_{-2}, \dots, C_{-n}, \dots$ qui seront tous sans points communs deux à deux. Dans le cas contraire, on peut supposer C invariant par $[\bar{z}]R(z)$; mais comme il y a un C_{-1} entièrement distinct de C , on pourra encore former une chaîne de continus antécédents de C sans points communs deux à deux. (Le raisonnement est analogue à celui employé au Chapitre I au sujet des antécédents d'un point.)

Nous pouvons, en outre, remarquer que tout point de $\tilde{\mathcal{F}}$ est limite de points appartenant chacun à un continu contenu dans $\tilde{\mathcal{F}}$.

IV. Tout point de $\tilde{\mathcal{F}}$ est limite de points périodiques.

Soit ξ un point de $\tilde{\mathcal{F}}$ que pour plus de commodité nous supposons distinct des pôles et des points critiques de la fonction $R_{-2}(z)$ et du point à l'infini, pour le cas où certains de ces points appartiendraient à $\tilde{\mathcal{F}}$. Les points, laissés de côté pour la démonstration, sont en nombre fini. Dans un cercle de centre ξ et de rayon r les d^2 branches de la fonction $R_{-2}(z)$ ($d^2 \geq 4$) sont donc holomorphes et bornées et jamais égales entre elles deux à deux. Prenons trois de ces fonctions, A, B, C , et considérons un cercle c de centre ξ et de rayon quelconque $\rho < r$.

Supposons qu'il existe une suite infinie de valeurs entières de n telles qu'aucune des trois équations

$$R_n(z) = A, \quad R_n(z) = B, \quad R_n(z) = C$$

n'ait de zéros dans c , et considérons la fonction

$$\psi_n(z) = \frac{R_n(z) - A}{R_n(z) - B} \frac{C - B}{C - A}.$$

Le quotient $D = \frac{C - B}{C - A}$ représente une fonction holomorphe dans c , qui ne prend ni la valeur zéro, ni la valeur 1 et dont le module reste compris entre deux nombres positifs. $\psi_n(z)$, pour les valeurs de n considérées, est uniforme dans c et même holomorphe, ne pouvant devenir infinie que si $R_n(z) = B$, ce qui n'a pas lieu dans c ; elle n'est jamais nulle, car cela exigerait $R_n(z) = A$; jamais égale à 1, car il faudrait pour cela qu'on eût $R_n(z) = C$. De toute suite de fonctions holomorphes dans un cercle où elles ne prennent jamais les valeurs 0 et 1, on peut en extraire une autre qui converge uniformément vers une fonction holomorphe

dans ce cercle ou vers l'infini (Montel). Soit $\psi(z)$ cette fonction limite; on aurait alors pour cette suite de valeurs de n

$$\lim \frac{R_n(z) - A}{R_n(z) - B} = \frac{\psi(z)}{D(z)}$$

uniformément, ou si $\psi(z) = \infty$

$$\lim \frac{R_n(z) - A}{R_n(z) - B} = \infty.$$

Dans ce second cas, on aurait aussi

$$\lim \frac{B - A}{R_n(z) - B} = \infty,$$

et comme $|B - A|$ est compris entre deux constantes finies positives :

$$\lim R_n |z| = B.$$

Si $\psi(z)$ est une fonction holomorphe, il en est de même de $\frac{\psi(z)}{D}$. On devrait alors avoir

$$\lim \frac{B - A}{R_n(z) - B} = \frac{\psi(z)}{D} - 1$$

et $R_n(z)$ convergerait uniformément vers la fonction méromorphe :

$$B + \frac{B - A}{\frac{\psi(z)}{D} - 1}.$$

Or, aucune suite extraite des $R_n(z)$ ne converge uniformément dans c . Il faut donc que pour au moins une valeur de n et même pour une infinité appartenant à une suite d'entiers donnée à l'avance, l'une au moins des trois équations

$$R_n(z) = A, \quad R_n(z) = B, \quad R_n(z) = C$$

ait une racine dans c ; ce qui revient à dire que l'équation

$$R_{n+2}(z) = z$$

a une racine dans c . Ceci ayant lieu, quel que soit le rayon ρ de c , on voit que tout point de $\mathcal{F}$ est un point périodique ou un point limite de points périodiques, la seconde alternative étant

d'ailleurs toujours exacte, puisque $\mathcal{F}$ est parfait; pour la même raison, le résultat est aussi valable pour les points, en nombre limité, qui ont été laissés de côté dans la démonstration. De plus, les points périodiques qui tendent vers ξ ont pour ordres les diviseurs d'une suite infinie d'entiers quelconques, par exemple les nombres premiers.

V. En un point de $\mathcal{F}$, aucune suite extraite des fonctions dérivées $R'_n(z)$ ne converge uniformément.

Je dis d'abord que dans un cercle ayant pour centre un point de $\mathcal{F}$, aucune suite de fonctions $R'_{\lambda_1}(z)$, $R'_{\lambda_2}(z)$, $\dots$, $R'_{\lambda_n}(z)$ n'est uniformément bornée. Un tel cercle renferme, en effet, des points périodiques. Il y a toujours un tel point z' faisant partie d'un cycle dont tous les points sont à distance finie, en sorte que les $R'_{\lambda_n}(z')$ ne peuvent prendre que p valeurs finies distinctes; si A est la plus grande en valeur absolue et si z désigne le rayon de c , on aura dans c

$$R_{\lambda_n}(z) = R_{\lambda_n}(z') + \int_{z'}^z R'_{\lambda_n}(z) dz.$$

L'inégalité $|R'_{\lambda_n}(z)| < K$ entraînerait alors

$$|R_{\lambda_n}(z)| < A + 2Kz$$

et les $R_{\lambda_n}(z)$ seraient bornées dans leur ensemble dans c , ce qui est impossible. Je vais montrer que, si les $R_n(z)$ n'ont pas de valeurs exceptionnelles, les $R'_{\lambda_n}(z)$ prennent la valeur zéro dans c . Pour éviter les difficultés relatives au point à l'infini qui joue ici un rôle particulier [les $R_n(z)$ n'étant pas invariantes par une substitution homographique], nous emploierons l'artifice suivant. Soit α un point distinct des points critiques de $R_{-1}(z)$ et de leurs antécédents et posons

$$t = \frac{1}{z - \alpha}, \quad T = \frac{1}{Z - \alpha}.$$

La relation $Z = R(z)$ devient $T = \Phi(t)$, et l'on a

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{R_n(z) - \alpha}.$$

Les points critiques de $\Phi_{-1}(t)$, qui sont au moins au nombre

de deux, sont les points γ qui s'obtiennent en posant $\gamma = \Phi(\theta)$, θ étant une racine finie de $\Phi'(\theta) = 0$; les antécédents de ces points ne coïncident jamais avec le point à l'infini. Ceci posé, on a

$$\Phi'_n(t) = \Phi'(t)\Phi'[\Phi(t)]\Phi'[\Phi_2(t)] \dots \Phi'[\Phi_{n-1}(t)].$$

Soit G l'ensemble déduit de $\mathcal{F}$ par $t = \frac{1}{z-\alpha}$. Dans tout domaine contenant un point de G, l'équation

$$\Phi_{n-1}(t) = 0$$

a des racines pour n suffisamment grand. Soit t' l'une d'elles; on a

$$\Phi'_n(t') = \Phi'(t')\Phi'(t'_1) \dots \Phi'(t'_{n-1})$$

et le dernier facteur est égal à $\Phi'(\theta)$, c'est-à-dire à zéro. Je dis que les $n-1$ premiers facteurs ne sont pas infinis, car si $\Phi'(t'_{n-k-1})$ était infini, t'_{n-k-1} serait un pôle de $\Phi'(t)$ ou de $\Phi(t)$, t'_{n-k} serait donc infini. Or :

$$\begin{aligned} t'_{n-1} &= \theta, \\ t'_n &= \Phi(\theta) = \gamma, \\ \Phi_k(t'_{n-k}) &= \gamma. \end{aligned}$$

L'infini serait donc un antécédent du point critique γ , ce qui n'a pas lieu. On a donc bien $\Phi'_n(t') = 0$. Or, de

$$R_n(z) = \alpha + \frac{1}{\Phi_n(t)},$$

on déduit

$$R'_n(z) = \frac{t^2 \Phi'_n(t)}{Q_n^2(t)}.$$

Pour $t = t'$, $z = z' = \frac{1}{\alpha} + t'$, il vient

$$R'_n(z') = \frac{t'^2 \Phi'_n(t')}{\gamma^2}.$$

On aura $R'_n(z') = 0$, si $\gamma \neq 0$, ce qu'on peut supposer, puisque $\Phi_{n-1}(t)$ a au moins deux points critiques distincts. Ainsi les fonctions $R'_{\lambda_n}(z)$ s'annulent toutes dans c pour λ_n suffisamment grand.

Supposons maintenant que les $R_n(z)$ aient une valeur exceptionnelle. Si cette valeur exceptionnelle est infinie, $R(z)$ est un

polynome; appelons-le $P(z)$. Comme on a

$$P'_n(z) = P'(z)P'(z_1) \dots P'(z_{n-1})$$

et que l'équation $P'(z) = 0$ a au moins une racine β , si β n'est pas également une valeur exceptionnelle, on aura

$$z_{n-1} = P_{n-1}(z) = \beta$$

en certains points z intérieurs à un domaine quelconque renfermant un point de $\mathcal{F}$, pourvu que n soit assez grand; en un tel point on a aussi $P_n(z) = 0$, puisque les $P'(z_i)$ sont finis.

Effectuons maintenant le changement de variables :

$$z = \frac{1}{t' - \alpha}, \quad Z = \frac{1}{T - \alpha}.$$

La substitution $Z = P(z)$ devient $T = R(t)$ qui est la substitution la plus générale admettant la valeur exceptionnelle α , $P(z)$ étant un polynome arbitraire. On a comme précédemment

$$R_n(t) = \alpha + \frac{1}{P_n(z)},$$

$$R'_n(t) = \frac{P'_n(z)}{P_n^2(z)} z^2.$$

Soit toujours

$$P_{n-1}(z') = \beta, \quad P'(\beta) = 0, \quad P_n(z) = P(\beta) = \gamma.$$

Il vient pour le point t' correspondant à z'

$$R'_n(t') = \frac{z'^2}{\gamma^2} P'_n(z') = 0, \quad \text{si } \gamma \neq 0.$$

Si pour toutes les racines β de $P'(z)$ on a $\gamma = P(\beta) = 0$, $P(z)$ est divisible par $P'(z)$, puisque l'ordre de multiplicité des racines communes à ces deux polynomes qui sont les racines multiples de $P(z)$ est plus grand d'une unité pour P que pour P' ; ceci n'a lieu que pour $P(z) = \Lambda(z - \beta)^m$; il y a alors une deuxième valeur exceptionnelle.

Il résulte de cette discussion que toute suite des fonctions $R'_{k_n}(z)$ prend au voisinage de tout point de $\mathcal{F}$ des valeurs infiniment grandes et des valeurs nulles, et ne peut, par conséquent, former une suite normale; ce résultat est démontré dans le cas où les

$R_n(z)$ ont une valeur exceptionnelle au plus. Il subsiste, on le verra facilement, dans le cas simple où il y a deux valeurs exceptionnelles pour les $R_n(z)$.

Sur l'ensemble $\mathcal{F}$ lui-même, on verra par les exemples du Chapitre précédent que $R'_n(z)$ peut tendre uniformément vers l'infini, ou avoir des limites d'indétermination formant un continu. Ce point sera précisé ultérieurement.

VI. Le nombre des régions distinctes dans lesquelles $\mathcal{F}$ divise le plan ne peut être que 1 ou 2, s'il n'est pas infini.

Les régions considérées sont les domaines ouverts et d'un seul tenant dans lesquels les $R_n(z)$ forment une suite normale et dont tous les points frontières appartiennent à $\mathcal{F}$, ou, si l'on veut, les domaines connexes dans lesquels les $R_n(z)$ se divisent en suites parallèles uniformément convergentes et qui ne sont contenus dans aucun autre domaine jouissant de la même propriété. Ces domaines $\mathcal{C}$ sont donc contigus à $\mathcal{F}$. Si une suite partielle extraite des $R_n(z)$ converge uniformément dans un domaine fermé D intérieur à $\mathcal{C}$ vers une fonction limite $\Phi(z)$ méromorphe dans D , elle converge uniformément dans tout autre domaine fermé D' intérieur à $\mathcal{C}$ vers une fonction limite égale à $\Phi(z)$ ou à son prolongement analytique, obtenu par des chaînes de cercles intérieurs à $\mathcal{C}$, $\Phi(z)$ étant uniforme et méromorphe dans $\mathcal{C}$.

Les domaines conséquents et antécédents de $\mathcal{C}$ sont des domaines de même nature; cela découle immédiatement du paragraphe 26. Considérons la suite des conséquents $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n, \dots$ de $\mathcal{C}$; si tous ces domaines sont distincts, il y a une infinité de régions déterminées par $\mathcal{F}$. Si deux de ces domaines coïncident à $\mathcal{C}_p = \mathcal{C}_{p+h}$, on peut supposer que $\mathcal{C}_p$ est un domaine invariant en remplaçant $R(z)$ par $T(z) = R_h(z)$.

Soit donc un domaine contigu à $\mathcal{F}$ et de plus invariant $\mathcal{C}'$. Si $\mathcal{C}'$ n'est pas *complètement invariant*, il y a une infinité d'antécédents de $\mathcal{C}'$ qui sont distincts; en effet, il y a au moins un antécédent immédiat z'_{-1} d'un point z' de $\mathcal{C}'$ qui n'appartient pas à $\mathcal{C}'$. Formons alors la chaîne d'antécédents

$$z', \quad z'_{-1}, \quad z'_{-2}, \quad \dots, \quad z'_{-n}, \quad \dots,$$

telle que

$$z'_{-(n-1)} = T(z'_{-n}).$$

Si deux points z'_{-n} et $z'_{-(n+1)}$ pouvaient être joints par une ligne l sans point commun avec F , leurs conséquents de rang $n + q - 1$; z'_1 et z'_{q-1} jouiraient de la même propriété, la ligne l_{n+q-1} ne rencontrant pas $\mathcal{F}$. Or z'_{q-1} conséquent d'un point de $\mathcal{E}'$ appartient à $\mathcal{E}'$ qui est invariant, et z'_1 n'appartient pas à $\mathcal{E}'$. Donc s'il n'y a qu'un nombre limité de régions, $\mathcal{E}'$ est complètement invariant, c'est-à-dire contient les conséquents et antécédents de tous ses points. Soit alors $\mathcal{E}''$ une région contiguë distincte de $\mathcal{E}'$. On raisonne sur $\mathcal{E}''$ comme sur $\mathcal{E}'$; si le nombre des régions est fini, il y a un domaine conséquent de $\mathcal{E}''$ qui est complètement invariant par $T_k(z) = U(z)$. Nous aurons donc deux domaines distincts $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ complètement invariants par cette dernière substitution; s'il existe un domaine contigu à $\mathcal{F}$ distinct de $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$, on continuera l'application du même raisonnement. En général, s'il y a exactement N régions distinctes contiguës à $\mathcal{F}$, N étant fini, ces N régions sont complètement invariantes relativement à une certaine puissance de la substitution donnée que nous appelons $H(z)$. On a alors $N \leq 2$. En effet si $N = 2$, les régions considérées sont simplement connexes; car si l'une d'elles, $\mathcal{E}$, ne l'était pas, on pourrait décrire dans $\mathcal{E}$ une ligne fermée γ partageant le plan (ou la sphère) en deux régions et telle qu'il y ait des points frontières de $\mathcal{E}$, donc des points de $\mathcal{F}$, de part et d'autre de γ ; soient a et b deux points de $\mathcal{F}$ séparés par γ ; a est limite d'antécédents de points d'une autre région contiguë $\mathcal{E}'$, donc limite de points de $\mathcal{E}'$, puisque $\mathcal{E}'$ est complètement invariante; de même pour b . Il y a donc des points de $\mathcal{E}'$ séparés par γ , et comme γ appartient à $\mathcal{E}$ et non à $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}'$ ne serait pas d'un seul tenant. Les régions $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, ... sont donc simplement connexes et contiennent alors chacune $d - 1$ points critiques de la fonction $H(z)$, $H(z)$ étant de degré d . Le nombre total de ces points critiques étant $2(d - 1)$, on a $N \leq 2$ (§ 6). On voit ainsi que s'il y a un cycle de p domaines, complètement invariant, on a nécessairement $p = 2$.

Telles sont les propriétés générales les plus caractéristiques de l'ensemble $\mathcal{F}$, au sujet duquel se posent encore bien des questions dont la solution générale ne paraît pas facile, par exemple la suivante : les régions contiguës à $\mathcal{F}$ peuvent-elles avoir des points frontières inaccessibles? En particulier, s'il y a plus de deux régions contiguës distinctes (et par suite une infinité), deux régions contiguës

peuvent-elles avoir la même frontière, sans être identiques? Quels sont les cas où $\tilde{\mathcal{F}}$ est formé de lignes simples, par exemple de lignes analytiques, en nombre fini ou en infinité dénombrable? Nous verrons par la suite qu'on peut répondre à ces questions dans des cas assez étendus, mais qu'il subsiste toujours des cas douteux.

28. Nous avons étudié dans ce qui précède les propriétés de $\tilde{\mathcal{F}}$, sans nous préoccuper de la nature des fonctions limites des $R_n(z)$ dans les régions contiguës. Nous allons maintenant étudier ces fonctions limites et rechercher par conséquent quel est l'ensemble dérivé des conséquents d'un point n'appartenant pas à $\tilde{\mathcal{F}}$ et jusqu'à quel point cet ensemble dérivé dépend de la position du point initial. Dans tous les exemples rencontrés jusqu'ici, en laissant de côté toutefois certaines substitutions du premier degré, les fonctions limites sont des constantes en nombre fini. Il est clair d'ailleurs que ces fonctions limites ne peuvent être que des constantes si elles sont en nombre fini, car si la suite des fonctions $R_{\alpha_n}(z)$ tend vers $f(z)$ dans un domaine contigu à $\tilde{\mathcal{F}}$, la suite $R_{h+\alpha_n}(z)$ tend vers $R_h[f(z)]$ et en faisant $h = 1, 2, \dots$ on doit n'obtenir qu'un nombre limité de fonctions distinctes. On a donc

$$R_h[f(z)] = R_{h+k}[f(z)],$$

pour une valeur de k non nulle; $f(z)$ est donc une racine d'une équation telle que $R_k(\lambda) = R_{k+k}(\lambda)$, qui n'est jamais une identité pour $k \neq 0$; $f(z)$ étant une fonction analytique est donc une constante.

Faisons *a priori* l'hypothèse que la suite des $R_{\alpha_n}(z)$ converge vers une constante, la convergence étant uniforme, comme on le sait, quand z est dans un domaine fermé D intérieur à une région contiguë à $\tilde{\mathcal{F}}$; la suite des domaines conséquents $D_{\alpha_1}, D_{\alpha_2}, \dots, D_{\alpha_n}, \dots$ tend vers le point a . Si deux domaines D_{α_p} et $D_{\alpha_{p+q}}$ appartiennent à la même région contiguë à $\tilde{\mathcal{F}}$, a est un point périodique. En effet posons $\alpha_{p+q} = \alpha_p + h$, $\beta_n = \alpha_n - \alpha_{p+q}$. Dans le domaine D_{α_p} les fonctions $R_{h+\beta_n}(z)$ tendent vers a ; dans le domaine $D_{\alpha_{p+q}}$ les fonctions $R_{\beta_n}(z)$ tendent vers a ; comme ces deux domaines sont intérieurs à une même région contiguë à $\tilde{\mathcal{F}}$, il en résulte que $R_{h+\beta_n}(z)$ tend vers a également dans le domaine $D_{\alpha_{p+q}}$; en vertu

de l'identité

$$R_{h+\beta_n}(z) = R_h[R_{\beta_n}(z)],$$

on a en passant à la limite

$$\alpha = R_h(\alpha).$$

La région contiguë $\mathcal{E}$ qui contient D_{z_p} et $D_{z_{p+q}}$ est invariante par la substitution $[z|R_h(z)]$, le point α est invariant par cette même substitution. Relativement à la substitution $[z|R_h(z)]$, les régions $\mathcal{E}, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{h-1}$ forment un cycle dont l'ordre peut être supposé rigoureusement égal à h , de sorte que $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{n'}$ si $n \equiv n' \pmod{h}$ et seulement dans ce cas; les conséquents du point α forment également un cycle dont l'ordre est un diviseur de h , mais peut être plus petit que h ; soit $h' = \frac{h}{\delta}$ l'ordre de ce cycle. On voit alors qu'il existe une suite d'entiers $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ tels que si z est un point de $\mathcal{E}$ par exemple, les points, $z_{h\gamma_n+r}$ restent à l'intérieur de $\mathcal{E}_r$ et tendent vers le point limite α_r ($r < h$); à deux valeurs z et z' distinctes correspondra le même point limite si $r \equiv r' \pmod{h'}$, ce qui se présentera pour $h' < h$; le point α_r est alors nécessairement un point frontière commun des δ régions distinctes :

$$\mathcal{E}_r, \mathcal{E}_{h'+r}, \dots, \mathcal{E}_{(\delta-1)h'+r}.$$

Si $h' = h$, les points $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}$ peuvent être soit des points intérieurs, soit des points frontières des régions correspondantes. Pour que la première circonstance se présente, il faut et il suffit que α n'appartienne pas à $\mathcal{F}$, α est alors un point périodique attractif. En effet, un point périodique de multiplicateur plus grand que 1 en module ou égal à une racine de l'unité appartient à $\mathcal{F}$. Quant aux points périodiques dont le multiplicateur est de la forme $e^{i\theta}$, θ incommensurable à 2π , s'ils n'appartiennent pas à $\mathcal{F}$, aucune fonction limite n'est une constante dans un domaine contenant un tel point. Car si ce point α est à distance finie, on a, autour de α ,

$$R_h(z) = \alpha + S(z - \alpha) + (z - \alpha)^2 + \dots \quad (S = e^{i\theta})$$

$$R_{nh}(z) = \alpha + S^n(z - \alpha) + \dots,$$

et par suite

$$R_{nh}(\alpha) = \alpha, \quad |R'_{nh}(\alpha)| = |S^n| = 1.$$

Si une suite quelconque des fonctions $R_{nh}(\varpi)$ tendait vers une fonction limite constante dans un cercle de a , cette constante serait égale à a , donc finie, et l'on aurait $\lim R'_{nh}(\varpi) = 0$, ce qui est incompatible avec $|R'_{nh}(a)| = 1$. Aucune suite extraite des fonctions $R_n(\varpi)$ n'a pour limite une constante, car d'une telle suite on pourrait en extraire une autre où les entiers n seraient congrus entre eux (mod h), c'est-à-dire de forme $\lambda h + k$, et de l'égalité

$$\lim R_{\lambda h + k}(\varpi) = C,$$

on déduirait

$$\lim R_{\lambda h}(\varpi) = R_k(C) = \text{const.}$$

Ainsi donc, si une suite infinie telle que $R_{x_1}(\varpi)$, $R_{x_2}(\varpi)$, ..., $R_{x_n}(\varpi)$, ..., ϖ étant dans une région contiguë à $\tilde{x}$, tend vers une fonction limite constante a , et si a n'appartient pas à $\tilde{x}$, c'est un point périodique attractif. Si a appartient à un cycle d'ordre $h(a, a_1, a_2, \dots, a_{h-1})$, les h points du cycle sont respectivement intérieurs aux régions contiguës à $\tilde{x}(\ominus, \ominus_1, \dots, \ominus_{h-1})$ qui forment elles-mêmes un cycle de domaines d'ordre h et qu'on peut appeler les *domaines immédiats* des points $a, a_1, \dots, a_{h-1}$ respectivement. Si ce cycle de domaines n'est pas complètement invariant, ce qui est toujours le cas pour $h > 2$, il y a alors une infinité dénombrable de domaines antécédents des C_i dont l'ensemble constitue le *domaine total d'attraction*, cette fois non connexe, du cycle $(a, a_1, \dots, a_{h-1})$, ou les domaines totaux d'attraction des points $a, a_1, a_2, \dots$ respectivement, suivant qu'on a en vue la substitution $[z | R(\varpi)]$, ou la substitution $[z | R_h(\varpi)]$. Dans l'un quelconque de ces domaines, toutes les fonctions $R_n(\varpi)$ convergent périodiquement vers $(a, a_1, \dots)$ et il n'y a pas d'autres fonctions limites que ces h constantes.

Le cas où a est à la fois point de $\tilde{x}$ et point limite de conséquents de certains domaines du plan se présente, comme nous le savons, quand a est un point périodique dont le multiplicateur est une racine $r^{\text{ième}}$ de l'unité. Je ne possède pas d'exemple où la même circonstance se présente, sans que a soit un point périodique de cette nature; mais il est infiniment probable qu'il en existe. Il est parfaitement admissible, entre autres circonstances, qu'un point double répulsif a soit limite de conséquents de cer-

tains domaines, en sorte qu'on ait $\lim R_{x_n}(z) = a$, pour une certaine suite d'entiers x_n et pour z intérieur à un domaine D; mais alors les $R_n(z)$ ont d'autres fonctions limites que la constante a et même une infinité (§ 15).

Supposons maintenant que les $R_n(z)$ aient une fonction limite non constante; soit $R_{x_1}(z)$, $R_{x_2}(z)$, ..., $R_{x_n}(z)$, ... une suite de fonctions itérées qui, dans une région contiguë à $\mathcal{F}$, convergent vers la fonction méromorphe non constante $f(z)$, uniformément dans tout domaine fermé complètement intérieur à $\mathcal{E}$; soit : $f(z_0) = \xi$, z_0 intérieur à $\mathcal{E}$; il s'ensuit, qu'à partir d'un certain rang, les fonctions $R_{x_n}(z)$ prennent toutes la valeur ξ dans le voisinage de z_0 , c'est-à-dire à l'intérieur de $\mathcal{E}$ ⁽¹⁾. Donc ξ n'appartient pas à $\mathcal{F}$. Si z décrit un domaine fermé D complètement intérieur à $\mathcal{E}$, $y = f(z)$ décrit D' complètement intérieur à une région contiguë $\mathcal{E}'$. Les fonctions $R_n(y)$ et en particulier les fonctions $R_{x_{n+1}-x_n}(y)$ forment une famille normale dans $\mathcal{E}'$. De toute suite infinie de ces dernières fonctions, on peut en extraire une autre qui converge uniformément vers la fonction limite $\psi(y)$. Il est d'ailleurs permis de supposer, pour supprimer toute discussion relative au point à l'infini, que ce point fait partie de $\mathcal{F}$. Les domaines D et D' sont alors bornés; les $R_n(z)$ sont holomorphes dans D ainsi que $f(z)$; les $R_n(y)$ et $\psi(y)$ sont holomorphes dans D'.

Posons

$$R_{x_{n+1}-x_n}(y) = \psi_{x_n}(y),$$

on aura

$$\lim \psi_{\beta_n}(y) = \psi(y),$$

uniformément dans D', les β_n étant pris parmi les x_n .

D'autre part, si l'on pose : $y = f(z)$, $R_{\beta_n}(z) = z_{\beta_n}$ (y intérieur à D', z intérieur à D), on a identiquement

$$\psi_{\beta_n}(z_{\beta_n}) = z_{\beta_{n+1}}.$$

Mais z_{β_n} étant à partir d'un certain rang intérieur à D', on a,

(1) MONTEL. *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (Annales de l'École Normale, 1912, p. 490.

on a, pour $n > n'$,

$$|\psi_{\beta_n}(z_{\beta_n}) - \psi(z_{\beta_n})| < \varepsilon,$$

ε nombre positif arbitraire, cela à cause de l'uniformité de la convergence de $\psi_{\beta_n}(y)$ vers $\psi(y)$ dans le domaine D' . D'autre part, z_{β_n} tendant vers $f(z) = y$ et la fonction $\psi(y)$ étant continue, on a

$$|\psi(z_{\beta_n}) - \psi(y)| < \varepsilon$$

pour $n > n''$. Il s'ensuit que

$$|\psi_{\beta_n}(z_{\beta_n}) - \psi(y)| < 2\varepsilon$$

pour $n > n'$ et n'' , c'est-à-dire que $\psi_{\beta_n}(z_{\beta_n})$ tend vers $\psi(y)$. Mais $z_{\beta_{n+1}}$ tend vers y . L'identité écrite plus haut conduit alors à

$$\psi(y) = y.$$

Ainsi les fonctions $R_{\alpha_{n+1}, \alpha_n}(y)$ qui forment une famille normale dans D' (et même dans $\mathcal{E}'$) ont toutes leurs fonctions limites égales à y . Il s'ensuit aisément qu'elles convergent uniformément vers y dans tout domaine intérieur à $\mathcal{E}'$; mais l'essentiel est qu'elles ont au moins une fonction limite égale à y .

Il suit de là que si dans une région C contiguë à $\mathcal{E}$, les $R_n(z)$ ont au moins une fonction limite non constante, il existe une région $\mathcal{E}'$, conséquente de $\mathcal{E}$, dans laquelle les $R_n(z)$ ont une fonction limite égale à z . On en conclut que les régions consécutives de $\mathcal{E}$ ne sont pas toutes distinctes, car si D' est un domaine complètement intérieur à $\mathcal{E}'$, le domaine D'_n tendant vers D' pour certaines valeurs de n , il existe un entier h que je choisirai le plus petit possible, pour lequel $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'_h$ ont des points communs et sont par suite confondues. $\mathcal{E}$ est donc invariante par la substitution $(z)R_h(z)$. Posons $R_h(z) = T(z)$. Je dis que tout point z de $\mathcal{E}'$ n'a pas plus d'un antécédent immédiat $T_{-1}(z)$, dans C . En effet les fonctions $T_{\lambda_n}(z)$ ayant pour limite z dans $\mathcal{E}'$, on peut choisir les λ_n de manière que les fonctions $T_{\lambda_{n-1}}(z)$ qui forment une famille normale dans $\mathcal{E}'$, convergent vers $f(z)$ qui est naturellement uniforme. S'il y avait dans $\mathcal{E}'$ deux antécédents distincts z_{-1} et z'_{-1} du

point z correspondant à deux branches de la fonction $T_{-1}(z)$, en vertu des égalités évidentes

$$T_{\lambda_n}(z_{-1}) = T_{\lambda_{n-1}}[T(z_{-1})] = T_{\lambda_{n-1}}(z),$$

$$T_{\lambda_n}(z'_{-1}) = T_{\lambda_{n-1}}(z)$$

on aurait en passant à la limite

$$z_{-1} = f(z),$$

$$z'_{-1} = f(z),$$

ce qui est impossible puisque $f(z)$ n'a qu'une valeur en chaque point de $\mathcal{D}'$. Les fonctions $T_{-n}(z)$ restreintes au domaine $\mathcal{D}'$ (§ 6) sont donc uniformes. Comme d'autre part $T_{-1}(z)$ a plus d'une valeur dans tout le plan, le domaine $\mathcal{D}'$ n'est pas complètement invariant et possède une infinité d'antécédents distincts. *Il est donc établi que si le nombre des régions contiguës à $\tilde{\mathcal{F}}$ est fini, c'est-à-dire égal à 1 ou à 2, il n'y a que des fonctions limites constantes.*

On voit maintenant quels sont les points qui peuvent être limites de conséquents d'un point n'appartenant pas à $\tilde{\mathcal{F}}$. Si a est limite de conséquents du point $\xi(\xi_{x_1}, \xi_{x_2}, \dots, \xi_{x_n}, \dots)$, on peut extraire de la suite des entiers x_i une nouvelle suite : $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$, telle que dans un domaine contenant ξ les fonctions $R_{\beta_n}(z)$ convergent uniformément vers $\varphi(z)$, qui prend au point ξ la valeur a . Si ξ appartient à un domaine où il n'y a que des fonctions limites constantes, le point a est limite de conséquents de ξ tant que ξ reste à l'intérieur d'une région $\mathcal{D}$ contiguë à $\tilde{\mathcal{F}}$, ou d'une région conséquente ou antécédente de $\mathcal{D}$. Si a lui-même n'appartient pas à $\tilde{\mathcal{F}}$, il fait partie d'un cycle attractif $(a, a_1, a_2, \dots, a_{h-1})$ et l'ensemble dérivé des conséquents d'un point quelconque $\mathcal{D}$ se compose de ces h points. Si a appartient à $\tilde{\mathcal{F}}$, tous les points analogues limites de conséquents d'un point de $\mathcal{D}$ appartiennent à $\tilde{\mathcal{F}}$ et forment un ensemble fermé invariant qui peut encore être constitué par un nombre fini de points formant un cycle, mais qui peut aussi hypothétiquement comprendre une infinité de points.

Si ξ appartient à une région contiguë où il y a des fonctions limites non constantes, le point a , qui peut dépendre de la position du point initial ξ , appartient à une région contiguë invariante par une puissance de la substitution donnée, ou à la frontière de cette

région; mais il existe toujours des régions antécédentes de cette dernière qui ne renferment aucun point limite de conséquents de ξ . C'est là un cas hypothétique qui, d'après les recherches récentes de M. G. Julia, ne peut pas se présenter quand $R(z)$ est rationnelle ⁽¹⁾. Dans tous les cas nous trouverons un peu plus loin une condition suffisante, toujours réalisée dans les exemples que l'on sait effectivement étudier, pour que de tels domaines (que nous appellerons domaines *singuliers*) n'existent pas.

Une conséquence immédiate de ce qui précède est que si $\mathcal{F}$ ne couvre pas tout le plan, il y a toujours des domaines dont aucun point n'est limite de conséquents d'un point du plan.

29. Nous allons considérer maintenant les antécédents d'un point du plan et chercher quels sont les points limites de ces antécédents. Nous savons déjà que tout point de $\mathcal{F}$ est limite d'antécédents d'un point quelconque du plan, sauf peut-être de un ou deux points exceptionnels qui n'appartiennent pas à $\mathcal{F}$.

Supposons qu'un point ξ n'appartenant pas à $\mathcal{F}$ soit limite d'antécédents d'un point a qui naturellement n'appartient pas à $\mathcal{F}$. Je dis que réciproquement a est limite de conséquents de ξ . Car les fonctions $R_{\alpha_n}(z) - a$ forment une suite normale dans un cercle de centre ξ et de rayon r et prennent la valeur zéro en des points $a_{-\alpha_1}, a_{-\alpha_2}, \dots$ qui tendent vers ξ ; il s'ensuit que les suites uniformément convergentes $R_{\beta_n}(z) - a$ qu'on en peut extraire convergent vers zéro pour $z = \xi$, c'est-à-dire que a est limite de conséquents de ξ . Si dans la région contiguë à $\mathcal{F}$ à laquelle appartient ξ , les fonctions limites sont toutes des constantes, ces constantes n'appartiennent pas à $\mathcal{F}$, sinon il en serait de même de ξ . On doit donc supposer que a fait partie d'un cycle attractif $(a, a_1, \dots, a_{h-1})$. Si parmi les antécédents de a qui tendent vers ξ il y en a une infinité qui sont distincts, ξ appartient à $\mathcal{F}$; en effet soient z une racine de l'équation $R_n(z) = a$, infiniment voisine de ξ , et n' le plus petit entier tel que $R_{n'}(z)$ soit égal à l'un des nombres $(a, a_1, \dots, a_{h-1})$; n' n'est pas borné, sinon les antécédents de a considérés ici seraient en nombre fini; on aura donc pour des valeurs de n' infiniment grandes et des points z infiniment voisins de ξ : $R_{n'-1}(z) = a'$, a' étant un antécédent de a distinct de $(a, a_1, \dots, a_{h-1})$; a' n'est

(1) M. Julia a énoncé ce fait sans démonstration (*Comptes rendus*, t. 168, p. 147).

donc pas un point périodique et ξ , limite d'antécédents de a' , appartient à $\mathcal{A}$. Il s'ensuit que les points limites d'antécédents de a appartiennent à $\mathcal{A}$, en négligeant a lui-même et ses antécédents qui peuvent être considérés comme points limites d'antécédents de a lorsque l'on convient de classer dans l'ensemble dérivé d'un ensemble dénombrable les points où sont confondus une infinité de points de ce dernier ensemble. Il va sans dire que si a est un point exceptionnel, l'ensemble dérivé des antécédents de a se réduit à a lui-même ou à un couple de deux points dont l'un est a .

Si ξ appartient à un domaine singulier et si a est limite de conséquents de ξ et n'appartient à $\mathcal{A}$, réciproquement ξ est limite d'antécédents de a . En effet, il existe alors une suite de fonctions $R_{x_n}(z)$ qui dans un domaine contenant ξ convergent uniformément vers la fonction $f(z)$ non constante qui prend la valeur a pour $z = \xi$; les fonctions $R_{x_n}(z)$ prennent toutes la valeur a pour x_n suffisamment grand dans un cercle de centre ξ et de rayon arbitraire ε , c'est-à-dire que ξ est limite d'antécédents de a ; a appartient comme on sait à un domaine singulier invariant par une puissance de la substitution donnée.

Donnons-nous *a priori* un point a dans ce dernier domaine; nous avons vu au paragraphe précédent que a est limite de ses propres antécédents, c'est-à-dire qu'il existe une suite de fonctions $R_n(z)$, uniformes, comme nous le savons, dans le domaine considéré et ayant une fonction limite égale à z .

En résumé, l'ensemble dérivé des antécédents d'un point coïncide avec l'ensemble $\mathcal{A}$ sauf dans le cas où a est un point périodique attractif, ou un point appartenant à un domaine singulier invariant par une puissance de la substitution donnée.

30. De même que la recherche de l'ensemble dérivé des conséquents d'un point est liée à celle des fonctions limites des fonctions itérées $R_n(z)$, la recherche des points limites des antécédents d'un point est liée à celle des fonctions limites des inverses $R_{-n}(z)$ de ces itérées; ces dernières fonctions sont algébriques et multiformes; mais il peut y avoir des domaines où certaines branches de ces fonctions sont uniformes et, en leur appliquant les théorèmes qui concernent les suites des fonctions

holomorphes ou méromorphes dans un domaine, on parvient à des résultats nouveaux et importants.

Nous allons montrer tout d'abord qu'une suite infinie quelconque de branches des fonctions inverses des $R_n(z)$ forme une suite normale dans tout domaine où ces branches de fonctions sont uniformes. Soient D le domaine et $R_{-\lambda_p}(z)$ les fonctions considérées. Il existe au moins un point double α non exceptionnel, ayant par conséquent des antécédents α_{-1} et α_{-2} de rang 1 et 2, distincts entre eux et distincts de α . Soit α_{-i} l'un de ces trois points; on a $R_n(\alpha_{-i}) = \alpha$ pour $n > 2$. Donc si D ne contient pas α , les $R_{-\lambda_p}(z)$ ne prennent aucune des valeurs α , α_{-1} , α_{-2} , car, si l'on avait $R_{-\lambda_p}(z) = \alpha_i$, on aurait pour $\lambda_p > 2$: $R_{\lambda_p}(\alpha_{-i}) = z = \alpha$, ce qui est impossible.

Si D contient α , il existe soit un point double autre que α et non exceptionnel, soit un point périodique d'ordre 2 non exceptionnel. Dans le premier cas, si D ne contient pas le point double α' , on raisonne comme plus haut. Dans le second cas, on considère le couple périodique (α, α_1) et un antécédent α_{-1} de α autre que α et α_1 . On verra de même que $R_{-\lambda_p}(z)$ ne prend pas les valeurs $(\alpha, \alpha_1, \alpha_{-1})$ au moins dès que $\lambda_p > 3$ dans tout domaine qui ne contient ni α ni α_1 .

Donc si l'on marque les points doubles et périodiques d'ordre 2 autres que les points exceptionnels, et si l'on divise D en un nombre fini de régions empiétant les unes sur les autres et ne contenant chacune qu'un de ces points, dans chacune de ces régions il y a au moins trois valeurs fixes que les $R_{-\lambda_p}(z)$ ne prennent jamais. Les $R_{-\lambda_p}(z)$ forment donc une suite normale dans chacun des domaines partiels et aussi dans le domaine total.

En particulier, si D est simplement connexe et ne renferme aucun point critique ni aucun conséquent de points critiques de $R_{-1}(z)$, toutes les fonctions $R_{-n}(z)$ forment une famille normale dans D .

Appelons E_c l'ensemble des conséquents des points critiques de $R_{-1}(z)$, E'_c l'ensemble dérivé de E_c dans lequel on comprend les points de E_c où se trouvent confondus une infinité de conséquents de points critiques, c'est-à-dire les points doubles ou périodiques dont l'un des antécédents est un point critique. Nous allons montrer que tout point α qui est limite de conséquents d'un

domaine du plan appartient à E'_c . a est donc une fonction limite constante des fonctions $R_{\lambda_p}(z)$ quand z est dans le domaine D . Supposons d'abord que a n'appartienne ni à E_c ni à E'_c ; les fonctions $R_{\lambda_p}(z)$ sont toutes uniformes dans un cercle γ de centre a et de rayon r qui contient les domaines conséquents D_{λ_p} à partir d'un certain rang. Considérons en particulier la fonction $R_{-\lambda_p}(z)$ inverse de $R_{\lambda_p}(z)$ et prenant la valeur ξ (ξ intérieur à D) au point ξ_{λ_p} (intérieur à γ , au moins pour $p > p_0$). Si ξ' est intérieur à D et distinct de ξ , z décrivant le chemin $\xi\xi'$ intérieur à D , $R_{\lambda_p}(z)$ décrit le chemin $\xi_{\lambda_p}\xi'_{\lambda_p}$ intérieur à γ ; réciproquement, si z décrit ce dernier chemin dans γ , $R_{-\lambda_p}(z)$ décrit dans D le chemin $\xi\xi'$. Les fonctions $R_{-\lambda_p}(z)$ ainsi définies forment une famille normale dans γ ; on en peut donc extraire une nouvelle suite qui converge uniformément dans γ vers une fonction limite méromorphe en ξ ; soit $\Phi(z)$ cette fonction limite des $R_{-\mu_p}(z)$. Les $R_{-\mu_p}(z)$ prenant la valeur ξ en des points ξ_{μ_p} qui tendent vers a , on a par un raisonnement bien connu

$$\Phi(a) = \xi.$$

Mais on a de même $\Phi(a) = \xi' \neq \xi$. On conclut de cette incompatibilité que a appartient à E_c ou à E'_c . Si a appartient à E_c sans appartenir à E'_c , tous les antécédents de a à partir d'un certain rang h n'appartiennent à aucun de ces deux ensembles. Les domaines D_{λ_p} ayant pour point limite a , les domaines $D_{\lambda_{p-h}}$ seront tous pour $p > p_0$ intérieurs à l'un des cercles en nombre fini ayant pour centres les points a_{-h} et pour rayon ε arbitrairement petit. L'un au moins des points a_{-h} , soit a' , est donc limite de domaines conséquents de D . On est ramené au premier cas.

En particulier, si a est un point périodique attractif, ce point est limite de conséquents de points critiques; on en conclut qu'il y a au moins un point critique de $R_{-1}(z)$ dans le domaine total d'attraction des points du cycle auquel appartient a . On peut même préciser davantage. Considérons d'abord un point double attractif de la substitution $\{z|R(z)\}$ et les branches des fonctions inverses des $R_n(z)$ prenant la valeur a pour $z = a$; ce sont les fonctions ainsi définies que nous désignerons par $R_{-n}(z)$. Les fonctions $R_{-n}(z)$ étant supposées uniformes dans un cercle γ de centre a ne peuvent pas y former une suite uniformément conver-

gente; cela résulte du raisonnement de l'alinéa précédent ou encore de ce que ces fonctions prennent toutes la valeur a pour $z = a$, tandis que leurs dérivées premières ont pour valeurs en ce point les quantités $\frac{1}{s^n} (|s| = |R'(a)| > 1)$ qui tendent vers l'infini. Elles ont donc des points critiques dans γ à partir d'un certain rang. Mais les points critiques de $R_{-n}(z)$ dans γ sont les conséquents des points critiques de $R_{-1}(z)$ situés dans le domaine *immédiat* du point a . Cela résulte de ce qui a été dit au paragraphe 6; en raison de l'importance de ce fait, expliquons-le de nouveau d'une manière un peu différente. Supposons que $R_{-(n-1)}(z)$ n'ait pas de point critique dans γ , mais que $R_{-n}(z)$ en ait au moins un : soit c_{n-1} , z décrivant le segment ac_{n-1} , $R_{-n}(z)$ décrit le chemin $\alpha\xi$ intérieur à D , domaine immédiat de a ; on peut supposer que D ne contient pas le point à l'infini (on peut faire en sorte par une transformation homographique préalable que le point à l'infini appartienne à $\mathcal{F}$). c_{n-1} étant point critique de la fonction, inverse de $R_n(z)$, et qui prend en c_{n-1} la valeur ξ , ξ est racine multiple de l'équation $R_n(z) = c_{n-1}$, et comme ξ a une valeur finie on a $R'_n(\xi) = 0 = R'_{n-1}[R(\xi)]R'(\xi)$. On a donc $R'(\xi) = 0$, ou $R'_{n-1}(\xi) = 0$ puisque aucun de ces deux nombres n'est infini.

Supposons que le second facteur soit nul. Comme

$$R_{n-1}(\xi_1) = R_n(\xi) = c_{n-1},$$

cela veut dire que l'équation $R_{n-1}(z) = c_{n-1}$ admet ξ_1 comme racine multiple; en outre le chemin $a\xi_1$, intérieur à D et conséquent immédiat du chemin $a\xi$, a lui-même comme conséquent de rang $n-1$ le segment ac_{n-1} . Donc ξ_1 est la valeur que prend en c_{n-1} la fonction $R_{-(n-1)}(z)$, et comme $R'_{n-1}(\xi_1)$ est nul, c_{n-1} est un point critique de $R_{-(n-1)}(z)$. Comme nous avons admis que $R_{-n}(z)$ est la première de ces fonctions inverses ayant un point critique dans γ , c'est donc le facteur $R'(\xi)$ qui est nul; le point $c = R(\xi)$ est donc un point critique de $R_{-1}(z)$; ce point est intérieur à D et $c_{n-1} = R_{n-1}(c)$ est son conséquent de rang $n-1$.

Supposons maintenant que a soit un point périodique d'ordre h , donc un point double de la substitution $|z| R_h(z)|$. Dans le domaine immédiat du point a on a un point racine ξ de $R'_h(z) = 0$. Par suite,

$$R'_h(\xi) = R'(\xi) R'(\xi_1) \dots R'(\xi_{h-1}) = 0.$$

L'un des facteurs du produit est nul puisque aucun n'est infini. Les points $\xi, \xi_1, \dots, \xi_{h-1}$ appartenant respectivement aux domaines immédiats de $a, a_1, \dots, a_{h-1}$, l'un de ces domaines D_{i-1} , renferme un point racine de $R'(z) = 0$ et par suite D_i renferme un point critique de la branche de $R_{-1}(z)$ qui prend en a_i la valeur a_{i-1} .

On voit par là que le nombre des cycles de multiplicateur plus petit que 1 en module est essentiellement limité et au plus égal au nombre des points critiques de la fonction $R_{-1}(z)$.

Nous allons démontrer que la même limitation s'étend aux points périodiques de multiplicateur égal à une racine de l'unité. Considérons d'abord un point double a de multiplicateur égal à $+1$. Si

$$R(z) = z - k(z - a)^{q+1} + \dots,$$

nous avons établi l'existence dans un cercle de centre a d'un certain nombre de domaines élémentaires de convergence constituant une sorte d'étoile à q -branches. Ces domaines élémentaires contiennent les conséquents (à partir d'un certain rang) de tous les points du plan autour desquels les $R_n(z)$ forment une suite convergente ayant a pour limite unique. Les points appartenant à deux domaines élémentaires distincts n'ont jamais les mêmes conséquents ni les mêmes antécédents. Un domaine élémentaire étant choisi, l'ensemble des antécédents de ses points forme des domaines en général en nombre infini dont l'un contient le domaine élémentaire initial et constitue l'un des domaines *immédiats* du point a . Il y a q domaines immédiats entièrement distincts qui, avec leurs antécédents, constituent le domaine total de convergence vers a . Tout se passe comme si l'on avait q points doubles réunis en a ; ces points sont confondus en un seul, mais les domaines correspondants sont distincts.

Ceci posé, je vais démontrer que chacun des q domaines immédiats contient au moins un point critique de la branche de fonction $R_{-1}(z)$ qui prend la valeur a pour $z = a$, et prolongée suivant des chemins intérieurs à ce domaine. Rappelons-nous ce qui a été dit au sujet des domaines de convergence élémentaires; les domaines relatifs aux conséquents d'un point ont des parties communes avec les domaines de convergence uniforme relatifs aux antécédents. Il est possible de trouver un secteur abc de sommet a

et d'angle au sommet θ compris entre $\frac{\pi}{q}$ et $\frac{2\pi}{q}$ tel que les $R_n(z)$ convergent uniformément vers a dans tout domaine fermé intérieur à ce secteur, pourvu que a ne soit pas sur la frontière de ce domaine; en outre, sur les côtes ab, ac , les $R_{-n}(z)$ tendent uniformément vers a (extrémités comprises). Enfin, il existe des domaines intérieurs à abc où $R_{-n}(z)$ tend uniformément vers a . Appelons S ce secteur abc ; les conséquents de tout point de S tendent vers a et sont distribués sur une courbe tangente à la bissectrice de l'angle au sommet. Ceci rappelé, les fonctions $R_{-n}(z)$, ou plus exactement les branches de ces fonctions qui prennent la valeur a au point a , ne peuvent pas converger uniformément vers a dans le domaine fermé S , si elles y sont uniformes; car on peut trouver, quel que soit n , un point z intérieur à S et voisin de a qui est le conséquent de rang n d'un point arbitraire ξ de S , en sorte qu'on ait $R_{-n}(z) = \xi$; la branche de fonction $R_{-n}(z)$ qui figure ici étant bien celle qui prend la valeur a au point a , prolongée sans sortir de S au moins si ξ est convenablement choisi; car il y a des parties de S ayant un sommet en a qui comprennent les conséquents de tous leurs points.

Supposons que les $R_{-n}(z)$ n'aient pas de points critiques dans S ; de toute suite des $R_{-n}(z)$ on en peut déduire une autre qui converge uniformément dans tout domaine fermé S' intérieur à S et n'ayant pas le point a sur sa frontière; en effet, les $R_{-n}(z)$ forment une suite normale dans le domaine simplement connexe S où elles sont uniformes, et l'on peut toujours remplacer S par un domaine de même nature qui lui soit intérieur, sauf en a , qui reste toujours point frontière, en sorte que la convergence uniforme a lieu sur le contour de S d'où l'on a enlevé un arc τ contenant a . Mais S' peut contenir des régions où les $R_{-n}(z)$ convergent uniformément vers a , car il y a de telles régions dans S . Donc les $R_{-n}(z)$ convergent uniformément vers a dans tout domaine tel que S' . Mais les $R_{-n}(z)$ convergent aussi uniformément vers a sur l'arc τ (§ 10, 11). Il s'ensuit que les $R_{-n}(z)$ convergent uniformément dans tout le domaine fermé S vers la constante a , car les fonctions $R_{-n}(z) - a$ peuvent être supposées holomorphes dans S ; il suffit, pour qu'elles n'y possèdent pas de pôles, que le point à l'infini fasse partie de $\tilde{\mathcal{A}}$, hypothèse sans importance; elles

atteignent alors leurs valeurs de module maximum sur le contour de S , et ces maxima tendent vers zéro aussi bien sur l'arc σ , comme nous venons de le rappeler, que sur l'arc complémentaire qui est frontière d'un domaine S' . Nous arrivons donc à une contradiction puisque nous avons démontré que les $R_{-n}(z)$ ne convergent pas uniformément vers a dans le domaine fermé S . Les $R_{-n}(z)$ ont donc des points critiques dans S . Il s'ensuit, tout comme dans le cas d'un point double attractif, que la fonction $R_{-1}(z)$ égale à a pour $z = a$ et prolongée sans sortir du domaine immédiat D qui contient S y possède au moins un point critique. Les conséquents de ces points critiques sont ceux des fonctions $R_{-n}(z)$, restreintes au domaine immédiat D ; ils tendent vers le point a et sont distribués sur des courbes invariantes tangentes en a à la bissectrice du secteur S .

Supposons maintenant que le multiplicateur s du point double a soit une racine primitive de l'équation $s^h = 1$, h entier > 1 . Pour la substitution $[z | R_h(z)]$, le point a est un point double de multiplicateur égal à $+1$ et le nombre q de tout à l'heure est un multiple de h : $q = lh$, donnant lieu à lh domaines immédiats ayant a pour point frontière commun, et formant l cycles de h domaines, les domaines d'un même cycle étant permutés circulairement par les puissances de la substitution $[z | R(z)]$. Dans chacun des domaines appartenant à un même cycle se trouvent des points critiques de la fonction $R_{-h}(z)$, restreinte à ce domaine; ces points sont les conséquents des points critiques de la fonction $R_{-1}(z)$ dans les divers domaines de ce cycle; donc, dans l'un au moins de ces domaines D_i , il existe au moins un point critique de la fonction $R_{-1}(z)$ égale à a pour $z = a$ et prolongée à l'intérieur du domaine D_i de manière que ses valeurs appartiennent à D_{i-1} . Chacun des l cycles analogues donne lieu ainsi à au moins un point critique de $R_{-1}(z)$ situé dans l'un des domaines qui le composent. Il y a donc toujours au moins un point critique dans l'ensemble des domaines immédiats assemblés autour de a et dans lesquels $R_n(z)$ tend vers a .

Si a est un point périodique dont le multiplicateur est toujours de la même forme, il y a une double périodicité ainsi qu'il a été expliqué au paragraphe 14; l'ensemble des domaines immédiats assemblés autour des divers points du cycle et se répartissant eux-

pour lesquelles l'entier p_i correspondant est divisible par 2^q , puis celles pour lesquelles cet entier est divisible par 2^{q-1} , ainsi de suite, et enfin celles pour lesquelles p_i est un nombre impair. Donnant à Δt une valeur infiniment petite arbitraire, j'obtiens des déplacements, les uns intérieurs, les autres extérieurs à la courbe, aucun d'eux n'étant tangent à la courbe si l'on évite de donner à l'argument de Δt certaines valeurs en nombre fini. Si ces déplacements ne satisfont pas à la condition exigée, multiplions Δt par $e^{i\varphi}$, en prenant

$$\varphi = \pi \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_q}{2^q} \right),$$

les a_q étant égaux à 0 ou à 1.

Pour les fonctions de la première catégorie, l'argument du déplacement se trouve augmenté de $2^q l \varphi$, l étant impair, et ce nombre est congru à 0 ou à $\pi \pmod{2\pi}$, suivant que a_q est égal à 0 ou à 1. On peut donc choisir a_q de manière que la moitié au moins des déplacements soient dirigés vers l'intérieur.

a_q étant ainsi choisi, considérons les fonctions de la seconde catégorie, s'il y en a, c'est-à-dire celles pour lesquelles l'entier p est divisible par 2^{q-1} . Pour celles-là, l'argument du déplacement est augmenté de

$$2^{q-1} l \varphi \equiv a_{q-1} \pi + \frac{a_q l \pi}{2} \pmod{2\pi},$$

l étant toujours un entier impair. En donnant à a_{q-1} l'une des valeurs 0 ou 1, on a donc deux déplacements de sens opposé. On choisira a_{q-1} de manière que la moitié au moins des déplacements soient intérieurs à la courbe. On continuera ainsi de proche en proche et l'on déterminera par conséquent les entiers a_i de manière que l'accroissement $e^{i\varphi} \Delta t$ de la variable donne des accroissements des fonctions φ qui satisfont à la condition demandée. Si l'on obtenait des déplacements tangentiels pour certains points, il suffirait de modifier infiniment peu l'argument de Δt pour que la circonstance ne se présente plus.

Ce lemme étant établi, considérons un point périodique z d'ordre h , dont le multiplicateur soit égal à 1 en module, avec un argument incommensurable à 2π , ou même simplement différent de zéro. Ce point z est une racine de l'équation $R_h(z) = z$, et

l'on a

$$s = R'_h(\alpha), \quad |s| = 1.$$

On suppose tous les points tels que z à distance finie, comme il est permis. Introduisons dans $R(z)$ un paramètre variable complexe t tel que

$$R(z, t_0) = R(z),$$

$R(z, t)$ étant rationnelle en z et t et toujours de degré d par rapport à z . Considérons la racine de l'équation algébrique

$$F(z, t) = R_h(z, t) - z = 0,$$

qui prend la valeur α pour $t = t_0$ et qui est holomorphe puisque

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{t=t_0} = s - 1 \neq 0.$$

A cette racine $\alpha(t)$ correspond un cycle d'ordre h

$$\alpha(t), \quad R[\alpha(t), t], \dots, R_{h-1}[\alpha(t), t]$$

dont le multiplicateur s'obtient en remplaçant z par $\alpha(t)$ dans l'expression $\frac{\partial R_h(z, t)}{\partial z}$. Ce multiplicateur $s(t)$ est donc lui-même une fonction holomorphe pour $t = t_0$ et prenant en ce point la valeur s située sur la circonférence de centre 0 et de rayon 1. Si l'on a N cycles analogues pour la substitution $[z|R(z)]$, on obtient ainsi, après l'introduction du paramètre t , N cycles dont les multiplicateurs sont des fonctions holomorphes de t pour $t = t_0$, et qui restent distincts tant que t varie suffisamment peu. Les valeurs initiales des N fonctions $s(t)$ étant situées sur la circonférence $|s| = 1$, on peut donner à l'accroissement $t - t_0$ une valeur telle que $\frac{N}{2}$ au moins de ces fonctions prennent des valeurs intérieures à la circonférence, c'est-à-dire inférieures en module à l'unité (*).

(*) Pour que la conclusion soit exacte, il faut qu'aucune de ces fonctions $s(t)$ ne soit une constante. Or, on peut supposer que les coefficients de $R(z, t)$ sont des fonctions linéaires de t qui, pour $t = 0$, sont ceux de $R(z)$, et, pour $t = 1$, ceux par exemple d'une substitution à cercle fondamental de première espèce, qui n'a pas de points périodiques tels que $|s| = 1$. Les $s(t)$ considérées ne restent donc pas constantes.

La substitution $[z | R(z, t)]$ a donc $\frac{N}{2}$ cycles attractifs, ce qui n'est possible que si $\frac{N}{2} \leq 2(d-1)$, $N \leq 4(d-1)$. Le nombre des cycles en question est donc limité.

Il s'ensuit que tous les cycles de points à partir d'un certain ordre sont répulsifs et appartiennent par conséquent à l'ensemble $\tilde{\mathcal{F}}$ sur lequel nous savons qu'ils sont partout denses. $\tilde{\mathcal{F}}$ peut donc être défini comme l'ensemble dérivé des points périodiques de multiplicateur > 1 en module. On en déduit diverses conséquences relatives aux valeurs des fonctions $R'(z)$, $R'_n(z)$ sur $\tilde{\mathcal{F}}$, notamment que si φ désigne l'ensemble des points de $\tilde{\mathcal{F}}$ intérieurs à un cercle ayant pour centre un point quelconque de $\tilde{\mathcal{F}}$, aucune suite infinie extraite des $R'_n(z)$ n'est bornée sur φ .

31. Nous avons vu que les fonctions $R_n(z)$ forment une famille normale dans tout domaine où elles sont holomorphes. Nous allons rechercher quelles sont les fonctions limites des suites convergentes formées avec ces fonctions.

Démontrons d'abord ceci : si E est un ensemble fermé dont aucun point n'est limite de conséquents d'un point extérieur à $\tilde{\mathcal{F}}$, les antécédents de rang n d'un point de E tendent uniformément vers $\tilde{\mathcal{F}}$ pour n infini. S'il en était autrement, il existerait une suite d'entiers $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ indéfiniment croissants, une suite de points $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}, \dots$ de E , et une suite de points $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(n)}, \dots$ dont la distance à $\tilde{\mathcal{F}}$ serait supérieure à r , tels que

$$R_{\lambda_n}(z^{(n)}) = \xi^{(n)}.$$

Les points $z^{(n)}$ ont au moins un point limite $z^{(0)}$ extérieur à $\tilde{\mathcal{F}}$. On peut supposer qu'on n'a conservé, dans les égalités précédentes, que celles pour lesquelles $z^{(n)}$ tend régulièrement vers $z^{(0)}$. Les $R_{\lambda_n}(z)$ formant une suite normale dans un cercle de centre $z^{(0)}$ et de rayon r , on en peut extraire une suite qui converge uniformément dans ce cercle vers une fonction limite $\Phi(z)$ méromorphe en $z^{(0)}$. On peut conserver les mêmes notations pour cette nouvelle suite. On voit alors aisément que les $\xi^{(n)} = R_{\lambda_n}(z^{(n)})$ tendent vers $\Phi(z^{(0)}) = \xi^{(0)}$ et que $\xi^{(0)}$ est limite des $R_{\lambda_n}(z^{(0)})$, c'est-à-dire limite de conséquents d'un point extérieur à $\tilde{\mathcal{F}}$; $\xi^{(0)}$ appartenant à E , ceci est contraire à l'hypothèse.

J'ajoute que cette condition suffisante est également nécessaire pour que les antécédents des points de E tendent uniformément vers $\tilde{f}$.

Considérons alors une suite quelconque de fonctions $R_{-j,n}(z)$ uniforme dans un domaine D et formant, par conséquent, une suite normale dans D . Supposons, en outre, que $\tilde{f}$ ne comprenne pas tout le plan; cet ensemble est alors sans points intérieurs. Les points limites de conséquents d'un point sont alors de trois sortes: 1° les points périodiques attractifs, qui sont en nombre fini; 2° certains points de $\tilde{f}$; 3° les points intérieurs à certains domaines hypothétiques que nous avons appelés *singuliers* et, de plus, invariants par une puissance de la substitution donnée. Si D n'est pas intérieur à un domaine de cette nature, il contient donc d'autres domaines pour lesquels les antécédents de rang n d'un point quelconque tendent vers $\tilde{f}$ pour n infini. Dans ces derniers domaines, les valeurs des fonctions limites des $R_{-j,n}(z)$ tendent uniformément vers un ensemble sans points intérieurs: ces fonctions limites sont donc des constantes (points de $\tilde{f}$). Il en est évidemment de même dans tout le domaine D .

Il est facile de déduire de là une condition suffisante pour qu'il n'y ait pas de domaines singuliers: il suffit que l'ensemble E_p dérivé des conséquents des points critiques ne morcelle pas le plan.

Soient $\odot$ un domaine singulier invariant par une puissance de la substitution donnée, z' un point intérieur à $\odot$; il y'a également dans le plan des domaines qui ne renferment aucun point limite de conséquents, notamment parmi les domaines antécédents de $\odot$; soit z'' un point intérieur à un tel domaine; si E_p ne morcelle pas le plan, on peut joindre z' z'' par une ligne polygonale ne contenant aucun point de E_p ni de E_c . Cette ligne est elle-même intérieure à un domaine où toutes les fonctions $R_{-n}(z)$ sont uniformes et forment une famille normale. Or, autour de z' , certaines suites infinies de fonctions $R_{-n}(z)$ ont des fonctions limites non constantes, par exemple égales à z , tandis qu'autour de z'' toutes les fonctions limites sont constantes. Il est donc impossible d'admettre l'existence de domaines tels que C .

La fonction $R(z)$ étant donnée, pour trouver les constantes limites et obtenir des précisions sur la division correspondante du plan en régions, on devra d'abord chercher les points limites des

conséquents des points critiques de $R_{-1}(z)$. Si ces points sont en nombre fini, ce sont des points périodiques, parmi lesquels il peut se trouver des points attractifs, des points indifférents et des points répulsifs. Ces derniers ne peuvent pas être limites de conséquents de domaines, sinon il y aurait (§ 13) une infinité de points limites de cette espèce et, par conséquent, aussi une infinité de points de E'_c . S'il y a des points périodiques indifférents parmi les points de E'_c , il y a deux cas à distinguer, suivant que le multiplicateur d'un de ces points a un argument commensurable ou incommensurable à 2π . Dans le premier cas, ce point est limite de conséquents de domaines; dans le second cas, la chose est douteuse. Enfin, les points attractifs sont toujours limites de conséquents de domaines. Ainsi, si E'_c ne contient qu'un nombre fini de points, il n'y a pas d'autres fonctions limites que des constantes en nombre fini ayant pour affixes des points doubles ou périodiques attractifs ou indifférents.

Pour étudier la configuration des domaines correspondants, on considérera d'abord les domaines élémentaires de convergence relatifs à ces points, que nous avons étudiés au Chapitre II. On formera ensuite les domaines antécédents de ces domaines élémentaires et les domaines limites de ces domaines antécédents. On obtiendra ainsi des configurations dont la complexité, du point de vue de l'*analysis situs*, dépendra, comme on a pu s'en rendre compte dans les exemples traités au Chapitre III, de la position des points critiques de $R_{-1}(z)$. Nous verrons dans le Chapitre suivant qu'on peut obtenir ainsi, relativement à la division du plan en régions de convergence correspondant aux divers points limites, quelques propositions générales, mais qu'on devra la plupart du temps, pour préciser quelque peu la structure des domaines étudiés, examiner chaque cas particulier, en tenant compte de toutes les circonstances qui permettent de mettre en évidence quelque propriété des domaines de convergence concernant la connexion, la nature des courbes ou ensembles frontières, les symétries qui peuvent se présenter, etc. On doit d'ailleurs remarquer que le problème qui consiste à trouver l'ensemble des points limites des conséquents des points critiques n'est pas susceptible d'une solution générale. Si même on sait d'avance que ces points sont en nombre fini et qu'on se propose alors simplement de trouver les

points attractifs (ou indifférents), on ne peut pas fixer une limite supérieure du nombre d'équations algébriques qu'on aura à résoudre pour y parvenir puisque, si le nombre des cycles attractifs est limité en fonction du degré de $R(z)$, en revanche l'ordre de ces cycles peut être aussi grand qu'on le veut pour un degré donné. Enfin, s'il y a une infinité de points de E'_c , ou s'il y a des points indifférents dont le multiplicateur n'est pas commensurable à 2π , l'étude des domaines de convergence est à peu près complètement à faire et présente vraisemblablement de très grandes difficultés.

Remarquons enfin que si, en tous les points de l'ensemble $\mathcal{F}$ (qui est alors borné), on a $|R'(z)| > K > 1$, aucun point de $\mathcal{F}$ n'appartient à E_c ni à E'_c et que les fonctions limites sont des constantes qui correspondent toutes à des points périodiques attractifs. En effet, on aura, pour toutes les branches de $R_{-1}(z)$ (qui n'a pas de points critiques sur $\mathcal{F}$) :

$$R'_{-1}(z) < \frac{1}{K} < 1$$

en tout point de $\mathcal{F}$, et par suite aussi

$$R'_{-1}(z) < K' < 1$$

dans tous les cercles de rayon $r \neq 0$ ayant pour centre un point de $\mathcal{F}$, K' étant compris entre 1 et $\frac{1}{K}$. Donc les points dont la distance à $\mathcal{F}$ est au plus égale à r ont pour antécédents immédiats des points dont la distance à $\mathcal{F}$ est au plus égale à $K'r$, et pour antécédents de rang n des points dont la distance à $\mathcal{F}$ est au plus égale à $K'^n r$, quantité qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On en conclut que les antécédents de rang n des points d'un cercle de rayon r ayant son centre sur $\mathcal{F}$ tendent uniformément vers $\mathcal{F}$; par suite, aucun point de $\mathcal{F}$ n'est limite de conséquents d'un point extérieur à $\mathcal{F}$, et d'autre part il n'y a pas de domaines singuliers. Les points limites de conséquents des points extérieurs à $\mathcal{F}$ sont tous des points doubles ou périodiques attractifs.

Réciproquement, si aucun point de $\mathcal{F}$ n'appartient à E_c ni à E'_c , les fonctions $R_{-n}(z)$ sont toutes uniformes dans les cercles qui ont pour centre un point de $\mathcal{F}$ et pour rayon r la plus courte distance de $\mathcal{F}$ à $E_c + E'_c$. $\mathcal{F}$ étant supposé borné est couvert par un

nombre fini N de ces cercles où les $R_{-n}(z)$ forment une famille normale, dont toutes les fonctions limites sont des constantes appartenant à l'ensemble borné $\mathcal{F}$; il s'ensuit aisément que dans ces N cercles toutes les fonctions $R'_{-n}(z)$ tendent uniformément vers zéro. On aura donc pour $n \geq h$:

$$R'_{-n}(z) < K' < 1$$

dans tous ces cercles et par suite en tout point de $\mathcal{F}$. On en conclut que

$$R'_n(z) > K > 1$$

en tout point de $\mathcal{F}$, pour $n \geq h$. Ainsi donc si $\mathcal{F}$ est borné et ne contient aucun point limite de conséquents de points critiques de $R_{-1}(z)$, la condition $R'(z) > K > 1$ n'est pas nécessairement remplie en tout point de $\mathcal{F}$, mais elle le sera si l'on remplace R par R_h , h étant un entier convenablement choisi. On démontre facilement que les substitutions rationnelles qui possèdent ce caractère le conservent quand on fait varier suffisamment peu les coefficients de $R(z)$. Il est probable, mais je n'ai pas approfondi la question, que cette propriété appartient à toutes les substitutions générales, c'est-à-dire à celles dont les coefficients ne vérifient aucune relation particulière. Je signale, dans ce même ordre d'idées, l'intérêt qu'il y aurait à rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'ensemble $\mathcal{F}$ varie d'une manière continue, tant au point de vue de la position de ses points qu'au point de vue de la connexion des domaines dans lesquels il divise le plan, lorsqu'on fait varier les coefficients de $R(z)$. Il paraît bien et l'on peut le constater sur des exemples que la discontinuité a lieu pour les valeurs des coefficients, telles que $\mathcal{F}$ contienne des points de $E_c + E'_c$.

CHAPITRE V.

32. Nous étudierons dans ce Chapitre la structure des domaines de convergence correspondant aux points doubles (ou périodiques) attractifs ou indifférents, et nous montrerons sur des exemples quelles sont, relativement à la connexion de ces domaines, les principales circonstances qui peuvent se présenter.

Soit z un point double attractif; il existe un cercle c de centre σ

et de rayon r en tout point duquel on a

$$|R(z) - \alpha| \leq K |z - \alpha| \quad (0 < K < 1).$$

c renferme donc ses conséquents à son intérieur. Inversement si l'on désigne par c_{-n} l'ensemble des domaines fermés antécédents de rang n de c , c'est-à-dire le lieu des points tels que $|R_n(z) - \alpha| \leq r$, on a les inégalités topologiques

$$c < c_{-1} < c_{-2} \dots < c_{-n} < \dots$$

Désignons par $e^{(n)}$ le domaine faisant partie de c_{-n} qui est d'un seul tenant avec α ; on a également :

$$c = c < e^{(1)} < e^{(2)} < \dots < e^{(n)} < \dots$$

Je dis que D , domaine immédiat du point α , est l'ensemble limite de $e^{(n)}$, c'est-à-dire la somme des domaines $e^{(n)}$. En effet, il est évident que tout point de $e^{(n)}$ appartient à D . Réciproquement tout point de D appartient à $e^{(n)}$ pour une valeur de n suffisamment grande. Car si ξ appartient à D , on peut joindre $\alpha\xi$ par une ligne polygonale l dont tous les points appartiennent à D ; sur l , $R_n(z)$ tend uniformément vers α ; il existe donc un entier p pour lequel on a sur l

$$|R_p(z) - \alpha| < r,$$

c'est-à-dire que, l_p , $p^{\text{ième}}$ conséquente de l qui joint $\alpha\xi_p$ est complètement intérieure à c ; donc l est complètement intérieure à c_p et par suite à $e^{(p)}$ puisqu'elle a une extrémité en α .

Je vais montrer que si D n'est pas simplement connexe, il est d'ordre de connexion infini. Supposons que le domaine $e^{(h)}$ ne soit pas simplement connexe; il est donc limité par plusieurs courbes, antécédentes de rang h de la circonférence $|z - \alpha| = r$. Ces courbes sont sans points singuliers et sans points communs deux à deux pourvu que la circonférence γ de c ne contienne pas de conséquents de points critiques de $R_{-1}(z)$, ce qu'on peut supposer. On peut aussi admettre, si l'on fait la figure sur le plan, que $e^{(h)}$ renferme le point à l'infini; comme ce domaine est d'un seul tenant, les courbes simples qui le limitent sont deux à deux extérieures l'une à l'autre et de plus extérieures à la circonférence γ . Si l'on pose $R_h(z) = T(z)$, ce domaine $e^{(h)}$ devient le domaine $e^{(1)}$

relatif à la substitution $[z|T(z)]$. Nous pouvons appeler γ_{-1}^0 , $\gamma_{-1}^1, \dots, \gamma_{-1}^{2-1}$, les q courbes qui forment sa frontière et qui sont des transformées de γ par $T_{-1}(z)$; soient toujours D le domaine immédiat de z , f sa frontière qui est un ensemble parfait invariant contenu dans $\tilde{x}$. Chacune des q courbes γ_{-1} renferme à son intérieur des points de $\tilde{x}$ et par suite aussi de f . Car si ζ est un point de l'une de ces courbes, $\zeta_1 = T(\zeta)$ est sur γ . Faisons décrire à z un chemin simple partant de ζ_1 , restant à l'extérieur de c et aboutissant en un point de $\tilde{x}$; le point $T_{-1}(z)$ qui coïncide avec ζ quand z est en ζ_1 décrira un chemin qui sera tout d'abord extérieur à $e^{(1)}$ et par suite intérieur à la courbe γ_{-1} ; si ce chemin traversait γ_{-1}' , le chemin décrit par z traverserait γ , ce qui n'a pas lieu. Donc $T_{-1}(z)$ reste dans ces conditions extérieur à γ_{-1} , et comme z aboutit en un point de $\tilde{x}$ il en est de même de $T_{-1}(z)$; il y a donc des points de $\tilde{x}$ (et de f) à l'intérieur des q courbes γ_{-1} , ce qui prouve que D est d'ordre de connexion au moins égal à q . Je dis que $e^{(n)}$ sera de même limité par au moins q^n courbes extérieures les unes aux autres et contenant chacune des points de f . Il suffit de montrer que si le fait est exact pour $e^{(n)}$ il l'est pour $e^{(n+1)}$. Soit γ_{-n} l'une des courbes qui limitent $e^{(n)}$; tout point de γ_{-n} a son conséquent de rang n sur γ ; inversement, à un point de γ correspond une branche de la fonction $T_{-n}(z)$ qui prend en ce point une valeur située sur γ_{-n} , de manière que z recevant un déplacement infiniment petit intérieur ou extérieur à γ , $T_{-n}(z)$ éprouve un déplacement extérieur ou intérieur à γ_{-n} . Faisons décrire à z un chemin partant d'un point m de γ et aboutissant en un point p de la courbe γ_{-1}^0 en restant à l'extérieur du cercle et à l'intérieur du domaine $e^{(1)}$, sauf en son extrémité p ; $T_{-n}(z)$ décrit un chemin intérieur à γ_{-n} ; z décrivant ensuite la courbe γ_{-1}^0 dans le sens direct par exemple, $T_{-n}(z)$ décrit une courbe qui se ferme quand z a décrit un nombre entier de fois la courbe γ_{-1}^0 . On obtient ainsi une courbe intérieure à γ_{-n} ; c'est une courbe frontière du domaine $e^{(n+1)}$, car d'une part sa conséquente de rang $n+1$ coïncide avec γ , d'autre part elle est reliée à γ_{-n} , laquelle est intérieure à $e^{(n+1)}$ (en vertu de $e^{(n)} \leq e^{(n+1)}$) par une ligne continue qui appartient à $e^{(n+1)}$; on peut donc relier cette ligne $\gamma_{-(n+1)}$ au point z par un continu qui appartient à $e^{(n+1)}$. Le même procédé appliqué aux q courbes $\gamma_{-1}^0, \gamma_{-1}^1, \dots, \gamma_{-1}^{2-1}$ donne

ainsi q courbes $\gamma_{-(n+1)}$ intérieures à la même courbe γ_{-n} ; ces q courbes sont sans points communs et extérieures les unes aux autres; en effet, chacune d'elles est reliée à γ_{-n} par une ligne qui ne peut pas traverser les autres puisque son point de départ seul appartient à la frontière de $e^{(n+1)}$.

Enfin la courbe γ_{-1}^i renfermant des points de $\mathcal{F}$ à son intérieur, on peut tracer une ligne partant d'un point de cette courbe, restant à son intérieur et aboutissant en un point de $\mathcal{F}$; z décrivant cette ligne, le point antécédent $T_{-n}(z)$, qui part d'un point d'une courbe $\gamma_{-(n+1)}$ ainsi qu'il vient d'être expliqué, reste intérieur à cette dernière courbe et aboutit aussi en un point de $\mathcal{F}$. Il y a donc des points de $\mathcal{F}$ à l'intérieur de ces q courbes $\gamma_{-(n+1)}$. Comme d'autre part le nombre des courbes γ_{-n} , qui limitent $e^{(n)}$ est au moins q^n , on obtient ainsi au moins q^{n+1} courbes limitant $e^{(n+1)}$ et possédant les propriétés annoncées.

Il résulte de là que si $e^{(n)}$ n'est pas, quel que soit n , simplement connexe, le domaine immédiat D a un ordre de connexion au moins égal à 2^n ; il a donc un ordre de connexion infini, n étant aussi grand qu'on le veut. Si au contraire $e^{(n)}$ est toujours simplement connexe, il en est de même de D , puisque toute courbe fermée intérieure à D est intérieure à un certain $e^{(n)}$ et peut ainsi se réduire à un point par une déformation continue sans sortir de D .

Cherchons à préciser les conditions pour que D soit simplement connexe. Désignons par $\bar{R}_{-1}(z)$ la fonction inverse de $R(z)$ *restreinte* à D (§ 6). On peut toujours tracer une courbe fermée sans point double Γ dans D , séparant le plan en deux régions dont l'une est intérieure à D et contient le point z et les points critiques de $\bar{R}_{-1}(z)$ intérieurs à D . Si D est simplement connexe, toutes les valeurs de $\bar{R}_{-1}(z)$ se permutent circulairement sur Γ . La réciproque est vraie. En effet, considérons les courbes fermées simples sur lesquelles deux valeurs de $\bar{R}_{-1}(z)$ au moins se permutent; ces courbes sont en nombre fini, en regardant comme identiques deux courbes qui se ramènent l'une à l'autre par déformation continue sans traverser les points critiques. Considérons celles de ces courbes qui peuvent être tracées dans D ; à partir d'une certaine valeur de n , elles sont toutes intérieures au domaine $e^{(n)}$, défini précédemment. Toutes les branches de $\bar{R}_{-1}(z)$

se permutent alors entre elles dans $e^{(n)}$, et comme $e^{(n)}$ doit rester simplement connexe quel que soit n , les branches de fonction considérées se permutent circulairement sur le contour de $e^{(n)}$. Cela équivaut à la condition énoncée.

En particulier, si D renferme un seul point critique β de $R_{-1}(z)$, D est simplement connexe. En effet, partons du cercle c et soient toujours $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ..., $e^{(n)}$, ... les parties des domaines antécédents de c qui sont d'un seul tenant avec z ; soit $e^{(h)}$ le premier de ces domaines qui renferme un point critique de $\bar{R}_{-1}(z)$: $e^{(h)}$ existe d'après ce qu'on a vu au Chapitre IV; $e^{(h)}$ renferme donc β qui est critique non seulement pour $R_{-1}(z)$, mais plus particulièrement pour $\bar{R}_{-1}(z)$; $e^{(h)}$ est d'ailleurs simplement connexe puisque jusqu'au rang h inclus les domaines e , $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ... se déduisent chacun du précédent par une substitution uniforme. Traçons un lacet constitué par les deux bords d'une coupure qui joint β à un point du contour de $e^{(h)}$ en restant dans ce domaine, et par une circonférence infiniment petite décrite autour de β . On transforme ainsi $e^{(h)}$ en un domaine où la fonction $\bar{R}_{-1}(z)$ qui prend la valeur z en z est uniforme. Autour de β , $\bar{R}_{-1}(z)$ est développable suivant les puissances entières de $(z - \beta)^{\frac{1}{r}}$:

$$R_{-1}(z) = \beta_{-1} + a(z - \beta)^{\frac{1}{r}} + b(z - \beta)^{\frac{2}{r}} + \dots \quad (a \neq 0).$$

Aux r déterminations de $(z - \beta)^{\frac{1}{r}}$ ce développement fait correspondre r branches de la fonction $R_{-1}(z)$ qui se permutent autour de β où elles prennent la même valeur β_{-1} . Chacune d'elles donne du domaine *coupé* $e^{(h)}$ une image qui est un domaine simplement connexe; on a ainsi r domaines partiels simplement connexes assemblés autour de β_{-1} et juxtaposés suivant r lignes, images de la coupure, qui font entre elles des angles égaux à $\frac{2\pi}{r}$; cet assemblage constitue un domaine unique, simplement connexe, ayant pour frontière la courbe fermée unique décrite par $\bar{R}_{-1}(z)$ quand z décrit r fois de suite le contour de $e^{(h)}$. On en conclut que $e^{(h+1)}$ est simplement connexe; il en est de même pour $e^{(h+2)}$, $e^{(h+3)}$, ..., le même raisonnement s'appliquant de proche en proche.

Si en particulier toutes les déterminations de $R_{-1}(z)$ se permu-

tent circulairement sur le contour de $e^{(h)}$, le domaine total d'attraction du point z est à la fois d'un seul tenant et simplement connexe, le domaine immédiat n'ayant pas d'autre antécédent que lui-même.

Il résulte de ce qui a été dit au Chapitre IV que si le domaine du point double z n'est pas d'un seul tenant, il se compose d'une infinité de domaines distincts. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'un point du domaine immédiat D , par exemple le point z lui-même, ait des antécédents extérieurs à D . Remarquons que si z n'est pas point critique de $\bar{R}_{-1}(z)$, il a toujours des antécédents distincts de lui-même dans D , puisque la fonction $\bar{R}_{-1}(z)$, restreinte à D , y possède des déterminations multiples. Si $R(z)$ est un polynôme, le domaine du point à l'infini est toujours d'un seul tenant. Si

$$R(z) = \frac{z}{P(z)},$$

$P(z)$ étant un polynôme avec $|P(0)| > 1$, le point double attractif $z=0$ a un domaine d'un seul tenant, car le point $z=0$ n'a pour antécédents de rang 1 que lui-même et le point à l'infini; comme $z=0$ est racine simple de $R(z)=0$, il faut que le point à l'infini fasse partie du domaine immédiat D . On en conclut que tous les antécédents du point $z=0$ font partie du domaine immédiat qui se confond par conséquent avec le domaine total du point $z=0$.

S'il y a plusieurs points doubles, et si le domaine immédiat D de l'un d'entre eux z n'est pas simplement connexe, les domaines des autres points $\beta, \gamma, \dots$ ne sont pas d'un seul tenant, car si la courbe fermée simple C tracée dans D sépare deux points m et m' de la frontière de D , il y a des antécédents de β (ou d'un point infiniment voisin) aussi près qu'on le veut de chacun des points m et m' qui appartiennent à $\bar{x}$; il y a donc des points appartenant au domaine total du point β qui sont séparés C par; cette courbe n'appartenant pas au domaine de β , ce dernier domaine n'est pas d'un seul tenant, et se compose donc d'une infinité de parties distinctes.

Inversement, si le domaine du point double z est d'un seul tenant, les domaines des autres points attractifs qui peuvent exister sont formés de parties simplement connexes.

Remarquons enfin que, s'il y a plus de deux points attractifs,

l'un au plus de ces points possède un domaine d'un seul tenant; nous avons démontré en effet qu'il ne peut pas y avoir plus de deux domaines complètement invariants, et simplement connexes.

Toutes ces propositions générales subsistent, si, au lieu d'un point double attractif, on considère un point double pour lequel $s = +1$. Nous savons en effet que dans ce cas il existe des domaines de convergence élémentaires assemblés autour du point double; ces domaines limités par exemple par des courbes algébriques ont un point anguleux au point double; ils sont simplement connexes et contiennent leurs conséquents. Les raisonnements faits à propos des points doubles attractifs subsistent; les domaines élémentaires qui remplacent ici le cercle c ont un point frontière commun avec leurs conséquents à savoir le point double lui-même, mais on se rend compte aisément que cette circonstance ne modifie en rien les conclusions.

Enfin, ce qui a été dit au sujet des points doubles s'applique aux points périodiques qui sont des points doubles d'une puissance de la substitution donnée.

Résumons ces conclusions :

1° *Le domaine immédiat d'un point double (ou périodique) attractif est simplement connexe ou d'ordre de connexion infini.*

2° *Si le domaine d'un point double attractif est d'un seul tenant, les domaines des autres points attractifs qui peuvent exister sont formés de parties simplement connexes. Inversement si le domaine immédiat ou l'un des domaines partiels qui constituent le domaine total d'un point double n'est pas simplement connexe, les domaines des autres points attractifs sont formés d'une infinité de parties distinctes.*

3° *S'il y a plus de deux points doubles ou périodiques attractifs, l'un au plus de ces points peut avoir un domaine d'un seul tenant, les autres étant formés d'une infinité de domaines partiels distincts.*

4° *Dans les énoncés précédents, on peut comprendre parmi les points doubles attractifs ceux dont le multiplicateur est une racine de l'unité. Si l'étoile relative à ce point est une étoile à q branches, il équivaut à q points doubles distincts.*

33. Nous allons considérer maintenant la frontière f du domaine immédiat D d'un point double attractif α . f est un ensemble fermé et même parfait, car si f avait un point isolé, il en serait de même de $\mathcal{F}$ et nous savons que $\mathcal{F}$ est parfait. Je vais montrer que f est le dérivé de l'ensemble des antécédents d'un point quelconque de D obtenus au moyen des branches de fonctions $R_{-n}(z)$ restreintes à D . Il est clair que l'ensemble dérivé en question est contenu dans f , car les points limites d'antécédents d'un point a de D appartiennent à $\mathcal{F}$, si a est distinct du point double α ; comme les antécédents considérés ici appartiennent tous à D , leurs points limites appartiennent à D ou à sa frontière f , cette seconde hypothèse étant seule admissible puisque ces points limites sont contenus dans $\mathcal{F}$.

Je vais montrer que réciproquement tout point de f appartient à l'ensemble dérivé que nous venons de définir. Cela va résulter aisément de la considération des suites normales formées par les fonctions $\bar{R}_{-n}(z)$ restreintes à D . Considérons en effet un cercle c de centre α dont la circonférence ne renferme aucun point consécutif des points critiques de $\bar{R}_{-1}(z)$, et les parties $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}, \dots$ des domaines antécédents de c qui sont d'un seul tenant avec α . On voit aisément que tout point de f est limite de points appartenant aux courbes (ovales de Cassini) qui forment la frontière des domaines $e^{(n)}$. Or il existe une couronne circulaire (c, c') entourant le cercle c dans laquelle les diverses branches des fonctions $\bar{R}_{-n}(z)$ forment une famille normale, pourvu que ce domaine coronal ait été transformé en un domaine simplement connexe au moyen d'une coupure radiale joignant les circonférences de c et de c' , et de toute suite des fonctions $\bar{R}_{-n}(z)$, on en peut extraire une autre qui converge uniformément dans ce domaine, contour compris, vers une fonction limite qui est, comme nous l'avons vu, une constante. Il s'ensuit que tout point de f étant limite de points tels que

$$\bar{R}_{-\alpha_1}(\xi'), \quad \bar{R}_{-\alpha_2}(\xi''), \quad \dots, \quad \bar{R}_{-\alpha_n}(\xi^{(n)}), \quad \dots,$$

où $\xi', \xi'', \dots, \xi^{(n)}, \dots$ désignent des points de la circonférence de c , sera également limite de points tels que

$$\bar{R}_{-\beta_1}(\xi), \quad \bar{R}_{-\beta_2}(\xi), \quad \dots, \quad \bar{R}_{-\beta_n}(\xi), \quad \dots,$$

ξ étant un point fixe quelconque de la couronne (c, c') . On peut même supposer que ξ est un point quelconque de D , autre que α .

Voici d'autres propriétés de l'ensemble f :

1° Nous rappelons que f est invariant par la substitution $[z | R(z)]$.

2° f contient toujours au moins un point double de la substitution. En effet soient ξ un point de D distinct de α et des conséquents des points critiques de $R_{-1}(z)$ et ξ_{-1} un antécédent immédiat de ξ situé dans D , c'est-à-dire une valeur de $\bar{R}_{-1}(\xi)$. Il existe un domaine simplement connexe contenu dans D et contenant ξ et ξ_{-1} ; soit δ ce domaine dans lequel on a tracé une ligne simple polygonale l joignant ξ à ξ_{-1} . A la ligne l , la branche de fonction $\bar{R}_{-1}(z)$ qui prend en ξ la valeur ξ_{-1} fait correspondre la ligne l_{-1} allant de ξ_{-1} à ξ_{-2} , et au domaine δ le domaine simplement connexe δ_{-1} qui empiète sur δ puisque tous deux contiennent ξ_{-1} ; à δ_{-1} , la fonction $R_{-1}(z)$ (prolongée par cheminement continu sur $l+l_{-1}$) fait correspondre δ_{-2} qui empiète sur δ_{-1} et contient la ligne l_{-2} joignant ξ_{-2} à ξ_{-3} et ainsi de suite. Les domaines δ , δ_{-1} , ..., δ_{-n} , ... empiètent chacun sur le précédent et le suivant; ils tendent d'ailleurs vers certains points de f comme il résulte de l'alinéa précédent, les fonctions $\bar{R}_{-n}(z)$ formant dans S une famille normale à fonctions limites constantes. Si λ est un tel point, limite du domaine $\delta_{-\beta_p}$, le domaine $\delta_{-(\beta_p+1)}$, tend aussi vers λ puisque ces deux domaines empiètent l'un sur l'autre et ont des dimensions infiniment petite avec $\frac{1}{p}$; comme le second de ces domaines est un antécédent immédiat du premier, il s'ensuit que $R(\lambda) = \lambda$; λ est donc un point double. Les domaines δ_{-n} ont tous pour limite ce point λ , car si $\delta_{-\beta_p}$ tendant vers λ et $\delta_{-\beta_p+\gamma_p}$ vers λ' distinct de λ , le domaine

$$\delta_{-\beta_p} + \delta_{-(\beta_p+1)} + \dots + \delta_{-(\beta_p+\gamma_p)}$$

qui est d'un seul tenant, aurait une infinité continue de points limites, ce qui est impossible puisque les racines λ de $R(z) = z$ sont en nombre fini. Il y a donc un chemin

$$l + l_{-1} + l_{-2} + \dots$$

dans D qui part de ξ et aboutit au seul point frontière λ ; λ , qui est

un point double de la substitution, est en même temps un point accessible de D . λ est en général un point double répulsif; il peut se faire que λ soit un point double indifférent. S'il existe un seul point double répulsif, les autres points doubles étant tous attractifs, les domaines immédiats de ces derniers ont alors un point frontière commun.

3° On a toujours en certains points de f , quand le domaine D est borné, l'inégalité

$$|R'(z)| > \sqrt{\nu},$$

ν étant le nombre de branches de $\bar{R}_{-1}(z)$ qui se permutent dans $D(\nu \geq 2)$. En effet, soit A un petit domaine simplement connexe intérieur à D et dans lequel les fonctions $\bar{R}_{-n}^{(z)}$ n'ont pas de points critiques; A peut être regardé comme la différence de deux domaines B et B' intérieurs à D et contenant le point double z ; la somme des domaines antécédents de rang n du domaine B , qui sont intérieurs à D , tend vers le domaine D ; le domaine B jouit de la même propriété; les deux sommes d'aires correspondantes ont donc même limite qui est l'aire de D ; par suite, l'aire totale des domaines antécédents de rang n de A qui sont intérieurs à D tend vers zéro pour n infini. Si l'on avait $|R'(z)| \leq \sqrt{\nu}$ sur f et par suite dans D , on en déduirait

$$|R'^2(z)| \leq \nu, \quad \frac{1}{R'^2(z)} \geq \frac{1}{\nu};$$

le rapport d'un élément d'aire de D et de son conséquent étant ainsi supérieur à $\frac{1}{\nu}$; les ν éléments d'aire déduits de l'élément $d\omega$ par les ν branches de la fonction $\bar{R}_{-1}(z)$ auraient une somme supérieure à $\nu \frac{d\omega}{\nu} = d\omega$; donc les sommes des aires antécédentes de rang n de A et intérieures à D seraient non décroissantes avec $\frac{1}{n}$ et ne sauraient tendre vers zéro. Il y a contradiction. Le domaine D renferme donc des points où $|R'(z)| > \sqrt{\nu}$; il en est de même de sa frontière.

Nous trouverons par la suite d'autres propriétés de cet ensemble f , dont l'étude paraît plus difficile dans le cas général que celle de l'ensemble $\mathcal{F}$.

34. Nous allons maintenant faire des hypothèses particulières

qui nous permettront de préciser davantage la nature de cette frontière. Supposons que $\mathcal{F}$ ne renferme aucun point de l'ensemble $E_e + E'_e$ ou, ce qui revient au même, que l'on ait sur $\mathcal{F}$

$$|R_h(z)| > K > 1;$$

supposons en outre D simplement connexe. Nous allons voir que f est alors en général une courbe de Jordan sans point double. En effet, nous savons que f est l'ensemble limite d'une suite de courbes $C, C_{-1}, C_{-2}, \dots$ d'un seul tenant et sans points doubles, s'enveloppant mutuellement et dont chacune se déduit de la suivante par la substitution $[z|R(z)]$: sur ces courbes les ν valeurs de $\bar{R}_{-1}(z)$ se permutent circulairement, les points critiques de $\bar{R}_{-1}(z)$ et leurs conséquents pouvant d'ailleurs être supposés intérieurs à C. Supposons qu'on puisse ensuite, en dilatant la courbe C, obtenir une autre courbe C' complètement extérieure à D et telle que dans la couronne (C, C') ne se trouve aucun point de l'ensemble $E_e + E'_e$, en sorte que, sur C, les ν valeurs de $\bar{R}_{-1}(z)$ se permutent encore circulairement; pour tout point z de la couronne (C, C') , les valeurs de $\bar{R}_{-n}(z)$ tendent uniformément vers la frontière f de D, intérieure à cette couronne; la courbe C'_{-n} déduite de C' par $[z|\bar{R}_{-n}(z)]$, sera donc, à partir d'une certaine valeur de n , intérieure à C.

On peut supposer qu'il en est ainsi à partir de $n = 1$. Nous pouvons donc considérer f comme limite commune de deux suites de courbes C_{-n} et C'_{-n} , telles que C'_{-p} soit extérieure à C_{-q} , $C_{-(n+1)}$ extérieure à C_{-n} et $C'_{-(n+1)}$ intérieure à C'_{-n} , l'écart ⁽¹⁾ de C_{-n} et C'_{-n} tendant vers zéro, et les couronnes (C_{-n}, C'_{-n}) contenant au moins un point double répulsif de la substitution donnée. Les considérations du paragraphe 24 (Chap. III) sont donc ici applicables, à cela près qu'au lieu de la totalité des branches de la fonction $R_{-1}(z)$, on ne considère ici que les ν branches de la fonction $R_{-1}(z)$ égale à z pour $z = z$, et se permutant circulairement sur

(1) L'écart de deux courbes C et C' est défini comme il suit : soit de la plus courte distance d'un point m de C à la courbe C; lorsque m décrit C, d possède un maximum qu'on peut désigner par (C, C') ; le plus grand des deux nombres (C, C') et (C', C) est l'écart des deux courbes.

les courbes C_{-n} et C'_{-n} . L'ensemble limite f de ces courbes est donc encore ici une courbe de Jordan sans points doubles, susceptible du mode de représentation obtenue dans ce paragraphe. Tous les points de f sont alors des points accessibles; ils sont tous limites des points périodiques, ces points étant denses sur f .

Si la condition que $\mathcal{F}$ ne renferme aucun point de $E_c + E'_c$ est toujours vérifiée, D n'étant plus simplement connexe, l'ensemble f , s'il n'est pas partout discontinu, renferme une infinité de continus distincts.

Si l'on ne fait plus aucune hypothèse particulière, la question de reconnaître si la frontière du domaine immédiat d'un point double attractif peut avoir des points inaccessibles présente des difficultés que je ne suis pas parvenu à surmonter.

35. Nous allons maintenant revenir brièvement sur le cas où l'ensemble $\mathcal{F}$ est partout discontinu. Supposons qu'il y ait un point double attractif; son domaine est alors d'un seul tenant et se confond avec le domaine immédiat D ; ce dernier est complémentaire de l'ensemble $\mathcal{F}$ (qui se confond ici avec f). Les points critiques de $R_{-1}(z)$ appartiennent tous à $\mathcal{F}$ ou à D . L'existence de points critiques de $R_{-1}(z)$ appartenant à $\mathcal{F}$ ne paraît pas compatible avec la discontinuité totale de $\mathcal{F}$, mais nous n'avons pu le démontrer d'une manière rigoureuse. En revanche, on démontre facilement que si tous les points critiques de $R_{-1}(z)$ sont intérieurs au domaine immédiat D du point double attractif α , l'ensemble $\mathcal{F}$ est partout discontinu. En effet, l'ensemble E'_c , dérivé des conséquents des points critiques se réduisant au point α intérieur à D , on peut tracer dans D une courbe simple séparant le plan en deux régions dont l'une contient tous les points de l'ensemble $E_c + E'_c$; soient A l'aire simplement connexe ainsi définie, $A_1, A_2, \dots$ ses conséquentes; A_n tendant vers le point α sera à partir d'une certaine valeur h de n intérieure à A .

Si l'on pose $R_h(z) = T(z)$, les fonctions inverses de $T(z)$ sont holomorphes dans l'aire B complémentaire de A et y forment une famille normale à fonctions limites constantes, de sorte que les aires antécédentes de B de rang infiniment grand ont des dimen-

sions infiniment petites; les considérations du paragraphe 23 sont donc ici applicables et $\mathcal{F}$ est partout discontinu.

Examinons, en particulier, le cas où $R(z)$ est un polynome; le domaine du point à l'infini est alors d'un seul tenant et se confond avec le domaine immédiat D. Les valeurs de $R_{-1}(z)$ se permutent toutes circulairement sur une circonférence de rayon infiniment grand, le point à l'infini étant un point critique qui compte pour $d-1$ points critiques simples; il y a, en outre, $d-1$ points critiques à distance finie. Cherchons alors la condition pour que D soit simplement connexe. S'il en est ainsi, le long d'une courbe simple située dans D et laissant à son extérieur tous les points critiques de $R_{-1}(z)$ qui appartiennent à D, toutes les valeurs de $R_{-1}(z)$ se permutent circulairement entre elles; il y a alors (Chap. I, § 5) $d-1$ points critiques intérieurs à cette courbe, extérieurs par conséquent à D. Donc aucun point critique à distance finie n'appartient à D, et réciproquement. S'il en est ainsi, D est simplement connexe. Si, au contraire, il y a un point critique à distance finie, ou si l'on veut un point racine de $R'(z)=0$ dont les conséquents successifs tendent vers l'infini, D est d'ordre de connexion infini. Si, en particulier, tous les points racines de $R'(z)=0$ appartiennent au domaine du point à l'infini, ce domaine a pour frontière un ensemble parfait partout discontinu.

36. Les considérations qui précèdent permettent de traiter un grand nombre d'exemples numériques et de se rendre compte avec une certaine précision de la structure de l'ensemble $\mathcal{F}$ ainsi que de la division correspondante du plan en régions. Voici quelques-uns de ces exemples :

1.
$$R(z) = az + z^3,$$

a constante réelle comprise entre 1 et 2.

Il y a trois points doubles attractifs qui sont le point à l'infini et les deux points $z^2 = 1-a$, situés sur l'axe imaginaire pour lesquels $R'(z)$ a la valeur $3-2a$ comprise entre -1 et $+1$. Dans le domaine de chacun de ces points d'attraction se trouve un point critique et un seul de la fonction $R_{-1}(z)$. Les domaines immédiats de ces trois points sont simplement connexes et limites

par des courbes de Jordan; il en est de même des domaines antécédents ⁽¹⁾. Le point double répulsif $z = 0$ est un point frontière commun aux trois domaines immédiats. L'ensemble $\mathcal{F}$ est formé d'un continu unique. Il y a évidemment symétrie par rapport à l'axe réel (ce dernier n'ayant en commun avec $\mathcal{F}$ que le point $z = 0$). On peut se faire une idée de l'ensemble $\mathcal{F}$ par l'exemple suivant qui est analogue : considérons deux circonférences tangentes entre elles extérieurement; traçons ensuite deux autres circonférences tangentes extérieurement respectivement aux deux premières et complètement extérieures l'une à l'autre; traçons ensuite quatre circonférences tangentes extérieurement respectivement aux quatre circonférences déjà tracées, mais extérieures les unes aux autres et ainsi de suite de manière que les rayons de ces circonférences successivement tracées tendent vers zéro et que chaque point de l'une d'elles soit limite de points de contact; l'ensemble de toutes ces circonférences et de leurs points limites forme une courbe ayant une infinité de points doubles qui est analogue à notre ensemble $\mathcal{F}$; les circonférences doivent seulement être remplacées par des courbes de Jordan sans points doubles qui, comme nous le verrons au Chapitre suivant, n'ont de tangentes en aucun point.

II.

$$R(z) = \frac{z}{2 + z + z^3}.$$

L'origine est ici un point double attractif dont le domaine est d'un seul tenant, d'après ce que nous avons vu au paragraphe 32 au sujet des fractions rationnelles de la forme $\frac{z}{P(z)}$; l'origine est un point critique de la branche de $R_{-1}(z)$ qui y devient infinie; nous avons, en outre, trois points critiques qui s'obtiennent en posant

$$R'(z) = 0, \quad c = R(z),$$

⁽¹⁾ On constate aisément que l'analyse du paragraphe 34 s'applique ici aux domaines des points $\pm \sqrt{1-a}$, mais au domaine du point à l'infini dont la courbe limite a des points doubles.

ce qui donne

$$x^3 = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{1}{4}, \\ c = \frac{e^{\frac{2i\pi}{3}}}{3 + e^{\frac{2i\pi}{3}}}, \\ c = \frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}}{3 + e^{\frac{4i\pi}{3}}}. \end{array} \right.$$

On a donc pour ces trois points $|c| < \frac{1}{3}$. Il s'ensuit qu'ils appartiennent au domaine du point $z = 0$, car, pour $|z| \leq \frac{1}{3}$, on a

$$|R(z)| \leq \frac{|z|}{2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{27}} = K|z| \quad (K < 1).$$

Done tous les points critiques de $R_{-1}(z)$ appartiennent au domaine immédiat du point $z = 0$, et ce domaine est le complémentaire d'un ensemble parfait partout discontinu.

$$\text{III.} \quad R(z) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(z^4 + 1) + z.$$

Le domaine du point à l'infini comprend ici tout l'axe réel. Il y a, en outre, deux points doubles attractifs imaginaires conjugués qui sont les points racines de l'équation $z^4 + 1 = 0$, dont la partie réelle est positive : $z = e^{\pm \frac{i\pi}{4}}$. Les multiplicateurs correspondants ont en effet pour valeurs $\frac{1 \pm i}{4}$, ils sont donc plus petits que l'unité en module. Il y a à distance finie trois points critiques de $R_{-1}(z)$ dont l'un est réel et appartient au domaine du point à l'infini, les deux autres appartenant respectivement aux domaines des points $e^{\pm \frac{i\pi}{4}}$; le premier de ces domaines est donc d'ordre de connexion infini et d'un seul tenant, les deux autres étant formés d'une infinité de parties qui sont chacune simplement connexe. L'analyse du paragraphe 34 est ici applicable aux domaines immédiats des points $e^{\pm \frac{i\pi}{4}}$; on prendra, par exemple, pour la courbe C le péri-

mètre d'un carré de côté infiniment grand, situé dans le demi-plan supérieur symétrique par rapport à l'axe imaginaire, l'un des côtés étant infiniment voisin de l'axe réel; les frontières de ces domaines immédiats sont donc des courbes de Jordan sans points doubles; ces deux courbes frontières sont ici sans point commun, à cause de la symétrie par rapport à l'axe réel qui est sans point commun avec elles. Soient D et D' ces deux domaines, D étant au-dessus de l'axe réel. On constate aisément que parmi les racines d'une équation telle que $R(z) = \xi$, où ξ est imaginaire, il y en a toujours deux dont la partie imaginaire est positive et deux dont la partie imaginaire est négative; on en conclut que les deux domaines antécédents immédiats de D, distincts de D lui-même, sont au-dessous de l'axe réel; ils sont donc sans point frontière commun avec D; ils sont aussi sans point frontière commun entre eux. Si l'on considère les domaines D et D' et leurs antécédents, on a une infinité dénombrable de domaines distincts et sans points frontières communs deux à deux; ces domaines ont des dimensions linéaires qui tendent vers zéro et leurs points limites sont tous les points de l'ensemble $\mathcal{J}$. $\mathcal{J}$ renferme ainsi une infinité de continus distincts.

IV. $R(z) = z(z+1)(z+2) = z^3 + 3z^2 + 2z.$

Il y a, outre le point à l'infini, un point double attractif

$$z = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2};$$

le domaine du point à l'infini comprend le demi-axe réel positif à l'exclusion de $z = 0$. Les points critiques à distance finie de la fonction $R_{-1}(z)$ sont les points $z = \frac{+2}{3\sqrt{3}}$ et $z = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$. Le premier appartient au domaine du point à l'infini qui est, par suite, d'ordre de connexion infini. Le second appartient au domaine immédiat du point double $\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)$, qui est simplement connexe; comme deux déterminations seulement de $R_{-1}(z)$ se permutent autour de ce point critique, le domaine total du point $\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)$ comprend une infinité de parties distinctes qui sont toutes simplement connexes. On verra facilement que ces domaines partiels

n'ont pas de points frontières communs; ils sont limités par des courbes sans points doubles. L'ensemble $\mathcal{F}$ comprend dans cet exemple, comme dans le précédent, une infinité de continus distincts. Bien que l'ensemble E'_c ne renferme ici que deux points doubles attractifs, il n'y a pas, comme dans les exemples considérés au Chapitre III, partage du plan en deux régions simplement connexes.

$$\text{V.} \quad R(z) = z(z - a)^2(|a| > 1).$$

Le point $z = 0$ est à la fois point double répulsif et point critique de $R_{-1}(z)$. Nous avons, en outre, les deux points doubles $z = a \pm 1$ pour lesquels $R'(z) = (z - a)(3z - a)$ prend les valeurs $3 \pm 2a$ dont une au plus est inférieure à 1 en module. Si a est réel, positif et plus grand que 1, il faudra, en outre, que a soit inférieur à 2 pour qu'il y ait un point double attractif à distance finie. Soit donc $1 < a < 2$. Les domaines des deux points doubles a et $a - 1$ sont, le premier d'un seul tenant et simplement connexe, le second formé d'une infinité de parties simplement connexes; en effet, les domaines immédiats de ces deux points renferment respectivement un point critique unique de $R_{-1}(z)$:

$$\left(z = a \quad \text{et} \quad z = \frac{4a^3}{9} \right),$$

le premier permutant les trois branches de cette fonction et le second permutant seulement deux branches. L'ensemble $\mathcal{F}$ est formé ici d'une seule courbe présentant une infinité de points doubles, à savoir la courbe frontière du domaine simplement connexe D_z qui partage le plan en une infinité de régions.

$$\text{VI.} \quad R(z) = \frac{2z^3 + 1}{3z^2}.$$

Cette fraction est celle qu'on obtient lorsqu'on applique la méthode d'approximation de Newton à l'équation $z^3 - 1 = 0$. Les points racines de cette équation sont des points doubles attractifs à multiplicateur nul; ils sont points critiques simples de la fonction $R_{-1}(z)$. Le point à l'infini est un point double répulsif, également point critique de $R_{-1}(z)$. Ces quatre points constituent

l'ensemble E'_c . Les domaines des trois points $z = 1^{\frac{1}{3}}$ sont formés d'une infinité de parties simplement connexes. Cherchons, en particulier, ce qui se passe sur l'axe réel. Le segment $(0, +\infty)$ appartient au domaine du point $z = 1$. Ce segment a un antécédent immédiat, autre que lui-même et situé sur l'axe réel; c'est ce qu'on verra facilement en construisant la courbe $y = \frac{2x^3+1}{3x^2}$ pour x variant de $-\infty$ à $+\infty$; cette courbe a une asymptote de rebroussement $x = 0$, une asymptote d'inflexion $y = \frac{2}{3}x$, et un point à tangente horizontale $x = z = 1$. Le segment $(\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}, 0)$ antécédent de $(0, +\infty)$ a lui-même un antécédent réel qui lui est adjacent et situé à sa gauche, et ainsi de suite. Les longueurs de tous ces segments, à partir du troisième, vont en croissant, comme il résulte de l'expression de $R'(z) = \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{z^3})$. Les extrémités de ces segments ont donc l'infini pour point limite unique. Le domaine du point $z = 1$ comprend donc tout l'axe réel, sauf une infinité dénombrable de points ayant l'infini pour point limite unique. Les domaines des deux autres points d'attraction se déduisent du premier par des rotations de $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ autour de l'origine; les domaines connexes partiels relatifs à ces trois points ont toujours des points frontières communs, à savoir les points $z = \infty$, $z = 0$ et leurs antécédents.

VII.
$$R(z) = Kz - \frac{1}{z}.$$

Si K est réel et positif, on a une substitution à cercle fondamental dont les propriétés sont connues.

Supposons K réel et négatif et égal à $-K'$. On a alors

$$Z = -K'z - \frac{1}{z}.$$

En posant $Z = iT$, $z = it$, il vient

$$T = -K't + \frac{1}{t}.$$

On est encore ramené à une substitution à cercle fondamental du deuxième type.

Supposons maintenant K imaginaire. Les deux points doubles $z = \pm \sqrt{\frac{1}{K-1}}$, de multiplicateurs égaux à $2K-1$, seront attractifs si K est intérieur au cercle décrit sur $(0, 1)$ comme diamètre. Supposons cette condition remplie; les deux points critiques de $R_{-1}(z)$ appartiennent respectivement aux domaines immédiats de ces deux points; comme il n'y a que deux branches de $R_{-1}(z)$ qui se permutent autour de chacun de ces points, les domaines des deux points d'attraction sont d'un seul tenant, simplement connexes et séparés par une courbe qui est ici une courbe de Jordan sans points doubles, et qui passe notamment par le point à l'infini (point double répulsif de multiplicateur K imaginaire) et par l'origine. Cette courbe n'est pas analytique, tous les antécédents de $z = \infty$ qui forment un ensemble dense sur la courbe étant des points sans tangente.

Si l'on pose $T = Z^2$, $t = z^2$, on obtient, entre T et t , la relation

$$T = t \left(K - \frac{1}{t} \right)^2 = R_1(t).$$

On verra alors, comme au paragraphe 25, que la substitution $[t, R_1(t)]$ admet un point double attractif dont le domaine comprend tous les points extérieurs à un arc de courbe joignant les points 0 et ∞ . Cette courbe n'est pas analytique.

VIII.

$$R(z) = z^2 - 1.$$

Les points $z = 0$ et $z = -1$ forment un couple périodique attractif de multiplicateur nul; l'ensemble E'_c se compose de ces deux points et du point à l'infini. Les domaines des points 0 et -1 se composent d'une infinité de domaines partiels simplement connexes, tandis que le domaine du point à l'infini est d'un seul tenant et limité par une courbe ayant une infinité de points doubles.

IX.

$$R(z) = z + z^2.$$

Il y a ici un point double indifférent $z = 0$, de multiplicateur égal à $+1$. On sait que ce point est à la fois limite de conséquents de certains domaines et point frontière, c'est-à-dire point de l'ensemble $\mathcal{F}$. Le domaine du point $z = 0$ comprend l'intérieur du

cercle décrit sur $(0, -1)$ comme diamètre; la limite des domaines antécédents de ce cercle, c'est-à-dire le domaine du point zéro, est simplement connexe; l'ensemble $\mathcal{F}$ sépare le plan en deux régions qui sont les domaines respectifs des points $z=0$ et $z=\infty$. Cet ensemble $\mathcal{F}$ est ici constitué par une courbe; on peut encore démontrer que c'est une courbe de Jordan sans points doubles; elle a une infinité dense de points de rebroussement qui sont le point $z=0$ et ses antécédents: cela résulte immédiatement des considérations du Chapitre II.

37. Nous aurons encore l'occasion d'examiner quelques exemples particuliers. Nous nous bornons pour l'instant à ceux qui précèdent et nous allons indiquer quelques propriétés simples, communes à toutes les substitutions à coefficients réels ou, ce qui revient au même, à celles qui laissent invariante une circonférence quelconque du plan.

Supposons qu'il existe un point double attractif O sur la circonférence invariante Γ . Le domaine du point O est symétrique par rapport à Γ . Il peut arriver que tous les points de Γ appartiennent au domaine (immédiat) D de O . D est alors d'ordre de connexion infini; car si m est un point de la frontière f de D , le symétrique m' de m par rapport à Γ appartient aussi à f ; m et m' étant séparés par Γ dont aucun point n'appartient à f , f n'est pas continu, donc D n'est pas simplement connexe; il est alors d'ordre de connexion infini. S'il existe un autre point double attractif P , il y en a également un en P' symétrique de P . Les domaines totaux des points P et P' sont alors formés d'une infinité de parties distinctes; on voit de plus que les domaines immédiats de P et de P' n'ont aucun point frontière commun; les domaines immédiats de O et de P ont des points frontières non communs.

Si tous les points de Γ n'appartiennent pas au domaine immédiat du point O , considérons l'arc ab de Γ contenant O et contigu à l'ensemble fermé, section de $\mathcal{F}$ par Γ . Lorsque z décrit Oa , $R(z)$ part de O pour aboutir en un point qui appartient à $\bar{\mathcal{F}}$ et qui ne peut être que l'une des extrémités de l'arc contigu ab ; on a donc

$$\begin{aligned} R(a) &= a \quad \text{ou} \quad b, \\ R(b) &= a \quad \text{ou} \quad b. \end{aligned}$$

Les points a et b sont donc : soit deux points doubles de multiplicateurs réels s avec $|s| > 1$ ou $s = \pm 1$; soit un point double et son antécédent immédiat; soit deux points d'un couple périodique. Si a et b sont confondus, on a $a = R(a)$.

Si le domaine immédiat de O est simplement connexe, sa section par Γ se réduit à l'arc ab ; supposons, en effet, qu'il existe un autre arc cd dont tous les points intérieurs appartiennent à ce domaine immédiat, les extrémités c et d étant des points frontières. On peut joindre un point de ab à un point de cd par une ligne brisée polygonale dont tous les points sont intérieurs au domaine D (on peut supposer que Γ est l'axe réel). Soient p et q le dernier point de rencontre de ab et le premier point de rencontre de cd avec cette ligne brisée; on a ainsi une ligne brisée joignant p et q et qui peut être supposée tout entière au-dessus de l'axe réel, sauf aux extrémités p et q , car le domaine D étant symétrique par rapport à l'axe réel, on peut toujours remplacer toute portion de cette ligne comprise entre deux points de l'axe réel par sa symétrique de façon qu'elle n'ait plus aucun point au-dessous de l'axe réel et la déformer ensuite infiniment peu de manière à supprimer les points situés sur l'axe réel; on a ainsi une ligne qu'on peut remplacer au besoin par une autre dépourvue de points doubles joignant un point de ab à un point de cd , située au-dessus de l'axe réel et intérieure à D . En lui adjoignant sa symétrique, on obtient un contour fermé simple intérieur à D tel qu'il existe deux points de la frontière f de D (par exemple a et d) de part et d'autre de ce contour. Donc D ne serait pas simplement connexe.

Cherchons maintenant la condition pour que tous les points de $\mathcal{F}$ appartiennent à Γ . Si $\mathcal{F}$ n'est pas partout discontinu, il renferme au moins un segment ab ; il existe alors un petit cercle tel que tous les points de $\mathcal{F}$ qui lui sont intérieurs forment un arc de la circonférence Γ ; comme $\mathcal{F}$ résulte de l'itération jusqu'à un rang fini de sa section par ce petit cercle (§ 27, III), $\mathcal{F}$ est lui-même formé d'un arc de Γ . Si $\mathcal{F}$ comprend toute la circonférence, la substitution possède un cercle fondamental. Si $\mathcal{F}$ comprend seulement un arc de la circonférence, la substitution laissant invariants cet arc, d'une part, et le domaine limité par cet arc, d'autre part, appartient au type étudié au paragraphe 23 et possède un point

double attractif sur la circonférence, dont le domaine d'attraction admet précisément cet arc pour frontière.

Si $\mathcal{F}$ est partout discontinu, la substitution peut encore être une substitution à cercle fondamental de deuxième espèce ou d'espèce singulière, ou encore une substitution (§ 25) laissant invariants un arc de cercle et le domaine qui a cet arc pour frontière. Mais il est possible, *a priori*, que la substitution n'appartienne à aucune de ces deux catégories et la question appelle de nouvelles recherches. On verra aisément qu'il y a toujours, dans ce cas, un point double sur Γ de multiplicateur plus petit que 1 en module ou égal à $+1$.

Considérons toujours une substitution à coefficients réels et supposons qu'il existe deux points doubles attractifs imaginaires conjugués O et O' ; si la substitution n'a pas de cercle fondamental, comme, d'autre part, l'ensemble $\mathcal{F}$ n'est pas partout discontinu puisqu'il y a deux constantes limites distinctes, il résulte de ce qui précède qu'il y a des points de $\mathcal{F}$ extérieurs à l'axe réel. En outre, il est évident qu'aucun point réel n'appartient aux domaines de O ni de O' . Soient μ un point de $\mathcal{F}$ situé du même côté que O par rapport à l'axe réel et m le premier point de rencontre à partir de O du segment $O\mu$ avec $\mathcal{F}$; un point a du domaine immédiat D' de O' a des antécédents a_{-n} dans un cercle de centre m et de rayon infiniment petit; les points a et a_{-n} étant séparés par l'axe réel, on en conclut que le domaine total de O' n'est pas d'un seul tenant et se compose par suite d'une infinité de parties distinctes; de même pour le point O . On voit aussi que m , point frontière du domaine immédiat de O , n'est pas frontière du domaine immédiat de O' ; ces deux frontières ne coïncident donc pas. On verra aussi que le domaine immédiat D de O et l'un de ses antécédents ont des frontières non identiques.

Enfin, on démontrera sans peine que, pour une substitution à coefficients réels, aucun segment de l'axe réel ne saurait appartenir à un domaine singulier.

Les exemples examinés tout à l'heure fournissent des illustrations des propriétés étudiées dans ce paragraphe.

LES SINGULARITÉS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET LES SÉRIES SOMMABLES ;

PAR M. J. RÉMOUNDOS.

1. Dans un travail antérieur [*Contribution à la théorie des singularités des équations différentielles du premier ordre* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXXVI; 1908)] j'ai étudié la singularité que présentent les conditions initiales $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ pour l'équation différentielle

$$(1) \quad x^2 \frac{dy}{dx} = by + f(x, y) \quad (b \neq 0),$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction holomorphe des x et y dans le voisinage de $x = 0$ et $y = 0$ s'annulant pour $x = 0$ et $y = 0$ et ne contenant pas de terme de la forme by . On sait que cette forme (1) est une de celles auxquelles nous conduit une méthode classique de réduction de Briot et Bouquet. On sait qu'il existe un développement taylorien satisfaisant à l'équation (1) et dont les coefficients se calculent de proche en proche par des différentiations successives faites sur l'équation (1), mais il est bien connu que cette série est, en général, divergente et, par conséquent, il n'existe pas, en général, une intégrale holomorphe dans le voisinage de $x = 0$ et s'annulant pour cette valeur de x .

Dans son Mémoire sur les séries divergentes (*Annales de l'École Normale*, 1899), ainsi que dans son livre : *Leçons sur les séries divergentes* (Gauthier-Villars, 1901), M. Borel donne des applications aux équations différentielles de sa belle et importante découverte de la théorie des séries sommables et démontre le théorème suivant :

« Si une série absolument sommable vérifie formellement une équation différentielle

$$(2) \quad F[x, y, y', \dots, y^{(n)}] = 0$$

algébrique par rapport à y et à ses dérivées, analytique en x ,

la fonction analytique définie par cette série est une intégrale de l'équation (2). »

Dans son livre ci-dessus indiqué, M. Borel, après la démonstration du théorème précédent, s'exprime ainsi : « Nous manquons malheureusement encore de propositions précises sur les cas où l'on peut affirmer la sommabilité absolue de la série obtenue »; et ensuite il cite un exemple très particulier : l'équation différentielle

$$x^2 \frac{dy}{dx} = r^2 - y,$$

dont il détermine, moyennant sa théorie des séries sommables, l'intégrale

$$y = \int_0^\infty e^{-ax} [ax - \log(1 + ax)] da,$$

répondant aux conditions initiales singulières $x_0 = 0, y_0 = 0$.

M. Borel énonce aussi le théorème suivant :

« Soit

$$(2') \quad x^2 \frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$$

une équation différentielle dans laquelle $\omega(x, y)$ désigne un polynôme ne renfermant pas de terme de degré 0 ou 1. Si l'on forme le développement formel de l'intégrale qui correspond aux conditions initiales

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad y'_0 = 0,$$

on obtient une série généralement divergente

$$y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

dont la série associée

$$(3) \quad \frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_3 t^3}{3!} + \frac{a_4 t^4}{4!} + \dots$$

a certainement un rayon de convergence différent de zéro. »

Tout cela montre que la théorie des séries sommables de M. Borel deviendra puissante et extrêmement utile pour la recherche

des intégrales des équations différentielles correspondant à des conditions initiales singulières lorsque nous aurons des méthodes précises, assez générales, sur les cas où l'on peut affirmer la sommabilité absolue des séries qui satisfont formellement aux équations différentielles. C'est à cette lacune signalée par M. Borel et ci-dessus indiquée que se rapporte le présent travail.

2. Dans mon travail antérieur déjà mentionné j'ai indiqué une *méthode de comparaison* de la série divergente (en général) qui satisfait à l'équation différentielle (1) avec la série convergente (dans un cercle de rayon non nul) fournie par l'équation

$$(4) \quad xy = by + f(x, y),$$

moyennant les mêmes conditions initiales $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, et définissant une fonction $y = g(x)$ holomorphe dans le voisinage de $x = 0$, d'après un théorème classique de Weierstrass. Cette méthode m'a permis d'établir pour l'équation différentielle (1) non seulement le théorème indiqué sans démonstration par M. Borel et ci-dessus énoncé, mais encore un résultat plus précis, le suivant :

« Si nous désignons par

$$(5) \quad \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \dots + \gamma_n x^n + \dots$$

la série qui satisfait formellement à l'équation (1), nous avons toujours l'inégalité

$$|\gamma_n| < 1.2.3 \dots (n-1) \delta_n,$$

où

$$(6) \quad \omega(x) = \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \dots + \delta_n x^n + \dots$$

désigne la fonction $y = \omega(x)$ qui s'annule pour $x = 0$ et satisfait à l'équation

$$(7) \quad xy + F(x, y) = |b|y,$$

$F(x, y)$ désignant la fonction que nous obtenons en remplaçant tous les coefficients par leurs modules dans le développement taylorien de $f(x, y)$. »

Il en résulte que, d'après la théorie des séries sommables de

M. Borel, la fonction associée à la série divergente (5), donnée par la série

$$(8) \quad u(ax) = \frac{\gamma_1 ax}{1} + \frac{\gamma_2 a^2 x^2}{1.2} + \frac{\gamma_3 a^3 x^3}{1.2.3} + \dots + \frac{\gamma_n a^n x^n}{1.2.3 \dots n} + \dots$$

aura ses coefficients $\frac{\gamma_n}{n!}$ de module inférieur aux coefficients correspondants δ_n , qui sont tous positifs; en posant donc

$$|x| = r,$$

nous aurons l'inégalité

$$|u(ax)| \leq \delta_1 ar + \delta_2 a^2 r^2 + \dots + \delta_n a^n r^n + \dots,$$

c'est-à-dire

$$(9) \quad |u(ax)| \leq \omega(ar)$$

satisfaite pour $a > 0$, dans le cercle C de convergence de la série

$$(10) \quad \omega(ar) = \delta_1 r a + \delta_2 r^2 a^2 + \dots + \delta_n r^n a^n + \dots \quad (\text{par rapport à } a),$$

il est clair que, en tout point intérieur au cercle C du plan a et situé sur le demi-axe réel positif, toutes les dérivées

$$u'_a(ax), \quad u''_{a^2}(ax), \quad u'''_{a^3}(ax), \quad \dots$$

ont leurs modules inférieurs aux dérivées correspondantes

$$\omega'_a(ar), \quad \omega''_{a^2}(ar), \quad \omega'''_{a^3}(ar), \quad \dots$$

de la fonction $\omega(ar)$ et, par conséquent, si le prolongement analytique de la fonction $\omega(ar)$ est possible sur tout le demi-axe réel positif du plan a , on voit de proche en proche que, pour $a \geq 0$, nous avons toujours la formule

$$(11) \quad |u(ax)| \leq \omega(ar),$$

le prolongement analytique de la fonction $u(ax)$ sur le même demi-axe étant aussi possible par la même série de cercles. Alors, les intégrales

$$\int_0^{a_1} e^{-a} |u(ax)| da, \quad \int_0^{a_1} e^{-a} \omega(ar) da$$

(a_1 étant un nombre positif quelconque) auront un sens et nous

aurons la formule

$$(12) \quad \int_0^{a_1} e^{-a} |u(ax)| da \leq \int_0^{a_1} e^{-a} \omega(ar) da.$$

Si donc, l'intégrale

$$(12') \quad \int_0^{\infty} e^{-a} \omega(ar) da$$

a un sens, il en sera de même de l'intégrale

$$(13) \quad \int_0^{\infty} e^{-a} |u(ax)| da$$

et, par conséquent, la série (5) sera *sommable*. Remarquons aussi que, si toutes les intégrales

$$(14) \quad \int_0^{\infty} e^{-a} \frac{d^{\nu} \omega(ar)}{da^{\nu}} da$$

ont un sens, il en sera de même, grâce aux remarques ci-dessus faites sur les dérivées des fonctions $u(ax)$ et $\omega(ar)$, des intégrales

$$(15) \quad \int_0^{\infty} e^{-a} \left| \frac{d^{\nu} u(ax)}{da^{\nu}} \right| da$$

et, par conséquent, la série (5) sera *absolument sommable*. Alors, comme cette série vérifie formellement l'équation différentielle (1), la fonction analytique définie par cette série absolument sommable sera, d'après le théorème de M. Borel ci-dessus énoncé, une intégrale de l'équation, pourvu qu'elle soit algébrique en y .

Remarquons maintenant que les intégrales (12') et (14) auront bien un sens dans le cas où le prolongement analytique de la fonction $\omega(t)$ est possible le long de l'axe réel positif et la fonction $f(x, y)$ est algébrique aussi en x , puisque, en vertu de cette hypothèse, la fonction $\sigma_r(a) = \omega(ar)$ sera algébrique en a et, par conséquent, restera inférieure à une puissance a^k , k étant une constante pouvant dépendre de r , ainsi que ses dérivées de tout ordre. Comme l'intégrale

$$(16) \quad \int_0^{\infty} e^{-a} a^k da$$

où k est une constante positive, a toujours un sens, il en résulte que, sous les conditions ci-dessus indiquées, les intégrales (12') et (14) et, par conséquent, l'intégrale

$$(17) \quad \int_0^{\infty} e^{-a} |u(ar)| da$$

et les (15) auront un sens; c'est-à-dire la série (5) sera absolument sommable et sa somme $g(x)$ est une fonction ayant la propriété importante

$$(18) \quad |g(x)| \leq \int_0^a e^{-a} \omega(ar) da \quad \text{où} \quad r = |x|.$$

Je tiens à signaler le fait que, dans les conditions indiquées, la série en question (5) est sommable dans tout le plan x (pour toute valeur de x). Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Considérons l'équation différentielle*

$$(19) \quad x^2 \frac{dy}{dx} = by + f(x, y) \quad (b \neq 0)$$

algébrique en x et y , $f(x, y)$ désignant un polynôme quelconque s'annulant pour $x = 0$ et $y = 0$ et ne contenant pas de terme de la forme by et désignons par $F(x, y)$ la fonction qui se déduit du polynôme $f(x, y)$, en y remplaçant tous les coefficients par leurs modules.

Si la fonction algébrique $y = \omega(x)$ définie par l'équation

$$(20) \quad xy + F(x, y) = |b|y$$

est prolongeable analytiquement le long de l'axe réel positif, la série (5) qui satisfait formellement à l'équation (19) et répond aux conditions singulières $x = 0$, $y = 0$ est sommable dans tout le plan x et sa somme est une fonction $u = g(x)$ dont le module ne dépasse pas, en chaque point du plan x , la valeur de l'intégrale (1)

$$(21) \quad \int_0^{\infty} e^{-a} \omega(ar) da,$$

où $r = |x|$.

(1) Dans cette intégrale nous n'écrivons pas la valeur absolue de $\omega(ar)$, parce que la fonction $\omega(ar)$ est positive pour les valeurs positives de a .

La série associée à la série (s) a un rayon de convergence différent de zéro toujours, quelle que soit la fonction $f(x, y)$, pourvu qu'elle soit holomorphe dans le voisinage des valeurs $x = 0$ et $y = 0$.

Généralisation. — Il n'est pas sans intérêt d'ajouter que le théorème précédent subsiste dans le cas plus général où les coefficients $A_i(x)$ du polynôme

$$f(x, y) = xA_0(x) + xA_1(x)y + A_2(x)y^2 + \dots + A_\mu(x)y^\mu$$

sont des fonctions entières en x d'ordre inférieur à l'unité, puisque, dans ce cas, la fonction $u = \tau_r(a) = \omega(ar)$, qui est maintenant algébroïde, sera aussi d'ordre inférieur à l'unité [voir mes travaux sur les zéros et la croissance des fonctions algébroides et, en particulier, mon Mémoire *Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome II, fasc. I, 1906)]; par conséquent, à partir d'une valeur de $|a|$, le module de la fonction $\tau_r(a) = \omega(ar)$ et de toutes ses dérivées sera inférieur à

$$e^{1/a} \rho^{\varepsilon}$$

(ε étant arbitrairement petit et $\rho < 1$). Nous aurons donc, pour $a > 0$, la formule

$$e^{-a} \omega(ar) < e^{-a} e^{a \rho^{\varepsilon}} = e^{-a + a \rho^{\varepsilon}} = e^{-a[1 - \rho^{1-\varepsilon}]} < e^{-a(1-\theta)},$$

à partir d'une valeur de a , l'ordre ρ étant supposé inférieur à l'unité et le nombre θ étant positif et inférieur à l'unité. Nous en concluons que, si le prolongement analytique de la fonction $\omega(t)$ est possible le long de l'axe réel positif, l'intégrale (21) et celles qui contiennent les dérivées auront bien un sens et il en sera de même des autres relatives à la fonction $u(ax)$.

EXTENSIONS.

3. Nous avons des résultats analogues pour les équations différentielles plus générales

$$(22) \quad x^\mu y' = by + f(x, y), \quad \mu = 2,$$

par zéro; si nous désignons par N l'ordre différentiel de l'expression E ainsi obtenue, la différence $N - m$ sera appelée *poids* du terme considéré. Cette définition nous conduit facilement aux règles suivantes, dont les démonstrations sont évidentes, à savoir :

1° Le poids d'un terme de la forme ax^p est égal à $-m$ (c'est-à-dire indéterminé, comme dépendant du nombre des dérivations effectuées).

2° Le poids d'un terme de la forme $ax^p y^q$ (où $q \neq 0$) est égal à $1 - p - q$.

3° Le poids d'un terme T ne contenant que des dérivées est égal à son ordre (c'est-à-dire à l'ordre le plus élevé des dérivées qui y figurent). Si nous désignons par b le poids d'un tel terme T , le poids du produit $x^p T$ est égal à $b - p$ et le poids du produit $x^p y^q T$ (où $q \neq 0$) est égal à $b + 1 - p - q$.

4° Le poids d'une somme est en général égal au plus grand des poids de ses termes.

Deux termes M et M' du même poids seront dits *équipollents* lorsque les expressions correspondantes E ou E' (voir la notation ci-dessus indiquée) se composent de termes semblables par rapport aux dérivées y' , y'' , ... (ne pouvant différer que par les coefficients). Toute équation en x et y , *différentielle ou non*, ayant des termes respectivement équipollents aux termes de l'équation (24) sera appelée *associée à l'équation (24)*. Deux équations associées l'une à l'autre et *ayant communs* les termes du plus grand poids jouent un rôle très intéressant pour la singularité qui nous occupe. L'étude approfondie de notre travail déjà mentionné, qui sert de base pour le Mémoire actuel, montre deux choses importantes :

1° Ce sont les termes du poids maximum qui jouent le rôle prépondérant dans le calcul des coefficients des séries et non pas les termes qui contiennent la dérivée de l'ordre plus élevé, comme il arrive dans les cas réguliers. C'est un caractère de la singularité qui nous occupe.

2° Les résultats des dérivations successives dans les deux séries ne diffèrent que par quelques *facteurs positifs et indépendants de la valeur algébrique des coefficients des équations associées* que j'ai appelés *facteurs de divergence*, puisque c'est la présence

de ces facteurs qui seule entraîne la divergence d'une série lorsque l'autre a un rayon de convergence différent de zéro.

L'équation différentielle (1), étudiée dans ce travail, a comme associée l'équation

$$xy = by + f(x, y)$$

qui n'est pas différentielle, et qui, par un changement des signes (s'il est nécessaire) des coefficients, nous a fourni l'équation

$$xy + F(x, y) = |b|y,$$

dont la comparaison avec l'équation (1) nous a permis d'établir le théorème de ce travail.

Un emploi analogue d'une associée à l'équation (24), choisie de façon à donner une série de Maclaurin à coefficients tous positifs, permet d'étendre à l'équation (24) notre théorème I. Il faudra toujours que la série fournie par l'équation associée ait un rayon de convergence différent de zéro et définisse une fonction $u = a(x)$ prolongeable sur l'axe réel positif et d'ordre de grandeur inférieur à celui de e^x pour la sommabilité de M. Borel par la fonction sommatrice e^a .

Parmi les associées à l'équation (24) on choisira, bien entendu, la plus simple, celle qui a le plus petit ordre différentiel. S'il existe une associée non différentielle, comme pour l'équation (1), elle est certainement (en général) préférable.

4. Pour les équations linéaires, notre théorème I n'est pas très utile. Si, par exemple, l'équation (1) est linéaire, son associée (que nous avons utilisée) est de la forme

$$|b|y = xy + xA(x) + xyA_1(x),$$

où les fonctions $A(x)$ et $A_1(x)$ sont à coefficients tous positifs; la fonction $\omega(x)$ sera donc

$$(25) \quad y = \omega(x) = \frac{x \wedge(x)}{|b| - x[1 + A_1(x)]}.$$

Si les $A(x)$ et $A_1(x)$ sont des polynômes, le dénominateur de la fraction (25) possède toujours une racine réelle et positive et,

comme le numérateur n'a pas des racines positives, il en résulte que, dans le cas actuel, la fonction $y = \omega(x)$ possède toujours un point singulier sur l'axe réel positif et, par conséquent, le long de cet axe, son prolongement analytique est impossible. Donc, lorsque l'équation (1) est linéaire et algébrique en x , notre théorème n'est pas très utile.

Mais, pour les équations non linéaires, notre théorème est, en général, utile. Dans le cas, par exemple, où $f(x, y)$ est du second degré en y , l'associée de l'équation différentielle (1) est de la forme

$$|b|y = xy + x\Lambda(x) + xy\Lambda_1(x) + \Lambda_2(x)y^2,$$

c'est-à-dire

$$(26) \quad \Lambda_2(x)y^2 + y[x\Lambda_1(x) + x - |b| +]x\Lambda(x) = 0,$$

où les $\Lambda(x)$, $\Lambda_1(x)$, $\Lambda_2(x)$ sont à coefficients positifs; pour fixer les idées, supposons qu'ils soient des polynômes. On peut les choisir de façon que le polynôme

$$x[\Lambda_1(x) + 1] - |b|^2 - 4x\Lambda(x)\Lambda_2(x)$$

n'ait pas des racines positives et, alors, la fonction $y = \omega(x)$, définie par l'équation (26), n'aura pas des points singuliers sur l'axe réel positif et son prolongement analytique sur cet axe sera bien possible.

Je tiens à signaler le fait remarquable que notre méthode de comparaison ramène la possibilité de la sommation des séries divergentes satisfaisant formellement aux équations différentielles de la forme (1) et d'autres formes plus générales à l'étude des points singuliers et de la croissance d'une fonction algébrique ou algébroïde bien connue et déterminée par l'équation différentielle.

Une généralisation de la notion de sommation de M. Borel faite par d'autres moyennes ou par d'autres fonctions sommatriques permettrait, je l'espère, à notre méthode de donner de meilleurs résultats pour la théorie des singularités des équations différentielles.

Il est aussi digne d'attirer l'attention sur le fait que notre théorème I fournit une limite supérieure de la fonction $y = g(x)$ qui est la somme de la série (5) satisfaisant formellement à l'équation

différentielle; nous avons

$$|g(x)| \leq M(r),$$

où

$$(27) \quad M(r) = \int_0^\infty e^{-a\omega(ar)} da = \frac{1}{r} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{r}\omega(t)} dt.$$

Remarquons enfin que, d'après les résultats ci-dessus mentionnés de M. Borel, notre méthode démontre l'existence d'intégrales de certaines équations différentielles, répondant aux conditions initiales $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ singulières et fournies par la série divergente satisfaisant formellement aux équations et par la théorie de sommabilité de M. Borel.

CHAMPS VECTORIELS A DIRECTIONS ASYMPTOTIQUES INDÉTERMINÉES;

PAR M. RENÉ GARNIER.

Dans une Note des *Comptes rendus* ⁽¹⁾, j'ai traité un problème posé par M. C. Guichard, et étudié par M. Axel Egnell ⁽²⁾; par suite d'une erreur de signe, le résultat qui termine cette Note se trouve incomplet ⁽³⁾. Mais, en fait, il est facile de résoudre complètement le problème par la méthode analytique que j'ai signalée.

Il s'agit de déterminer six fonctions inconnues X, Y, Z, u, v, w satisfaisant à l'équation

$$dX dx + dY dy + dZ dz = (X dx + Y dy + Z dz)(u dx + v dy + w dz);$$

or cette équation équivaut au système

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uX & uY - \rho & uZ + \mu \\ vX + \rho & vY & vZ - \lambda \\ wX - \mu & wY + \lambda & wZ \end{pmatrix},$$

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, t. 169, 1919, p. 324.

⁽²⁾ *Ibid.*, t. 168, 1919, p. 1263.

⁽³⁾ Cf. E. GOURSAT, *Ibid.*, t. 169, 1919, p. 493.

dont les conditions d'intégrabilité s'écrivent

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda}{\partial x} - u \lambda, \quad \frac{\partial u}{\partial x} - u \mu, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} - u \rho \\ \frac{\partial \lambda}{\partial y} - v \lambda, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - v \mu, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} - v \rho \\ \frac{\partial \lambda}{\partial z} - w \lambda, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - w \mu, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} - w \rho \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \xi X - S \quad \eta X \quad \zeta X \\ \xi Y \quad \eta Y - S \quad \zeta Y \\ \xi Z \quad \eta Z \quad \zeta Z - S \end{array} \right\}$$

en posant

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = \xi, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = \eta, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \zeta,$$

et

$$2S = \xi X + \eta Y + \zeta Z.$$

Exprimons maintenant que (2) est complètement intégrable, et nous obtiendrons en tout les six équations (1)

$$A \equiv 3\xi\lambda + \frac{\partial \xi}{\partial z} Y - \frac{\partial \xi}{\partial y} Z = 0,$$

$$B \equiv 3\eta\mu + \frac{\partial \eta}{\partial x} Z - \frac{\partial \eta}{\partial z} X = 0,$$

$$C \equiv 3\zeta\rho + \frac{\partial \zeta}{\partial y} X - \frac{\partial \zeta}{\partial x} Y = 0;$$

$$2D \equiv 3(\eta\rho + \zeta\mu) + \frac{\partial \zeta}{\partial x} Z - \frac{\partial \zeta}{\partial z} X + \frac{\partial \eta}{\partial y} X - \frac{\partial \eta}{\partial x} Y = 0,$$

$$2E \equiv 3(\zeta\lambda + \xi\rho) + \frac{\partial \xi}{\partial y} X - \frac{\partial \xi}{\partial x} Y + \frac{\partial \zeta}{\partial z} Y - \frac{\partial \zeta}{\partial y} Z = 0,$$

$$2F \equiv 3(\xi\mu + \eta\lambda) + \frac{\partial \eta}{\partial z} Y - \frac{\partial \eta}{\partial y} Z + \frac{\partial \xi}{\partial x} Z - \frac{\partial \xi}{\partial z} X = 0;$$

d'où l'on déduit aussitôt la combinaison

$$\begin{aligned} 0 &= AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2DYZ + 2EZX + 2FXY \\ &\equiv 3(\xi X + \eta Y + \zeta Z)(\lambda X + \mu Y + \rho Z). \end{aligned}$$

On devra donc avoir

$$(3) \quad S\sigma = 0,$$

(1) Les systèmes (1) et (2), ainsi que l'équation $E = 0$, figurent d'ailleurs dans la Note des *Comptes rendus*.

en posant

$$\sigma = \lambda X + \mu Y + \rho Z.$$

Supposons d'abord $\sigma \neq 0$; la condition (3) exigera $S = 0$; mais on tire de (1) et (2)

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) = 2(u, v, w)\sigma + (X, Y, Z)S,$$

on aura donc

$$2u = \frac{\partial \log \sigma}{\partial x}, \quad 2v = \frac{\partial \log \sigma}{\partial y}, \quad 2w = \frac{\partial \log \sigma}{\partial z},$$

et en multipliant X, Y, Z par un facteur d'ensemble convenablement choisi, on peut prendre $\sigma = 1$, d'où

$$u = v = w = 0, \quad \xi = \eta = \zeta = 0;$$

λ, μ, ρ sont des constantes et, en vertu de (1), *le vecteur* (X, Y, Z) *sera normal au plan polaire du point* (x, y, z) *par rapport à un complexe linéaire*. C'est la solution de la Note des *Comptes rendus*.

Mais on peut encore satisfaire à (3) en prenant $\sigma = 0$; pour interpréter ce résultat, posons

$$H = xX + yY + zZ;$$

en nous appuyant sur (1), nous trouverons

$$\frac{D\left(\frac{Y}{H}, \frac{Z}{H}\right)}{D(y, z)} = \frac{\lambda x}{H^3} \sigma,$$

$$\frac{D\left(\frac{Y}{H}, \frac{Z}{H}\right)}{D(z, x)} = \frac{\mu x - Z}{H^3} \sigma, \quad \frac{D\left(\frac{Y}{H}, \frac{Z}{H}\right)}{D(x, y)} = \frac{\rho x + Y}{H^3} \sigma, \quad \dots,$$

ce qui prouve que, pour $\sigma = 0$, $\frac{X}{H}, \frac{Y}{H}, \frac{Z}{H}$ sont, tous, fonctions l'un de l'autre; *le vecteur* (X, Y, Z) *est alors perpendiculaire à un plan, tangent à une développable et passant par le point* (x, y, z) , et l'on vérifie aussitôt que cette seconde solution répond bien à la question.

SUR LA THÉORIE DES NOMBRES HYPERCOMPLEXES A COORDONNÉES RATIONNELLES ;

PAR M. L.-GUSTAVE DU PASQUIER.

CHAPITRE I.

LES NOMBRES HYPERCOMPLEXES ENTIERS.

1. Envisageons un ensemble constitué par une infinité d'éléments, ou *complexes*, tels que $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_m)$, le signe $\equiv$ (doublement égal) se prononçant « égal par définition », ou « identiquement égal ». Les $x_1, x_2, \dots, x_m$ sont des nombres réels, d'ailleurs quelconques, dits *coordonnées* du complexe x . Pour faire de cet ensemble un système S_m de nombres hypercomplexes, il faut soumettre au calcul les éléments x . A cet effet, il suffit de poser trois définitions primordiales : celle de l'égalité de deux complexes et celles de *deux opérations* que l'on appellera, par analogie avec l'arithmétique élémentaire, *addition* et *multiplication*. Ces trois définitions primordiales sont d'ailleurs arbitraires, à la seule restriction près que la définition de l'égalité, que nous représentons comme de coutume par le signe $=$, satisfasse aux trois axiomes suivants : 1° tout élément doit être « égal » à lui-même ; 2° de $a = b$, il résulte $b = a$; 3° de $a = b$ et $b = c$, il résulte $a = c$.

Dans ce qui suit, nous supposons d'emblée l'égalité de deux nombres hypercomplexes tels que $a \equiv (a_1, a_2, \dots, a_m)$ et $b \equiv (b_1, b_2, \dots, b_m)$ définie par l'égalité des coordonnées *correspondantes*. L'équation $a = b$ entraîne donc, par définition, les m égalités entre nombres réels

$$a_\lambda = b_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots, m).$$

De plus, nous supposons l'une des deux opérations susmentionnées, l'*addition* des nombres hypercomplexes, définie par l'addition des coordonnées correspondantes, de sorte que

$$(1) \quad a + b \equiv (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m)$$

qu'ils soient linéairement indépendants (voir n° 5). Tout nombre tel que y pourrait encore se mettre sous la forme (4). Il est vrai qu'en choisissant d'autres unités relatives, puis donnant au même nombre hypercomplexe y la forme (4), on obtiendrait en général d'autres y_i .

2. Outre l'addition, supposons définie dans S_m une seconde opération : « la multiplication ». Etant donnés les deux complexes x et y de S_m , on appelle *produit* xy un nouveau nombre hypercomplexe $z \equiv (z_1, z_2, \dots, z_m)$ appartenant au même système et dont chaque coordonnée z_λ est une fonction f_λ des coordonnées x_i et y_i :

$$(6) \quad xy = z \equiv [f_1(x_i, y_i), f_2(x_i, y_i), \dots, f_m(x_i, y_i)].$$

Il n'est pas nécessaire d'ailleurs de supposer que ces f_λ soient des fonctions rationnelles entières de leurs arguments. Chacune doit être fixée, mais peut l'être arbitrairement. Suivant à quel choix des f_λ on s'arrêtera, la « multiplication » ainsi *définie* sera commutative ou non, associative ou non, liée ou non à l'addition par la loi de distributivité; elle admettra une ou deux « opérations inverses » : la *division à droite* et la *division à gauche* univoques ou plurivoques, exécutables toujours, ou dans certains cas seulement, ou pas du tout.

On voit qu'en introduisant les unités relatives (5), la multiplication de nombres hypercomplexes de S_m sera déterminée dès que l'on saura exprimer tous les produits $e_i e_k$ au moyen des mêmes unités relatives $e_1, e_2, \dots, e_m$. Cette loi de multiplication est donc définie par m^3 constantes γ_{iks} qui entrent dans les formules

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_1 e_1 = \sum_{s=1}^{s=m} \gamma_{11s} e_s, \quad e_1 e_2 = \sum_{s=1}^{s=m} \gamma_{12s} e_s, \quad \dots, \quad e_i e_k = \sum_s^{1 \dots m} \gamma_{iks} e_s \\ (i, k = 1, 2, \dots, m). \end{array} \right.$$

Définition. — Deux systèmes sont dits *réciroques* quand on passe de l'un à l'autre en changeant entre elles les constantes

$$\gamma_{iks} \quad \text{et} \quad \gamma_{kts}, \quad \text{où} \quad i, k, s = 1, 2, \dots, m.$$

Dans ce qui suit, nous supposons :

1° Que le système S_m est à multiplication associative, $(ab)x = a(bx)$. On sait que, pour qu'il en soit ainsi, la condition nécessaire et suffisante est que les m^3 constantes γ_{iks} satisfassent aux relations

$$(8) \quad \sum_s \gamma_{iks} \gamma_{sjt} = \sum_s \gamma_{kjs} \gamma_{ist} \quad \text{où} \quad i, k, j, t = 1, 2, \dots, m.$$

2° Qu'il existe dans S_m une *unité principale*, c'est-à-dire un nombre hypercomplexe u indifférent à la multiplication (le « module » de la multiplication) satisfaisant, quel que soit a , aux égalités $au = ua = a$. Nous représenterons cette unité principale u par l'écriture 1. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que S_m admette une unité principale est qu'aucun des deux déterminants dits *déterminants caractéristiques du système*, savoir :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_{i=1}^{i=m} \gamma_{iks} \alpha_i \right|, \\ (k, s = 1, 2, \dots, m), \end{array} \right. \quad \left| \sum_{k=1}^{k=m} \gamma_{iks} \alpha_k \right|, \quad (i, s = 1, 2, \dots, m),$$

ne soit identiquement nul, quels que soient les nombres α_i .

S'il en est ainsi, la « division à droite » et la « division à gauche » sont possibles et bien déterminées lorsque le diviseur n'est pas un diviseur de zéro ; en d'autres termes : étant donnés a et b , on peut déterminer les solutions x et y des équations $a = b.x$ et $a = y.b$, et les coordonnées des quotients (« quotient à droite » et « quotient à gauche ») sont données par un système de m équations linéaires à m inconnues, à déterminant non nul quand b n'est pas diviseur de zéro.

3. Avec les nombres hypercomplexes envisagés se trouvent définies, par ce qui précède, l'égalité et quatre opérations rationnelles. Le système S_m constitue dès lors un corps de nombres. Appelons *nombre hypercomplexe rationnel*, ou simplement « complexe rationnel », un tel complexe x dont toutes les m coordonnées x_i sont des nombres rationnels quelconques, entiers ou fractionnaires. L'ensemble des complexes rationnels constitue le *domaine naturel de rationalité* de S_m . Nous le désignerons

par mR , ou simplement R . C'est dire que les nombres hypercomplexes rationnels en question se reproduisent dans R par addition, soustraction, multiplication et division; en d'autres termes : que somme, différence, produit et quotients (s'ils existent) de deux complexes rationnels sont toujours de nouveau des complexes rationnels.

Nous nous proposons de faire *l'arithmomie* du corps de nombres mR .

Le premier pas devra consister à scinder mR en deux domaines, mettant dans l'un les complexes rationnels « entiers » encore à définir, dans l'autre, les complexes rationnels « non entiers ». La définition suivante que nous appelons *lipschitzienne* se présente le plus naturellement à l'esprit : un complexe rationnel

$$x \equiv \sum_{i=1}^{i=m} x_i e_i$$

est dit *entier*, si ses m coordonnées x_i sont des nombres entiers ordinaires; x sera dit *non entier*, si l'une au moins de ses m coordonnées est un nombre fractionnaire.

En prenant pour base cette définition et envisageant les complexes *entiers* ainsi définis comme éléments, on peut ériger une arithmomie du système de nombres hypercomplexes considéré. Cette arithmétique généralisée présente beaucoup d'analogies avec la classique dont les éléments sont les nombres rationnels entiers. On retrouve en général, dans cette arithmomie des complexes, l'équivalent du nombre premier et la possibilité de décomposer un complexe entier quelconque en *facteurs premiers*. On y retrouve aussi les diviseurs communs de 2 ou, plus généralement, de n complexes entiers donnés. On y retrouve encore un procédé analogue à *l'algorithme d'Euclide*, permettant de déterminer, par un nombre fini d'opérations rationnelles, le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple de plusieurs complexes entiers donnés. On y retrouve une théorie des congruences, l'analogie du théorème de Fermat, l'analogie du théorème de Wilson, etc.

Mais il y a des cas où cette analogie ne joue pas. Il y a des systèmes de nombres où l'arithmétique généralisée basée sur la

définition lipschitzienne du nombre hypercomplexe entier présente des anomalies étonnantes, curieuses exceptions aux règles générales. Cela tient souvent à la définition même du complexe « entier » comme l'a montré pour la première fois M. A. Hurwitz sur l'exemple des quaternions. Voici les considérations qui peuvent conduire à une définition satisfaisante du nombre hypercomplexe *entier*.

Les nombres entiers sont caractérisés par les propriétés fondamentales suivantes :

1° Ils doivent former *un domaine d'intégrité*, c'est-à-dire se reproduire par addition, soustraction et multiplication.

2° Ce domaine d'intégrité doit contenir *une unité principale*, « le nombre 1 ». Sinon, on aurait un système de nombres « entiers » dont aucun ne serait divisible par lui-même.

3° Ce domaine d'intégrité doit posséder *une base finie*; autrement dit, il doit être possible d'y choisir un nombre fini de complexes, disons $t_1, t_2, \dots, t_n$, jouissant de la propriété que voici : si $m_1, m_2, \dots, m_n$ désignent des nombres entiers ordinaires quelconques (positifs, nuls ou négatifs), l'expression

$$(10) \quad m_1 t_1 + m_2 t_2 + \dots + m_n t_n$$

doit pouvoir reproduire, par un choix convenable des nombres entiers m_i , *tous* les éléments du domaine envisagé. Réciproquement, le domaine d'intégrité en question doit se composer de *tous* les complexes, et *uniquement* des complexes, qu'on obtient en assignant, dans l'expression (10), aux nombres $m_1, m_2, \dots, m_n$, de toutes les manières possibles, des valeurs entières (positives, nulles ou négatives).

Nous appelons *domaine holoïde* tout ensemble de complexes jouissant de ces trois propriétés. En vertu de cette définition, tout domaine holoïde contient une infinité d'éléments, parmi lesquels « le nombre 1 » et le zéro; de plus, on peut y effectuer, sans restriction, l'addition, la soustraction, la multiplication, et cela sans jamais sortir du domaine; enfin, il possède une base finie. Or, pour caractériser les nombres entiers, il faut une quatrième propriété.

4° Ils doivent constituer un domaine holoïde qui soit *maximal*.

Définition. — Un domaine holoïde [H] est dit *maximal*,

lorsqu'il n'existe pas, dans le corps de nombres envisagé, un autre domaine holoïde contenant tous les éléments de $[H]$ et, en plus, des éléments qui ne font pas partie de $[H]$. La définition du complexe rationnel entier est alors la suivante : un nombre hypercomplexe rationnel

$$x \equiv \sum_{\lambda}^{1 \dots m} x_{\lambda} e_{\lambda}$$

est dit *entier*, s'il fait partie du domaine holoïde maximal en question ; le complexe rationnel x sera dit *non entier*, s'il n'est pas contenu dans ce domaine holoïde maximal.

En adoptant cette nouvelle définition et envisageant comme éléments les complexes « entiers » définis de *cette* façon, on peut construire, dans le domaine R , une arithmétique et une théorie des nombres, d'une simplicité analogue à celle de l'arithmétique classique, alors que la définition lipschitzienne conduit à une arithmomie non régulière. Cette nouvelle définition du nombre hypercomplexe entier peut avoir comme conséquence qu'on appellera *entiers* même certains complexes rationnels x à coordonnées x_{λ} fractionnaires ; inversement, il peut arriver que dans un domaine de rationalité donné R , certains complexes rationnels x ne soient pas réputés « entiers », bien que toutes leurs coordonnées x_{λ} soient des entiers ordinaires.

4. Par l'étude de différents systèmes de nombres hypercomplexes, nous avons établi les faits suivants :

1° L'opération qui consiste à scinder le corps de nombres envisagé en deux domaines dont l'un comprend les complexes *entiers*, l'autre les complexes *non entiers*, peut ne pas être univoque. Il existe, en effet, des systèmes de nombres hypercomplexes où le corps R constitué par l'ensemble des complexes rationnels contient plusieurs domaines holoïdes maximaux, très différents. Désignons-les par $\{M_1\}$, $\{M_2\}$, $\{M_3\}$, ... Dans un pareil système S_m , la définition du nombre hypercomplexe « entier » n'est plus univoque ; elle y devient relative. Elle dépend en effet du domaine holoïde maximal dont on se sert pour scinder le corps R . On est donc obligé de définir ainsi : un complexe rationnel x est dit « *entier par rapport au domaine* $\{M_p\}$ », s'il

est contenu dans $\{M_p\}$; et x est dit « non entier *par rapport* à $\{M_p\}$ », s'il ne fait pas partie du domaine holoïde maximal $\{M_p\}$.

Dans un pareil système S_m , un complexe rationnel t pris au hasard est-il *entier*? On ne pourra pas, en général, trancher cette question d'une manière absolue par oui ou par non. Il pourra se faire qu'on doive répondre : « Cela dépend », puisqu'il y a plusieurs manières de scinder le corps R en complexes entiers et non entiers. Or, il se trouve que certains complexes rationnels sont contenus dans *tous* les domaines holoïdes maximaux $\{M_p\}$, par exemple, les nombres entiers ordinaires. Pour cette raison, on pourrait les nommer *absolument entiers*. D'autres complexes rationnels ne sont contenus dans aucun des domaines holoïdes maximaux $\{M_p\}$; on pourrait les appeler *absolument fractionnaires*. Enfin, il y a une catégorie de complexes rationnels qu'on pourrait appeler *conditionnellement entiers*; ce sont ceux qui font partie d'un ou de plusieurs des domaines holoïdes maximaux $\{M_p\}$, mais pas de tous.

Au point de vue de l'arithmomie, un tel corps R se subdivise donc en trois groupes. On sait qu'il en est tout autrement du corps R des nombres rationnels ordinaires, du corps R des nombres complexes de Gauss, etc. Ces corps-là se subdivisent en deux groupes seulement; la catégorie des nombres « conditionnellement entiers » ou « conditionnellement fractionnaires » n'y existe pas.

2° Étant donné un corps R de complexes rationnels faisant partie d'un système S_m de nombres hypercomplexes, il peut arriver que R ne contienne *aucun* domaine holoïde maximal. Nous avons découvert ce fait surprenant en étudiant certains systèmes de tettarions. Dans un pareil système S_m , la définition du nombre hypercomplexe entier devient arbitraire, car sans domaine holoïde maximal, point de nombre *entier*. Aussi faut-il s'attendre *a priori* à ce que l'arithmomie basée sur une telle définition porte, elle aussi, l'empreinte plus ou moins profonde de l'arbitraire. L'expérience confirme cette présomption. Nous avons pensé qu'il n'était pas sans intérêt d'étudier à ce point de vue les différents systèmes connus de nombres hypercomplexes et d'indiquer pour chacun d'eux le domaine holoïde maximal, s'il y en a un seul, ou les domaines holoïdes maximaux, s'il y en a plusieurs. C'est l'objet du Chapitre suivant.

CHAPITRE II.

LES FORMES A DEUX ET A TROIS UNITÉS RELATIVES ET LEURS DOMAINES HOLOÏDES.

§. Nous commencerons par rappeler quelques définitions, en nous appuyant sur l'exposé de M. E. Cartan dans le Tome I de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées*.

α. Étant donnés n nombres hypercomplexes $a', a'', a''', \dots, a^{(n)}$, appartenant à un même système S_m , ces nombres sont dits *linéairement indépendants* s'il est impossible de trouver n nombres réels $m_1, m_2, \dots, m_n$, rationnels ou irrationnels, non tous nuls et tels que l'on ait

$$(11) \quad m_1 a' + m_2 a'' + m_3 a''' + \dots + m_n a^{(n)} \equiv 0.$$

Dire que « le système S_m est d'ordre m » signifie que l'on peut trouver, dans ce système, m nombres linéairement indépendants, mais non $m + 1$ qui le soient.

β. On appelle *base* du système S_m d'ordre m l'ensemble de m nombres hypercomplexes linéairement indépendants, d'ailleurs quelconques, par exemple les complexes $e_1, e_2, \dots, e_m$ définis par les formules (5). Chacun des nombres qui constitue la base est appelé *unité relative*, parfois simplement *unité*. Il y a une infinité de bases possibles dans un système S_m . La base une fois choisie, tout nombre γ de S_m peut se mettre, et d'une seule manière, sous la forme (4); réciproquement, à toute expression (4) correspond un nombre hypercomplexe $a \equiv (a_1, a_2, \dots, a_m)$ de S_m .

γ. Deux systèmes de nombres hypercomplexes S et S' sont dits *holoédriquement isomorphes*, si l'on peut établir entre les nombres de ces deux systèmes une correspondance uni-univoque qui satisfasse aux conditions suivantes : 1° à tout nombre a du premier correspond un et un seul nombre a' du second, et réciproquement; 2° à la somme et au produit de deux nombres quelconques a, b de l'un des systèmes correspondent respectivement la somme et le produit des deux nombres correspondants a', b' , de l'autre. Il s'ensuit que toute équation $F(a, b, c, \dots, g) = 0$ entre nombres du premier système subsiste si l'on remplace chacun des

nombres $a, b, c, \dots, g$ qui figure dans cette équation par son correspondant dans l'autre système : a par a' , b par b' , etc., pourvu que F représente un nombre fini d'additions, de soustractions, de multiplications et de divisions opérées sur les arguments entre parenthèses. On dit aussi, dans ce cas, que S' est une *permutation* du système S .

δ. Deux systèmes de nombres hypercomplexes sont dits *équivalents*, si l'un d'eux est holoédriquement isomorphe de l'autre ou réciproque d'un isomorphe de l'autre. Nous rangerons dans une même classe ou catégorie tous les systèmes équivalents entre eux et conviendrons de dire alors qu'ils *appartiennent à la même forme*. On appelle *ordre de la forme*, l'ordre commun des systèmes qui appartiennent à cette forme.

ε. Dans un système S_m à unités relatives $e_1, e_2, \dots, e_m$, choisissons une autre base $e'_1, e'_2, \dots, e'_m$, dont les termes e'_λ sont définis par les égalités

$$(12) \quad e'_\lambda = c_{\lambda 1} e_1 + c_{\lambda 2} e_2 + \dots + c_{\lambda m} e_m \quad (\lambda = 1, 2, \dots, m).$$

Si les c_λ sont des constantes réelles à déterminant non nul et qu'on envisage ces nombres hypercomplexes e_λ comme unités relatives d'un nouveau système S' , celui-ci sera équivalent à S_m . Il est à prévoir que S_m et S' auront les mêmes propriétés « essentielles », bien que la loi de multiplication dans l'un puisse être très différente de celle dans l'autre. Reste à savoir, d'ailleurs, quelles sont ces propriétés communes, invariantes en regard d'un changement de base.

Le problème général des nombres hypercomplexes, dans les hypothèses restrictives indiquées sous 1 et 2, consiste à déterminer toutes les formes d'ordre m et d'indiquer, pour chaque forme, un représentant particulier.

Ce problème est résolu pour $m = 2, 3, 4, 5$ et 6.

6. Nous indiquerons pour chacune des formes à 2 et à 3 unités un représentant particulier pour lequel les lois de la multiplication sont aussi simples que possible. Envisageant ensuite, dans ce système, le corps de nombres R constitué par l'ensemble des complexes rationnels, nous indiquerons :

1° Quel est le domaine holoïde le plus général dans R ; en

d'autres termes, quelle est, dans ce corps de nombres, la base la plus générale d'un domaine d'intégrité contenant le nombre 1, et deux, respectivement trois, complexes linéairement indépendants;

2° Combien de ces domaines holoïdes sont maximaux.

D'après les considérations qui précèdent, cela revient à dire si la définition du nombre hypercomplexe entier est univoque et bien déterminée, ou plurivoque, ou enfin indéterminée dans R. Remarquons que tous ces systèmes comprennent les nombres réels comme sous-système.

Formes à deux unités relatives.

En prenant le terme de *forme* dans le sens très général ci-dessus défini : multitude de tous les systèmes de nombres hypercomplexes équivalents entre eux, on démontre qu'il n'y a que trois formes à deux unités relatives. Elles satisfont toutes trois à la loi de commutativité de la multiplication.

Système n° 1. — La loi de multiplication est résumée par le Tableau suivant, où la flèche indique l'ordre de succession des facteurs du produit $e_i.e_k$. Ce produit se trouve à l'intersection de la ligne (horizontale) qui porte à gauche e_i et de la colonne (verticale) qui porte au haut e_k .

	e_0	e_1
e_0	e_0	e_1
e_1	e_1	e_0

L'unité relative e_0 joue le rôle du nombre 1. Ce système est isomorphe au système des nombres bicomplexes $a + bj$, où j est un symbole défini par $j^2 = -1$. Les règles de calcul de l'algèbre ordinaire y sont valables, à la seule exception près qu'il y existe des diviseurs de zéro; en d'autres termes, qu'un produit peut être nul sans qu'aucun des facteurs ne le soit, par exemple $(1 + j)(1 - j) = 0$.

Dans le corps R constitué par l'ensemble de ces nombres hypercomplexes rationnels, le domaine holoïde le plus général a pour base $t_1 = e_0$, $t_2 = \frac{g}{2}e_0 + \frac{g}{2}e_1$, où $g \neq 0$ représente un nombre entier d'ailleurs quelconque. Ledit corps R contient une infinité simple de domaines holoïdes correspondant aux diverses valeurs de g . Parmi eux, un seul est maximal, celui qui correspond à $g = 1$.

La définition du nombre entier est donc univoque dans ce système : est réputé « entier » tout nombre bicomplexe de la forme $(a + \frac{b}{2}) + \frac{b}{2}j$, où a et b représentent des nombres entiers ordinaires quelconques. Ici se présente le curieux phénomène qu'un nombre bicomplexe, quoique ayant des coordonnées fractionnaires, comme par exemple $\frac{1}{2} + \frac{9}{2}j$, doit être considéré comme « nombre entier » ⁽¹⁾.

Pour un système de nombres ayant t_1 et t_2 comme unités relatives, les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau que voici :

	t_1	t_2
t_1	t_1	t_2
t_2	t_2	gt_2

Système n° 2. — Les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau suivant :

	e_0	e_1
e_0	e_0	e_1
e_1	e_1	$-e_0$

⁽¹⁾ Voir L.-G. DU PASQUIER : *Sur les nombres complexes de deuxième et de troisième espèce* (Nouv. Ann. de Mathémat., 4^e série, t. XVIII, 1918).

L'unité relative e_0 joue le rôle du nombre 1. Ce système est isomorphe à celui des nombres complexes de Gauss $a + bi$, avec $i^2 = -1$. On sait que toutes les règles de calcul de l'algèbre ordinaire y sont valables. Dans le corps R constitué par l'ensemble des nombres complexes rationnels de Gauss, le domaine holoïde le plus général a pour base $t_1 \equiv 1, t_2 \equiv gi$, où $g \neq 0$ représente un nombre entier d'ailleurs quelconque.

Ce corps R contient une infinité simple de domaines holoïdes correspondant aux diverses valeurs entières de g . Parmi eux, un seul est maximal, celui qui correspond à $g = 1$, le domaine $[1, i]$. La définition du nombre complexe entier y est donc univoque : est réputé « entier » tout nombre complexe $a + bi$ à coordonnées a, b , entières.

Pour un système de nombres bicomplexes ayant $t_1 \equiv e_0, t_2 \equiv ge_1$ comme unités relatives et par conséquent équivalent au système n° 2, les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau

$\mathcal{I}$	t_1	t_2
t_1	t_1	t_2
t_2	t_2	$-g^2 t_1$

Système n° 3. — Les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau suivant :

$\mathcal{I}$	e_0	e_1
e_0	e_0	e_1
e_1	e_1	0

L'unité relative e_0 joue le rôle du nombre 1. Ce système est isomorphe à celui des nombres bicomplexes $a + b\omega$, où ω est un

symbole défini par $\omega^2 = 0$. Toutes les règles de calcul de l'algèbre ordinaire y sont valables, à la seule exception près qu'il y existe des diviseurs de zéro, les nombres de la forme $r\omega$. *Dans le corps R constitué par l'ensemble de ces nombres bicomplexes rationnels, le domaine holoïde le plus général a pour base $t_1 = e_0$, $t_2 = \alpha e_1$, où $\alpha = \frac{n}{g}$ représente un nombre commensurable non nul d'ailleurs quelconque, n et g désignant des nombres entiers ordinaires $\neq 0$. Ledit corps de nombres R contient donc une infinité de domaines holoïdes correspondant aux diverses valeurs possibles de $\alpha \neq 0$. De tous ces domaines holoïdes, aucun n'est maximal. Il s'ensuit que, dans ce système de nombres bicomplexes, la définition du complexe « entier » est, en un certain sens, arbitraire.*

En résumé, parmi les trois formes à deux unités relatives, il s'en trouve deux où la définition du nombre complexe entier est univoque et absolue, et une où cette définition est arbitraire.

Formes à trois unités relatives.

7. Système n° 1. — Les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau suivant, où la flèche indique l'ordre de succession

f	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	0
e_1	e_1	e_0	0
e_2	0	0	e_2

des facteurs du produit $e_i e_k$ ($i, k, = 1, 2, 3$). Dans ce système de nombres, la somme $e_0 + e_2$ joue le rôle du nombre 1, et les lois fondamentales de l'algèbre ordinaire y sont valables, à la seule exception près qu'un produit peut être nul sans qu'aucun des

facteurs ne le soit, par exemple

$$(2e_0 + e_1 + 2e_2)(e_0 - e_1) = 0.$$

Dans le corps R constitué par l'ensemble de ces complexes rationnels, le domaine holoïde le plus général a pour base

$$(13) \quad \begin{cases} t_1 = ge_0, \\ t_2 = e_0 + e_2, \\ t_3 = \left(b + \frac{a}{2}\right)e_0 + \frac{a}{2}e_1, \end{cases}$$

où a, b, g sont trois nombres entiers soumis aux seules conditions

$$(13') \quad a \neq 0, \quad g \neq 0, \quad b(a+b) \equiv 0 \pmod{g}.$$

Ledit corps R contient donc une infinité double de domaines holoïdes, correspondant aux diverses valeurs de a, b, g . Parmi eux, un seul est maximal : celui qui correspond à $a = g = 1, b = 0$. Il a pour base

$$t_1 = e_0, \quad t_2 = e_2, \quad t_3 = \frac{1}{2}(e_0 + e_1).$$

Il s'ensuit que, dans ce système de nombres tricomplexes, la définition du nombre « entier » est univoque et absolue. Sera réputé *entier* tout complexe de la forme

$$\left(n_0 + \frac{n_1}{2}\right)e_0 + \frac{n_1}{2}e_1 + n_2e_2,$$

où les n_i représentent des nombres entiers ordinaires d'ailleurs quelconques. Réciproquement : on obtient tous les nombres complexes *entiers*, et seulement ceux-là, en faisant parcourir à n_1, n_2, n_3 , indépendamment les uns des autres, la suite des nombres entiers ordinaires de $-\infty$ à $+\infty$. On voit que, parmi ces nombres complexes « entiers », il s'en trouve une infinité à coordonnées fractionnaires.

En prenant les termes de la base (13) comme unités relatives, on obtient un nouveau système de nombres tricomplexes, équivalent au système n° 1; les lois de la multiplication dans ce système sont résumées par le Tableau ci-après, où g_1 est le nombre

entier que définit l'équation $gg_1 + b(a+b) = 0$, dans laquelle a, b, g sont donnés et, par hypothèse, tels que g_1 soit entier.

$\mathcal{I}$	t_1	t_2	t_3
t_1	gt_1	t_1	gt_3
t_2	t_1	t_2	t_3
t_3	gt_3	t_3	$g_1t_1 + (a+2b)t_2$

Système n° 2. — Les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau suivant qui montre que le système est réductible.

$\mathcal{I}$	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	0
e_1	e_1	$-e_0$	0
e_2	0	0	e_2

L'unité principale, dans ce système, est $e_0 + e_2 = 1$, et les lois fondamentales de l'algèbre ordinaire y sont valables, à la seule exception près que le système admet des diviseurs de zéro, puisque, par exemple, $e_1e_2 = 0$.

Dans le corps R constitué par l'ensemble des complexes rationnels, le domaine holoïde le plus général a pour base

$$t_1 = ge_0,$$

$$t_2 = e_0 + e_2,$$

$$t_3 = ae_0 + be_1,$$

où $b \neq 0$, $g \neq 0$ et a sont trois nombres entiers ordinaires tels que

$$(14) \quad a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{g}.$$

Ce corps R contient une infinité double de domaines holoïdes.

correspondant aux diverses valeurs que peuvent prendre a, b et g . Parmi eux, un seul est maximal, celui qui correspond à $b = g = 1, a = 0$; c'est donc l'ensemble des complexes à coordonnées entières. Il s'ensuit que dans ce système, la définition du nombre complexe « entier » est univoque et absolue, et qu'elle se confond avec la définition lipschitzienne (voir l'article 3).

En prenant les termes de la base ci-dessus pour unités relatives, on obtient un nouveau système de nombres tricomplexes, équivalent au système n° 2, et dans lequel les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau ci-dessous, où g_1 est le nombre que

$\nearrow$	t_1	t_2	t_3
t_1	gt_1	t_1	gt_3
t_2	t_1	t_2	t_3
t_3	gt_3	t_3	$gat_3 - g_1t_1$

définit l'équation $gg_1 + a^2 + b^2 = 0$, nombre qui est entier en vertu de (14).

Système n° 3. — Les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau suivant. — Dans ce système, l'unité relative e_0 est

$\nearrow$	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	0	0
e_2	e_2	0	e_2

en même temps l'unité principale, de sorte qu'on peut poser $e_0 = 1$. Les lois fondamentales de l'algèbre ordinaire sont valables dans

ce système, à la seule exception près qu'un produit peut y être nul sans qu'aucun des facteurs ne le soit, par exemple $e_1, e_2 = 0$.

Dans le corps R constitué par l'ensemble de ces complexes rationnels, le domaine holoïde le plus général a pour base

$$t_1 = e_0,$$

$$t_2 = ze_1,$$

$$t_3 = \beta e_1 + ge_2,$$

où g est un nombre entier non nul d'ailleurs quelconque, z un nombre rationnel non nul et β un nombre rationnel, arbitrairement choisis, liés par la relation

$$(15) \quad g\beta = g_1z,$$

dans laquelle g_1 représente un nombre entier quelconque.

Ce corps R contient donc une infinité triple de domaines holoïdes. *Parmi eux, aucun n'est maximal.* Il s'ensuit que, dans ce corps R, la définition du complexe « entier » est en un certain sens arbitraire.

Remarquons que ce système est isomorphe au système de nombres tricomplexes $a + bj + c\omega$, où les coordonnées a, b, c sont réelles quelconques et j, ω des symboles définis par les égalités

$$(16) \quad j^2 = j, \quad \omega^2 = 0, \quad j\omega = \omega j = 0.$$

En prenant les termes de la base ci-dessus comme unités relatives, on peut construire un nouveau système de nombres tricomplexes, équivalent au système n° 3 et dans lequel les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau ci-dessous, où g_1 , entier

i	t_1	t_2	t_3
t_1	t_1	t_2	t_3
t_2	t_2	0	0
t_3	t_3	0	$gt_3 - g_1t_2$

figurant dans l'équation (15), peut être choisi arbitrairement, et où g représente un entier non nul.

Système n° 4. — Les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau suivant :

i	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2	0
e_2	e_2	0	0

Dans ce système, l'unité relative e_0 est en même temps l'unité principale et joue le rôle du nombre 1. Les lois fondamentales de l'algèbre ordinaire y sont valables, à la seule exception près qu'un produit peut être nul sans qu'aucun des facteurs ne le soit, par exemple $7e_2(10e_1 + 19e_2) = 0$.

Dans le corps R constitué par l'ensemble de ces complexes rationnels, le domaine holoïde le plus général a pour base

$$t_1 = e_0,$$

$$t_2 = \frac{x^2}{g} e_2,$$

$$t_3 = \beta e_2 + x e_1,$$

où $g \neq 0$ est un nombre entier, x un nombre rationnel non nul et β un nombre commensurable arbitraire.

Ce corps R contient donc une infinité triple de domaines holoïdes correspondant aux diverses valeurs que peuvent prendre x , β et g . Or, *aucun d'entre eux n'est maximal*. En conséquence, la définition du nombre complexe « entier » dans ce corps R est en un certain sens arbitraire. On vérifie que, le

choix de z, β et g une fois fait, les produits $t_i, t_k (i, k = 1, 2, 3)$ sont donnés par ce Tableau-ci :

$\nearrow$	t_1	t_2	t_3
t_1	t_1	t_2	t_3
t_2	t_2	0	0
t_3	t_3	0	$g t_2$

Le système n° 4 est équivalent à celui que définit le Tableau de multiplication ci-dessous. Dans ce dernier système, le corps R ne

$\nearrow$	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	0	0
e_1	0	0	e_1
e_2	0	0	0

possède pas non plus de domaine holoïde maximal. Ils sont tous deux isomorphes au système de nombres tricomplexes $a + bi' + c\omega'$, où les coordonnées a, b, c sont réelles quelconques et i', ω' des symboles obéissant aux relations

$$(17) \quad i'^2 = \omega', \quad \omega'^2 = 0, \quad i'\omega' = \omega'i' = 0.$$

Système n° 5. Les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau suivant. Dans ce système, c'est encore l'unité relative e_0 qui est l'unité principale, en sorte qu'on peut poser $e_0 = 1$. Les lois fondamentales de l'algèbre ordinaire n'y sont valables qu'à deux exceptions près :

1° La multiplication n'est pas commutative en général, par exemple $e_1 e_2 = -e_2 e_1$;

2° Un produit peut être nul sans qu'aucun des facteurs ne le soit, par exemple $(3e_0 + 3e_1 + 15e_2)(e_0 - e_1 + 5e_2) = 0$.

$\nearrow$	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	e_0	e_2
e_2	e_2	$-e_2$	0

Dans le corps R des complexes rationnels, le domaine holoïde le plus général a pour base

$$t_1 = e_0,$$

$$t_2 = ze_2,$$

$$t_3 = \frac{g}{2}e_0 + \beta e_2 + \frac{g}{2}e_1,$$

où g représente un nombre entier non nul, z un nombre rationnel non nul d'ailleurs quelconque et β un nombre commensurable arbitrairement choisi. Ce corps R contient donc une infinité triple de domaines holoïdes, correspondant aux diverses valeurs que peuvent prendre g, z, β . On démontre que, *parmi eux, aucun n'est maximal*. En conséquence, la définition du nombre complexe « entier » dans ce corps R reste arbitraire.

Remarquons que ce système n° 3 est isomorphe au système des nombres tricomplexes $a + bf + c\omega$, où les coordonnées a, b, c sont réelles quelconques et f, ω des symboles obéissant aux relations

$$(18) \quad f'^2 = 1, \quad \omega^2 = 0, \quad f'\omega = -\omega f' = \omega.$$

Le système n° 3 est équivalent à celui que définit le Tableau de multiplication suivant. Dans ce dernier système, à multiplication non commutative, le corps R contient aussi une infinité de domaines holoïdes dont aucun n'est maximal. Il est d'ailleurs isomorphe au système des nombres tricomplexes $a + bf + c\omega'$,

où les coordonnées a, b, c sont réelles et j, ω' des symboles ou unités relatives satisfaisant aux égalités

$$(19) \quad j^2 = j, \quad \omega'^2 = 0, \quad j\omega' = \omega', \quad \omega'j = 0.$$

j	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	0	0
e_1	e_1	0	0
e_2	e_2	e_1	e_2

On vérifie que la multiplication des termes de la base ci-dessus entre eux est résumée par ce Tableau :

j	t_1	t_2	t_3
t_1	t_1	t_2	t_3
t_2	t_2	0	0
t_3	t_3	gt_2	gt_3

Système n° 6. — Les lois de la multiplication sont résumées par le Tableau ci-dessous. L'unité relative e_0 est en même temps l'unité

j	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	0	0
e_2	e_2	0	0

principale du système; elle y joue le rôle du nombre 1. Les lois fondamentales de l'algèbre ordinaire y sont valables, à la seule exception près qu'un produit peut être nul sans qu'aucun des facteurs ne le soit; ainsi, $(\alpha e_1 + \beta e_2)(\gamma e_1 + \delta e_2) = 0$ quels que soient les nombres réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Dans le corps R constitué par l'ensemble des complexes rationnels, le domaine holoïde le plus général a pour base

$$\begin{aligned} t_1 &= e_0, \\ t_2 &= \alpha e_1, \\ t_3 &= \beta e_1 + \gamma e_2. \end{aligned}$$

où α et γ représentent deux nombres rationnels non nuls d'ailleurs quelconques, et β un nombre rationnel arbitraire.

Ce corps R contient donc une infinité triple de domaines holoïdes, correspondant aux diverses valeurs de α, β, γ . Or, *aucun d'eux n'est maximal*. Il s'ensuit que, dans ce corps R, la définition du complexe entier reste arbitraire.

On vérifie que la multiplication des termes t_i de la base ci-dessus, quels que soient α, β, γ , est résumée par le Tableau que voici :

$\nearrow$	t_1	t_2	t_3
t_1	t_1	t_2	t_3
t_2	t_2	0	0
t_3	t_3	0	0

Remarquons que le système n° 6 est isomorphe au système des nombres tricomplexes $a + b\omega + c\omega'$, où les coordonnées a, b, c sont des nombres réels, et ω, ω' des symboles (ou unités relatives) définies par les égalités

$$(20) \quad \omega^2 = 0, \quad \omega'^2 = 0, \quad \omega\omega' = \omega'\omega = 0.$$

En résumé, parmi les six formes à trois unités relatives, il n'y en a que deux où la définition du nombre hypercomplexe « entier » soit univoque et absolue. Dans les quatre autres formes, cette définition est empreinte d'arbitraire, et il en résulte une arithmologie non régulière.

SUR LES VARIÉTÉS DE COURBURE CONSTANTE D'UN ESPACE EUCLIDIEN OU NON EUCLIDIEN

(Suite) ⁽¹⁾;

Par M. E. CARTAN.

A la fin de la partie déjà parue de ce Mémoire ⁽²⁾, il était question du problème suivant :

Trouver r formes quadratiques indépendantes $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_r$, appartenant à un réseau linéaire donné

$$\lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \dots + \lambda_r \Phi_r,$$

et qui soient extérieurement orthogonales.

Pour résoudre ce problème, on cherche, comme il a été dit, toutes les formes quadratiques définies positives $\Pi(u_1, \dots, u_r)$ par rapport auxquelles les r formes données $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ sont extérieurement conjuguées; les formes demandées $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ se déduisent alors des formes données par la substitution linéaire qui, effectuée sur les indéterminées u , ramène la forme quadratique définie $\Pi(u)$ à la forme quadratique

$$K(v) = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_r^2.$$

A chaque forme quadratique définie $\Pi(u)$ ne correspond qu'une solution du problème, à condition de ne pas regarder comme distinctes deux solutions pour lesquelles les formes Ψ se déduisent

⁽¹⁾ Voir *Bulletin de la Société mathématique*, t. XLVII, p. 125-160.

⁽²⁾ *Loc. cit.*, p. 160.

les unes des autres par une substitution orthogonale. Dans certains cas il y aura intérêt également à ne pas regarder comme distinctes deux solutions se déduisant l'une de l'autre par une substitution linéaire convenable sur $x_1, \dots, x_n$.

La détermination des formes quadratiques Π par rapport auxquelles les formes $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ sont extérieurement orthogonales revient évidemment à la résolution d'un système d'équations linéaires entre les coefficients $\Lambda_{\lambda\mu}$.

23. Prenons par exemple la totalité des formes quadratiques à n variables, soit

$$\Phi_{(ij)} = \theta_{ij} x_i x_j \quad (i, j = 1, \dots, n; \theta_{ii} = 1, \theta_{ij} = 2 \text{ si } i \neq j).$$

On trouve sans difficulté que les coefficients $\Lambda_{(\lambda\mu)(\nu\rho)}$ de la forme quadratique $\Pi(u)$ à $\frac{n(n+1)}{2}$ variables satisfont aux relations

$$\begin{aligned} \Lambda_{\lambda\lambda|\mu\mu} &= \Lambda_{(\lambda\mu)(\lambda\mu)}, \\ \Lambda_{\lambda\lambda|\mu\nu} &= \Lambda_{\lambda\mu|\lambda\nu}, \\ \Lambda_{(\lambda\mu)(\nu\rho)} &= \Lambda_{(\lambda\nu)(\rho\mu)} = \Lambda_{(\lambda\rho)(\mu\nu)}. \end{aligned}$$

Ces formules nous serviront plus loin.

24. On peut enfin se proposer le problème général suivant :

Étant donné un réseau linéaire de formes quadratiques admettant pour formes de base φ formes $\Phi_1, \dots, \Phi_\varphi$ linéairement indépendantes, trouver dans ce réseau $r \geq \varphi$ formes $\Psi_1, \dots, \Psi_r$, dont φ linéairement indépendantes, qui soient extérieurement conjuguées par rapport à une forme quadratique donnée à r variables Π .

On adjoindra aux φ formes données $\Phi_1, \dots, \Phi_\varphi$ un système de $r - \varphi$ nouvelles formes $\Phi_{\varphi+1}, \dots, \Phi_r$ identiquement nulles, on cherchera toutes les formes quadratiques K par rapport auxquelles les r formes $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ sont extérieurement conjuguées et l'on cherchera, si c'est possible, les substitutions linéaires qui transforment les formes K dans la forme donnée Π : les mêmes substitutions, appliquées aux formes $\Phi_1, \dots, \Phi_r$, donneront les formes cherchées $\Psi_1, \dots, \Psi_r$.

Prenons par exemple

$$p = 1, \quad r = 2 \quad \text{et} \quad H(u) = u_1^2 - u_2^2.$$

Si la forme Φ_1 est un carré parfait, la forme K est arbitraire et l'on prendra

$$\Psi_1 = a_1 \Phi_1, \quad \Psi_2 = a_2 \Phi_1,$$

avec deux coefficients arbitraires a_1, a_2 . Si, au contraire, la forme Φ_1 n'est pas un carré parfait, on voit immédiatement qu'on a

$$\Psi_1 = \pm \Psi_2 = a \Phi_1,$$

le coefficient a étant arbitraire. On remarquera la différence profonde qui existe entre les cas où $H(u)$ est une forme indéfinie et celui où $H(u)$ est une forme définie : *dans ce dernier cas la forme Φ_1 est nécessairement un carré parfait*, le problème étant impossible si Φ_1 ne satisfait pas à cette condition.

23. *Les formes quadratiques complexes extérieurement orthogonales.* — Ce qui précède fait pressentir que la théorie des formes *complexes* extérieurement orthogonales est profondément différente de celle des formes *réelles*. Contentons-nous des trois remarques suivantes :

1° La détermination des formes à n variables extérieurement orthogonales non linéairement indépendantes *ne revient pas* à la détermination des formes extérieurement orthogonales linéairement indépendantes; si en effet il existe entre $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ les p relations identiques

$$a_1 \Phi_1 + \dots + a_r \Phi_r = 0,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$l_1 \Phi_1 + \dots + l_r \Phi_r = 0,$$

il n'existe pas nécessairement une substitution orthogonale, effectuée sur les *lettres* $\Phi_1, \dots, \Phi_r$, et ramenant ces relations à la forme

$$\Phi_{r-p+1} = \dots = \Phi_r = 0;$$

cela revient à dire par exemple que, dans l'espace rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, l'équation d'un plan ne

peut pas toujours être ramenée à la forme

$$z = 0,$$

ou l'équation d'une droite à la forme

$$y = z = 0 :$$

il suffit en effet de prendre un plan isotrope ou une droite isotrope. Du reste, il est évident que les deux formes

$$\Phi, \quad i\Phi \quad (i^2 = -1)$$

sont extérieurement orthogonales, même si l'unique forme Φ ne l'est pas.

2° Dans le cas des formes *réelles*, on ne peut pas, étant donné un réseau $\lambda_1 \Phi_1 + \dots + \lambda_\varphi \Phi_\varphi$ admettant φ formes de base linéairement indépendantes *quelconques*, trouver $r \geq \varphi$ formes de ce réseau qui soient extérieurement orthogonales, et cela quelque grand que soit r (du reste la valeur de r comme on sait ne joue ici aucun rôle). Au contraire, dans le cas des formes complexes, on peut partir d'un réseau *arbitraire* et l'on peut toujours trouver r formes de ce réseau extérieurement orthogonales, *pourvu que r soit assez grand*; il suffit en particulier de prendre $r \geq 2\varphi$: les formes

$$\Phi_1, \quad i\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad i\Phi_2, \quad \dots, \quad \Phi_\varphi, \quad i\Phi_\varphi$$

sont en effet extérieurement orthogonales.

3° Le théorème général du n° 20, même si l'on suppose les formes considérées linéairement indépendantes, peut tomber en défaut : c'est ainsi que pour $r = n = 2$, les formes

$$\Phi_1 = x_1^2 + 2x_1x_2, \quad \Phi_2 = 2ix_1x_2$$

sont extérieurement orthogonales et cependant elles ne peuvent pas se déduire, par une substitution orthogonale, de deux formes carrés parfaits, puisque le réseau $\lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2$ ne contient qu'une forme carré parfait, à savoir x_1^2 .

CHAPITRE III.

LES FORMES BILINÉAIRES ALTERNÉES, LES COVARIANTS BILINÉAIRES ET LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS EN INVOLUTION.

26. Considérons une expression de Pfaff à n variables $x_1, \dots, x_n$, soit

$$\omega_d = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n.$$

On sait qu'on appelle *covariant bilinéaire* de l'expression ω l'expression

$$d\omega_{\hat{\delta}} - \hat{\delta}\omega_d,$$

où d et $\hat{\delta}$ désignent deux symboles de différentiation *échangeables entre eux* ; on a

$$d\omega_{\hat{\delta}} - \hat{\delta}\omega_d = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) dx_i \hat{\delta} x_j.$$

Le second membre est manifestement une forme bilinéaire *alternée* des deux séries de variables $dx_1, \dots, dx_n$; $\hat{\delta}x_1, \dots, \hat{\delta}x_n$; on a en effet

$$d\omega_{\hat{\delta}} - \hat{\delta}\omega_d = \sum_{ij} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) (dx_i \hat{\delta} x_j - dx_j \hat{\delta} x_i),$$

la somme du second membre étant étendue à toutes les combinaisons deux à deux des indices $1, 2, \dots, n$. A cette forme bilinéaire alternée nous associerons une forme quadratique alternée, comme il est dit au n° 7, que nous continuerons à appeler le covariant bilinéaire de ω et que nous désignerons par la notation ω' . Nous écrirons donc

$$\omega' = \sum_{ij} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) [dx_i dx_j].$$

Les variables étant ici $dx_1, \dots, dx_n$, nous définirons comme plus haut le produit extérieur de deux formes linéaires en $dx_1, \dots, dx_n$, c'est-à-dire de deux expressions de Pfaff. Remarquons qu'on peut poser

$$\omega' = [da_1 dx_1] + [da_2 dx_2] + \dots + [da_n dx_n],$$

et, si m désigne un coefficient, fonction finie de $x_1, \dots, x_n$, on a

$$(m\omega)' = m.\omega + [dm, \omega];$$

enfin, si u et v sont deux fonctions quelconques, le covariant bilinéaire de $u dv$ est $[du, dv]$.

Le covariant bilinéaire d'une différentielle totale exacte est identiquement nul et *réciroquement*.

27. Considérons un système de s équations de Pfaff linéairement indépendantes à $n + s$ variables, soit

$$(16) \quad \begin{cases} \theta_1 = 0, \\ \theta_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \theta_s = 0. \end{cases}$$

Un tel système est dit *complètement intégrable* si, considéré comme un système d'équations aux différentielles totales à s fonctions inconnues de n variables indépendantes, il admet toujours une solution (et une seule) telle que, pour des valeurs numériques données des variables indépendantes, les fonctions inconnues prennent des valeurs numériques arbitrairement données. On démontre au sujet de ces systèmes le *théorème de Frobenius* qui donne la condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité complète :

Pour que le système de Pfaff (16) soit complètement intégrable, il faut et il suffit que les covariants bilinéaires $\theta'_1, \dots, \theta'_s$ des premiers membres s'annulent quand on suppose les différentielles $dx_1, \dots, dx_{n+s}$ liées par les relations (16) elles-mêmes.

On se rend du reste facilement compte que cette condition est indépendante du choix des variables et aussi qu'elle est ou non simultanément vérifiée par deux systèmes (16) algébriquement équivalents en $dx_1, dx_2, \dots, dx_{n+s}$.

28. *Systèmes de Pfaff en involution.* — Supposons maintenant que le système (16) soit à $n + r$ variables ($r \geq s$) dont r fonctions inconnues de n variables indépendantes. Une variété

à $v \leq n$ dimensions (définie par $n + r - v$ relations entre les $n + r$ variables) sera dite une variété *intégrale* du système (16) si les équations (16) sont vérifiées pour tout déplacement infiniment petit sur cette variété.

Cela posé, le système (16) est dit en *involution* si par tout point arbitraire de l'espace à $n + r$ dimensions il passe au moins une variété intégrale à 1 dimension, si par toute variété intégrale arbitraire à 1 dimension il passe au moins une variété intégrale à 2 dimensions, et ainsi de suite : si enfin par toute variété intégrale arbitraire à $n - 1$ dimensions il passe au moins une variété intégrale à n dimensions.

Choisissons $n + r - s$ expressions de Pfaff $\omega_1, \dots, \omega_{n+r-s}$ indépendantes entre elles et indépendantes de $\theta_1, \dots, \theta_s$. Les covariants bilinéaires $\theta'_1, \dots, \theta'_s$ peuvent s'exprimer comme des formes quadratiques alternées des θ_i et des ω_i . Si l'on y fait $\theta_1 = \dots = \theta_s = 0$, ils se réduisent à des formes quadratiques alternées de $\omega_1, \dots, \omega_{n+r-s}$. Pour toute variété intégrale du système (16), ces s formes quadratiques alternées, ou plutôt les s formes bilinéaires alternées qui leur sont associées, s'annulent si l'on regarde les deux séries de variables comme caractérisant deux déplacements infiniment petits quelconques sur la variété. Les s équations quadratiques alternées obtenues en annulant $\theta'_1, \dots, \theta'_s$ [et en tenant compte des équations (16)] seront dites les *relations quadratiques alternées dérivées* des équations (16).

Supposons que $\omega_1, \dots, \omega_n$ soient n expressions de Pfaff, combinaisons linéaires indépendantes des différentielles des n variables indépendantes, et désignons par $\pi_1, \dots, \pi_q$ ($q = r - s$) les autres expressions ω . On peut toujours se ramener au cas où les relations quadratiques alternées dérivées des équations (16) sont de la forme

$$(17) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=q} a_{ijk} [\omega_i \pi_j] = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s),$$

où les a_{ijk} sont des coefficients fonctions finies des variables.

Plaçons-nous dans ce cas. On peut alors énoncer de la manière suivante la condition nécessaire et suffisante d'involution du système (16) :

$q = (s_1 + \dots + s_{n-1})$ fonctions arbitraires de n arguments si

$$q > s_1 + \dots + s_{n-1};$$

de s_{n-1} fonctions de $n - 1$ arguments si

$$q = s_1 + \dots + s_{n-1}, \quad s_{n-1} > 0;$$

de s_{n-2} fonctions de $n - 2$ arguments si

$$q = s_1 + \dots + s_{n-2}, \quad s_{n-1} = 0, \quad s_{n-2} > 0;$$

de s_1 fonctions de 1 argument si

$$q = s_1, \quad s_{n-1} = \dots = s_2 = 0, \quad s_1 > 0;$$

de s constantes arbitraires si

$$q = s_{n-1} = \dots = s_2 = s_1 = 0.$$

Dans le dernier cas, on retombe sur un système complètement intégrable.

Un cas particulier important est celui où le nombre des expressions

$$\sum_{j=1}^{i=q} a_{ijk} \varpi_j \quad (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, s)$$

qui sont linéairement indépendantes est égal à q ; on a alors

$$q = s_1 + \dots + s_{n-1} + s_n.$$

La condition d'involution est que les expressions obtenues en résolvant les équations (17) par rapport à $\varpi_1, \dots, \varpi_q$ dépendent de

$$s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n$$

paramètres arbitraires; la solution générale dépend de s_α fonctions arbitraires de α arguments si l'on a

$$s_\alpha > 0, \quad s_{\alpha+1} = \dots = s_\mu = 0.$$

29. Nous aurons en fait à considérer des systèmes différentiels de la nature suivante. Ils seront formés de s_α équations linéaires par rapport aux différentielles de $n + s$ variables, $x_1, \dots, x_{n+s}$,

système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre équivalent à (16) peut être formé de $sn - q' > sn - q$ équations indépendantes. Les équations (18) nous permettent facilement de connaître la valeur minimum de q' et de trouver $n + s + q'$ expressions de Pfaff linéairement indépendantes par rapport aux différentielles $dx_1, \dots, dx_{n+s}, du'_1, \dots, du'_{q'}$.

Considérons en effet le système d'équations linéaires

$$(19) \quad \begin{cases} \theta_1 = \dots = \theta_s = 0, \\ \omega_1 = \dots = \omega_n = 0, \\ \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \omega_1} = \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \omega_2} = \dots = \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \omega_n} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \end{cases}$$

Ce système est indépendant du choix des expressions θ , ω et π , pourvu naturellement que les nouvelles expressions θ soient des combinaisons linéaires indépendantes des anciennes, que les nouvelles expressions θ et ω soient des combinaisons linéaires indépendantes des anciennes, et enfin que les nouvelles expressions θ , ω et π soient des combinaisons linéaires indépendantes des anciennes. Supposons alors que, les expressions θ étant indépendantes par rapport à $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+s}$, on prenne

$$\begin{aligned} \theta_\alpha &= dx_{n+\alpha} - a_{n+\alpha,1} dx_1 - \dots - a_{n+\alpha,n} dx_n \quad (\alpha = 1, \dots, s), \\ \omega_i &= dx_i, \quad \pi_j = du_j \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, q), \end{aligned}$$

on aura

$$\theta_\alpha = \sum_{j=1}^n c_{ij\alpha} [dx_i dx_j] + \sum_{i=1}^n \left[dx_i \left(\sum_{j=1}^{j=q} \frac{\partial a_{n+\alpha,i}}{\partial u_j} du_j \right) \right] \quad (\alpha = 1, \dots, s),$$

où les coefficients $c_{ij\alpha}$ ont des valeurs qu'il est inutile d'écrire. Le système (19) est alors

$$(19') \quad \begin{cases} dx_1 = \dots = dx_{n+s} = 0, \\ \sum_{j=1}^{j=q} \frac{\partial a_{n+\alpha,i}}{\partial u_j} du_j = 0 \quad (i = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, s). \end{cases}$$

On voit que le nombre des équations (19) linéairement indépendantes est égal à $n + s + q'$, où q' est le nombre cherché et que les premiers membres de ces $n + s + q'$ équations linéairement indépendantes sont les expressions de Pfaff cherchées.

En définitive, on n'a pas à se préoccuper de la question de savoir si les variables auxiliaires entrent en nombre surabondant; on peut toujours supposer en fait que ce nombre est réduit au minimum, qui est le nombre des expressions

$$\sum_{j=1}^{j=q} a_{ij\alpha} \pi_j$$

linéairement indépendantes.

31. Cela posé, revenons au système donné. S'il est compatible, c'est-à-dire s'il admet au moins une solution, pour cette solution les θ_α sont nulles et par suite les Θ_α ; les expressions π_i sont des combinaisons linéaires des ω_i et l'on peut toujours, en ajoutant au besoin aux π_i des combinaisons linéaires des ω_i , supposer que les π_i sont nulles; les équations (18) exigent alors que les coefficients $c_{ij\alpha}$ soient tous nuls. Autrement dit, si le système est compatible, on peut supposer les coefficients $c_{ij\alpha}$ tous nuls. On est alors ramené à l'hypothèse examinée au n° 28, mais dans le cas particulier où l'on a

$$q = s_1 + s_2 + \dots + s_n.$$

Si le système est en involution, la question de l'existence et du degré d'indétermination des solutions est résolue. S'il n'est pas en involution, on le prolongera en prenant comme nouvelles variables dépendantes $u_1, \dots, u_q$ (q étant réduit à sa valeur minimum). Pour cela, on cherchera à résoudre de la manière la plus générale possible les équations (18) en $\pi_1, \dots, \pi_q$, considérées comme linéaires en $\omega_1, \dots, \omega_n$; les coefficients dépendront d'un certain nombre de paramètres indépendants $c_1, \dots, c_{q_1}$. On sera ramené au problème primitif, sauf que s sera remplacé par $s + q$ et q par q_1 . On est sûr, d'après un théorème général, qu'en répétant ce procédé un certain nombre suffisant de fois, on arrivera soit à un système incompatible, soit à un système en involution.

On peut aussi prolonger le système (16) d'une manière partielle en adjoignant aux équations (16) celles qui expriment un nombre $q' < q$ de combinaisons linéaires de $\pi_1, \dots, \pi_q$ en

fonctions linéaires de $\omega_1, \dots, \omega_n$; mais il faut alors que le système obtenu en annulant les θ , les ω et ces q' combinaisons linéaires de $\varpi_1, \dots, \varpi_q$ soit *complètement intégrable*, les intégrales de ce système jouant le rôle de nouvelles variables x , en nombre $n + s + q'$.

32. Pour abréger le langage, nous dirons que les expressions $\omega_1, \dots, \omega_n$ sont les expressions de Pfaff *principales*, les expressions ϖ étant dites *secondaires*.

Un système d'équations quadratiques extérieures de la forme (17), avec des variables principales ω_i et des variables secondaires ϖ_j fonctions linéaires inconnues des variables principales, sera dit *involutif* s'il satisfait aux conditions énoncées au n° 28.

Supposons que le système (17) se décompose en deux systèmes partiels

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=x} a_{ijk} [\omega_i \varpi_j] = 0 \quad (k = 1, \dots, \sigma),$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=x'} b_{ijk} [\omega_i \gamma_j] = 0 \quad (k = 1, \dots, \sigma'),$$

avec deux séries de variables secondaires $\varpi_1, \dots, \varpi_x$; $\gamma_1, \dots, \gamma_{x'}$, indépendantes entre elles. *Pour que le système total soit involutif, il faut et il suffit que chacun des systèmes partiels le soit.* Soient en effet

$$\sigma, \quad \sigma_1, \quad \dots, \quad \sigma_n;$$

$$\sigma', \quad \sigma'_1, \quad \dots, \quad \sigma'_n$$

les nombres qui, pour chacun des systèmes partiels, jouent le rôle des entiers

$$s, \quad s_1, \quad \dots, \quad s_n.$$

On a évidemment

$$s = \sigma + \sigma',$$

$$s_1 = \sigma_1 + \sigma'_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$s_n = \sigma_n + \sigma'_n.$$

Résolvons maintenant les équations données par rapport aux ϖ et aux γ ; le nombre des paramètres entrant dans les expressions des ϖ sera *au plus égal* à

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \dots + n\sigma_n;$$

le nombre des paramètres entrant dans les expressions des γ_i sera, au plus égal à

$$\tau'_1 + 2\tau'_2 + \dots + n\tau'_n:$$

pour que le nombre total des paramètres soit égal à

$$s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n,$$

il faut donc et il suffit que les deux limites supérieures soient atteintes, c'est-à-dire que les deux systèmes partiels soient involutifs.

Ajoutons encore une remarque utile. Supposons que le système formé par les σ premières équations (17) jouisse de la propriété que l'entier σ_2 qui lui correspond soit nul (et par suite aussi les entiers suivants $\sigma_3, \dots, \sigma_n$) : alors pour que le système (17) soit involutif, il faut que le système partiel des σ premières équations soit aussi involutif. Les σ premières équations (17) font en effet intervenir σ_1 variables secondaires ; supposons qu'on annule dans les $s - \sigma$ autres équations (17) ces σ_1 variables secondaires, et soient

$$\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_n$$

les nombres correspondant à ce nouveau système; on a évidemment

$$s_1 = \sigma_1 + \tau'_1, \quad s_2 = \tau'_2, \quad \dots, \quad s_n = \tau'_n.$$

Cela posé, supposons que les expressions des σ_1 premières variables secondaires contiennent moins de σ_1 paramètres arbitraires, les expressions des autres variables secondaires faisant intervenir *au plus* $\sigma'_1 + 2\sigma'_2 + \dots + n\sigma'_n$ paramètres nouveaux, les expressions des variables secondaires dans le système total contiendraient moins de $s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n$ paramètres et le système ne serait pas involutif.

Tout système (17) formé d'une seule équation est évidemment involutif. Nous aurons à considérer d'autres systèmes involutifs simples, en particulier le suivant :

[illegible]

où les variables secondaires ϖ_{ij} satisfont aux seules relations

$$\varpi_{ij} = \varpi_{ji};$$

on a pour ce système

$$s_1 = p, \quad s_2 = p - 1, \quad \dots, \quad s_{p-1} = 2, \quad s_p = 1.$$

La résolution donne

$$\varpi_{ij} = \sum a_{ijk} \omega_k$$

avec les $\frac{p(p+1)(p+2)}{6}$ paramètres a_{ijk} où l'on peut changer d'une manière quelconque l'ordre des indices inférieurs.

CHAPITRE IV.

LES VARIÉTÉS À p DIMENSIONS DE L'ESPACE PROJECTIF À n DIMENSIONS. HYPERPLANS OSCULATEURS. RÉSEAUX ASYMPTOTIQUES.

33. Revenons au système de référence considéré au n° 1 dans un espace projectif à n dimensions. Les formules (1) ont introduit $(n+1)^2$ expressions de Pfaff ω_{ij} qui peuvent être regardées comme les composantes mobiles du déplacement instantané du système de référence; ce sont $(n+1)^2$ expressions linéairement indépendantes par rapport aux différentielles des $(n+1)^2$ paramètres dont dépend le système. Il est facile de calculer leurs covariants bilinéaires. Egalons en effet les covariants bilinéaires des deux membres de l'identité

$$d\Lambda_i = \omega_{i1}\Lambda_1 + \omega_{i2}\Lambda_2 + \dots + \omega_{i,n+1}\Lambda_{n+1} \quad (i = 1, \dots, n+1);$$

nous aurons (n° 26)

$$\begin{aligned} 0 = \omega'_{i1}\Lambda_1 + \dots + \omega'_{i,n+1}\Lambda_{n+1} + [d\Lambda_1\omega_{i1}] \\ + [d\Lambda_2\omega_{i2}] + \dots + [d\Lambda_{n+1}\omega_{i,n+1}], \end{aligned}$$

ou, en remplaçant $d\Lambda_1, \dots, d\Lambda_{n+1}$ par leurs valeurs,

$$\sum_{j=1}^{n+1} \{ \omega'_{ij} - [\omega_{i1}\omega_{1j}] - [\omega_{i2}\omega_{2j}] - \dots - [\omega_{i,n+1}\omega_{n+1,j}] \} \Lambda_j = 0.$$

Cette identité entraîne évidemment les suivantes, qui four-

dans une même variété plane fixe à $h - 1$ dimensions. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Nous utiliserons également cet autre théorème :

Pour que la variété plane mobile $[M_1 M_2 \dots M_h]$ ait en commun le point $x_1 M_1 + \dots + x_h M_h$ avec la variété plane infiniment voisine, il faut et il suffit que le point

$$x_1 dM_1 + \dots + x_h dM_h$$

appartienne à la variété plane donnée.

En effet, pour que l'égalité

$$x_1 M_1 + \dots + x_h M_h = (x_1 + \varepsilon_1)(M_1 + dM_1) + \dots + (x_h + \varepsilon_h)(M_h + dM_h),$$

où $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_h$ sont des quantités infiniment petites, puisse avoir lieu, il faut et il suffit que $x_1 dM_1 + \dots + x_h dM_h$ soit de la forme $-\varepsilon_1 M_1 - \dots - \varepsilon_h M_h$.

35. Nous allons faire des applications immédiates du premier théorème. Mais auparavant nous changerons légèrement les notations employées pour désigner les $n + 1$ sommets du système de référence; nous écrirons Λ au lieu de Λ_{n+1} , ω_i au lieu de $\omega_{n+1,i}$, ω_{i0} au lieu de $\omega_{i, n+1}$ et ω_{00} au lieu de $\omega_{n+1, n+1}$; de cette manière, les formules (1) et (20) deviennent

$$(1') \quad \begin{cases} d\Lambda = \omega_{i0} \Lambda + \omega_{i1} \Lambda_1 + \dots + \omega_{in} \Lambda_n \\ d\Lambda_i = \omega_{i0} \Lambda + \omega_{i1} \Lambda_1 + \dots + \omega_{in} \Lambda_n \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(20') \quad \begin{cases} \omega'_i = [\omega_{00} \omega_i] + [\omega_{01} \omega_{1i}] + \dots + [\omega_{0n} \omega_{ni}] \\ \omega'_{ij} = [\omega_{i0} \omega_j] + [\omega_{i1} \omega_{1j}] + \dots + [\omega_{in} \omega_{nj}] \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Cela posé, exprimons que le point Λ est fixe; les conditions pour qu'il en soit ainsi sont

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 0;$$

il en résulte que les expressions de Pfaff $\omega_1, \dots, \omega_n$ sont n combinaisons linéaires indépendantes des coordonnées (ou plutôt des rapports mutuels des coordonnées) du point Λ .

Considérons de même la variété plane à p dimensions définie par les $p + 1$ points $\Lambda, \Lambda_1, \dots, \Lambda_p$, variété que nous désignerons pour abrégé par $[\Lambda \Lambda_1 \dots \Lambda_p]$. Les conditions pour que cette

Comme les expressions $\omega_1, \dots, \omega_p$ sont linéairement indépendantes (ce sont des combinaisons linéaires des p paramètres dont dépend la position du point A sur la variété donnée), les expressions

$$\omega_{i\alpha} \quad (i = 1, 2, \dots, p; \alpha = p+1, \dots, n)$$

sont (n° 17) des combinaisons linéaires de $\omega_1, \dots, \omega_p$, et les coefficients de $\omega_1, \dots, \omega_p$ dans les expressions de $\omega_{1\alpha}, \omega_{2\alpha}, \dots, \omega_{p\alpha}$ forment un tableau symétrique. Autrement dit, si l'on considère les $n - p$ formes quadratiques en $\omega_1, \dots, \omega_p$

$$\Phi_\alpha = \omega_1 \omega_{1\alpha} + \omega_2 \omega_{2\alpha} + \dots + \omega_p \omega_{p\alpha},$$

on a

$$(23) \quad \omega_{i\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_i}.$$

Remarquons que, si l'on considère les expressions $\omega_i, \omega_\alpha, \omega_{i\alpha}$ qui sont (n° 33) des combinaisons linéaires des paramètres dont dépend l'hyperplan tangent $[AA_1 \dots A_p]$, les p premières sont indépendantes et les autres s'en déduisent linéairement par les formules (21) et (23).

37. Soit q le nombre des formes quadratiques Φ_α qui sont linéairement indépendantes; on peut choisir le système de référence associé au point A de la variété de manière que les formes $\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_{p+q}$ soient linéairement indépendantes, les formes $\Phi_{p+q+1}, \dots, \Phi_n$ étant identiquement nulles.

Considérons en effet une courbe quelconque tracée sur la variété et passant par P . La tangente à cette courbe est définie par les points A et dA ; le plan osculateur (à deux dimensions) par les points A, dA et d^2A . Or on a

$$\begin{aligned} dA &= \omega_{00} A + \omega_1 A_1 + \dots + \omega_p A_p, \\ d^2A &= \omega_1 dA_1 + \dots + \omega_p dA_p + \dots \\ &= \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} (\omega_1 \omega_{1\alpha} + \dots + \omega_p \omega_{p\alpha}) A_\alpha + \dots \\ &= \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} \Phi_\alpha (\omega_1, \dots, \omega_p) A_\alpha + \dots \end{aligned}$$

les termes non écrits dépendant linéairement de $A, A_1, \dots, A_p$. Il résulte de là que si l'on cherche le lieu des plans osculateurs en A aux différentes courbes tracées sur la variété et passant par A , ce lieu contiendra évidemment l'hyperplan tangent à la variété et, d'une manière générale, tous les hyperplans à $p+1$ dimensions définis par les équations

$$\frac{x_{p+1}}{\Phi_{p+1}(t_1, \dots, t_p)} = \dots = \frac{x_n}{\Phi_n(t_1, \dots, t_p)}$$

avec les p paramètres arbitraires $t_1, \dots, t_p$. Par suite la plus petite variété plane contenant les plans osculateurs aux différentes courbes tracées sur la variété et passant par A s'obtient en établissant entre $x_{p+1}, \dots, x_n$ les mêmes relations linéaires que celles qui existent entre les formes $\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_n$. C'est donc une variété plane à $p+q$ dimensions. On peut l'appeler l'hyperplan osculateur à la variété en A .

Si maintenant on choisit les sommets $A_{p+1}, \dots, A_{p+q}$ du système de référence dans l'hyperplan osculateur, on voit immédiatement que les formes $\Phi_{p+q+1}, \dots, \Phi_n$ sont nulles.

38. *Le réseau asymptotique.* — Considérons une variété plane (Π) à $p+q-1$ dimensions contenue dans l'hyperplan osculateur et contenant l'hyperplan tangent, soit

$$\lambda_{p+1} x_{p+1} + \dots + \lambda_{p+q} x_{p+q} = 0$$

son équation.

Cherchons le lieu des tangentes aux courbes de la variété dont le plan osculateur est contenu dans (Π) .

Il en sera ainsi si le point

$$\Phi_{p+1} A_{p+1} + \dots + \Phi_{p+q} A_{p+q}$$

est contenu dans (Π) , c'est-à-dire s'il existe entre $\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_{p+q}$ la relation linéaire

$$\lambda_{p+1} \Phi_{p+1} + \dots + \lambda_{p+q} \Phi_{p+q} = 0.$$

Le lieu cherché est donc un cône du second ordre de sommet A (et situé dans l'hyperplan tangent). Tous ces cônes forment un réseau linéaire qu'on peut appeler le *réseau asymptotique* relatif au point A . Les formes Φ_α peuvent aussi s'appeler les *formes asymptotiques* relatives au point A .

Pour que le plan osculateur d'une courbe soit dans l'hyperplan tangent à la variété, il faut et il suffit que la tangente à cette courbe appartienne à tous les cônes du réseau asymptotique. Nous appellerons donc *tangente asymptotique* toute génératrice commune à tous les cônes du réseau asymptotique. Si $q < p - 1$, il y a une infinité de tangentes asymptotiques; si $q = p - 1$, il y en a en général un nombre fini; si $q \geq p$, il n'y a pas en général de tangente asymptotique.

Deux tangentes seront dites *conjuguées* si elles sont conjugues par rapport à tous les cônes du réseau asymptotique. Étant données deux tangentes conjugues définies par leurs paramètres directeurs $(\omega_1, \dots, \omega_p)$ et $(\varpi_1, \dots, \varpi_p)$, lorsque le point A se déplace sur la variété dans la direction d'une de ces tangentes, l'hyperplan tangent en A a en commun l'autre tangente avec l'hyperplan tangent infiniment voisin. En effet, le point $xA + x_1A_1 + \dots + x_pA_p$ appartient à l'hyperplan tangent au point A + dA si (n° 34) le point $x dA + x_1 dA_1 + \dots + x_p dA_p$ appartient à l'hyperplan tangent en A, ou si

$$x_1 \frac{\partial \Phi_x}{\partial \omega_1} + \dots + x_p \frac{\partial \Phi_x}{\partial \omega_p} = 0 \quad (x = p+1, \dots, p+q).$$

Or les conditions

$$\varpi_1 \frac{\partial \Phi_x}{\partial \omega_1} + \dots + \varpi_p \frac{\partial \Phi_x}{\partial \omega_p} = 0 \quad (x = p+1, \dots, p+q)$$

expriment précisément que les deux tangentes considérées sont conjugues.

33. *Les hyperplans osculateurs et les réseaux asymptotiques d'ordre supérieur.* — Considérons les variétés planes à trois dimensions osculatrices en A aux différentes courbes tracées sur la variété et passant par A; elles sont définies par les points A, dA, d²A et d³A. Or, en négligeant les termes en A, A₁, ..., A_p, A_{p+1}, ..., A_{p+q}, on a

$$d^3 A = \sum_{\lambda=n}^{\lambda=p+q} (\Phi_{p+1} \omega_{p+1,\lambda} + \dots + \Phi_{p+q} \omega_{p+q,\lambda}) A_\lambda.$$

Posons

$$\Psi_{\lambda} = \omega_{p+1,\lambda} \Phi_{p+1} + \dots + \omega_{p+q,\lambda} \Phi_{p+q};$$

les Ψ_{λ} sont des formes cubiques en $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$, car des équations

$$\omega_{i\lambda} = 0 \quad (i = 1, \dots, p; \lambda = p+q+1, \dots, n)$$

on déduit par les formules (20)

$$(24) \quad \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q} [\omega_{i\alpha} \omega_{\alpha\lambda}] = 0,$$

relations qui montrent (n° 17) que les expressions $\omega_{\alpha\lambda}$ sont des combinaisons linéaires de $\omega_1, \dots, \omega_p$.

Supposons que parmi les $n - p - q$ formes cubiques Ψ_{λ} il y en ait exactement r linéairement indépendantes; on en déduira, comme au n° 36, que la plus petite variété plane contenant toutes les variétés planes osculatrices à trois dimensions aux différentes courbes tracées sur la variété et passant par Λ est à $p + q + r$ dimensions; de plus, si l'on choisit les sommets $\Lambda_{p+q+1}, \dots, \Lambda_{p+q+r}$ du système de référence dans cette variété plane, les formes cubiques $\Psi_{p+q+1}, \dots, \Psi_{p+q+r}$ seront linéairement indépendantes et les formes cubiques $\Psi_{p+q+r+1}, \dots, \Psi_n$ seront identiquement nulles.

Cette variété plane à $p + q + r$ dimensions peut s'appeler *l'hyperplan osculateur du second ordre en Λ à la variété*; le réseau de cônes du troisième ordre

$$\lambda_1 \Psi_{p+q+1} + \dots + \lambda_r \Psi_{p+q+r} = 0$$

le réseau asymptotique du second ordre, les formes Ψ_{λ} les formes asymptotiques du second ordre.

40. Il y a entre les formes asymptotiques du premier ordre et celles du second ordre une relation remarquable: *les dérivées partielles du premier ordre d'une forme asymptotique du second ordre quelconque sont des formes asymptotiques du premier ordre.*

Soit en effet

$$\Psi_{\lambda} = \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q} \Phi_{\alpha}(\omega_{\alpha}) = \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q} \omega_i(\omega_{i\alpha} \omega_{\alpha\lambda}).$$

une forme asymptotique du second ordre. On a

$$\frac{\partial W_i}{\partial \omega_i} = \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q} \omega_{i\alpha} \omega_{\alpha i} + \sum_{j=1}^{j=p} \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q} \omega_j \frac{\partial \omega_{j\alpha}}{\partial \omega_i} \omega_{\alpha i} + \sum_{j=1}^{j=p} \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q} \omega_j \omega_{j\alpha} \frac{\partial \omega_{\alpha i}}{\partial \omega_i};$$

or les identités (22) et (24), différenciées par rapport à ω_i , donnent

$$\begin{aligned} \omega_{i\alpha} - \sum_{j=1}^{j=p} \omega_j \frac{\partial \omega_{j\alpha}}{\partial \omega_i} &= 0 \quad (i = 1, \dots, p; \alpha = p+1, \dots, p+q), \\ \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q} \frac{\partial \omega_{j\alpha}}{\partial \omega_i} \omega_{\alpha i} - \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q} \omega_{j\alpha} \frac{\partial \omega_{\alpha i}}{\partial \omega_i} &= 0 \quad (i, j = 1, \dots, p). \end{aligned}$$

Il en résulte que dans l'expression de $\frac{\partial W_i}{\partial \omega_i}$ les trois sommes du second membre sont égales et par suite on a

$$\frac{\partial W_i}{\partial \omega_i} = 3 \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=p+q} \frac{\partial \omega_{\alpha i}}{\partial \omega_i} \Phi_{\alpha},$$

formule qui démontre le théorème.

On déduit de ce qui précède que, le réseau asymptotique (du premier ordre) étant supposé connu, *le réseau asymptotique du second ordre n'est pas arbitraire*. Si en particulier le réseau asymptotique est défini par un certain nombre de relations linéaires à coefficients constants entre les coefficients des formes Φ_{α} , soit

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} A_{ij} a_{ij} &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i,j} L_{ij} a_{ij} &= 0. \end{aligned}$$

les coefficients a_{ijk} des formes cubiques W_k devront satisfaire aux relations suivantes, en nombre p fois plus grand,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} A_{ij} a_{ijk} &= 0, \\ \dots\dots\dots (k = 1, 2, \dots, p), \\ \sum_{i,j} L_{ij} a_{ijk} &= 0 \end{aligned}$$

Supposons par exemple que les formes asymptotiques du premier ordre se déduisent linéairement des formes rectangles $2\omega_i\omega_j$; le réseau asymptotique est défini par les conditions

$$a_{11} = a_{22} = \dots = a_{pp} = 0$$

et par suite le réseau asymptotique du second ordre satisfera aux conditions

$$a_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, p);$$

les formes cubiques Ψ_k n'auront donc que des termes de la forme $a\omega_i\omega_j\omega_k$, les indices i, j, k étant distincts.

41. Il peut arriver que les conditions imposées par le réseau asymptotique du premier ordre au réseau asymptotique du second ordre ne conviennent qu'à des formes cubiques identiquement nulles : c'est ce qui arrive dans l'exemple précédent si $p = 2$. Dans ce cas, l'hyperplan osculateur du second ordre se confond avec l'hyperplan osculateur du premier ordre et l'on peut démontrer facilement que *cet hyperplan est fixe quand le point Λ se déplace sur la variété*. On a en effet, quel que soit l'indice $\lambda = p + q$,

$$\omega_{\lambda} = 0,$$

$$\omega_{i\lambda} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p + q).$$

Par suite (n° 34), l'hyperplan $|\Lambda \Lambda_1 \dots \Lambda_{p+q}|$ est fixe. La variété est donc contenue dans un hyperplan fixe à $p + q$ dimensions.

La même conclusion subsiste sous la seule condition que l'hyperplan osculateur du second ordre coïncide en chaque point Λ avec l'hyperplan osculateur du premier ordre.

42. On pourra convenir d'appeler *tangente asymptotique du second ordre* toute tangente génératrice commune des cônes $\Psi_k = 0$; en vertu du théorème du n° 39, toute tangente asymptotique du premier ordre est tangente asymptotique du second ordre, mais la réciproque n'est pas vraie.

On pourra enfin définir les hyperplans osculateurs du troisième, du quatrième, etc. ordre, ainsi que les formes asymptotiques de chacun de ces ordres. *Les dérivées partielles d'ordre h d'une forme asymptotique du même ordre sont des formes asymptotiques*

tiques d'ordre $m - h$. Si l'hyperplan osculateur du $m^{\text{ième}}$ ordre coïncide en chaque point A avec l'hyperplan osculateur du $(m - 1)^{\text{ième}}$ ordre, ce dernier hyperplan est fixe.

43. Convenons de dire que deux réseaux linéaires de cônes d'ordre h (de sommet A) appartiennent au même type projectif si l'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation projective (laissant invariant le point A), ou, analytiquement parlant, si l'on peut passer de l'un à l'autre par une substitution linéaire effectuée sur les coordonnées $\omega_1, \dots, \omega_p$. On peut alors se proposer de déterminer toutes les variétés à p dimensions dont le réseau asymptotique du premier ordre appartient à un type projectif donné, ou encore toutes celles dont les réseaux asymptotiques du premier, du second, etc., du $h^{\text{ième}}$ ordre appartiennent à des types projectifs donnés.

Pour donner une idée de la méthode à suivre, prenons deux exemples.

Proposons-nous d'abord de trouver toutes les variétés à p dimensions dont le réseau asymptotique, supposé d'ordre p , est réductible à la forme

$$\lambda_1 \omega_1^2 + \dots + \lambda_p \omega_p^2 = 0.$$

On aura ici $q = p$, et l'on pourra supposer choisis les sommets du système de référence de manière à avoir

$$\Phi_{p+i} = \omega_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Cela posé, les variétés cherchées peuvent être regardées comme les solutions du système de Pfaff :

$$(25) \quad \begin{cases} \omega_{p+1} = \dots = \omega_n = 0, \\ \omega_{i,p+i} = \omega_i & (i = 1, 2, \dots, p), \\ \omega_{j,p+i} = 0 & (i < j; i, j = 1, 2, \dots, p), \\ \omega_{i,2p+\lambda} = 0 & (i = 1, \dots, p; \lambda = 1, \dots, n - p). \end{cases}$$

Les premiers membres des équations de ce système sont des combinaisons linéaires des expressions

$$\omega_i, \quad \omega_{\alpha}, \quad \omega_{\alpha} \quad (i = 1, \dots, p; \alpha = p + 1, \dots, n)$$

qui sont linéairement indépendantes par rapport aux différentielles

des $n(p+1) - p^2$ paramètres dont dépend l'élément générateur de la variété (formé du point A et de l'hyperplan tangent $[A \Lambda_1 \dots \Lambda_p]$).

Le système (25) est donc de la nature de ceux qui sont considérés au n° 29. Calculons alors les équations quadratiques alternées dérivées des équations (25). En appliquant les formules (20') et tenant compte des équations (25), on obtient

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\omega_i(\omega_{p+i,p+i} - \omega_{ii} - \omega_{00})] - \sum_{k \neq i}^{1, \dots, p} [\omega_k \omega_{ki}] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p), \\ -[\omega_i \omega_{ji}] + [\omega_j \omega_{p+j,p+i}] = 0 \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, p), \\ [\omega_i \omega_{p+i,2p+\lambda}] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p; \lambda = 1, 2, \dots, n-2p). \end{array} \right.$$

Ici, les équations (26) sont d'elles-mêmes de la forme (17) et les expressions principales sont $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$. Les expressions secondaires sont

$$\begin{aligned} \omega_{ij}, \quad \omega_{p+i,p+j} \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, p), \\ \omega_{p+i,p+i} - \omega_{ii} - \omega_{00} \quad (i = 1, 2, \dots, p), \\ \omega_{p+i,2p+\lambda} \quad (i = 1, 2, \dots, p; \lambda = 1, 2, \dots, n-2p); \end{aligned}$$

elles sont au nombre de $p(n-1)$.

Le nombre s_1 est ici le nombre des équations linéairement indépendantes

$$\begin{aligned} \xi_i (\omega_{p+i,p+i} - \omega_{ii} - \omega_{00}) - \sum_{k \neq i}^{1, \dots, p} \xi_k \omega_{ki} &= 0, \\ -\xi_i \omega_{ji} + \xi_j \omega_{p+j,p+i} &= 0, \\ \xi_i \omega_{p+i,2p+\lambda} &= 0; \end{aligned}$$

on trouve immédiatement

$$s_1 = p(n-p).$$

Pour avoir le nombre s_2 , il faut adjoindre aux équations précédentes les suivantes :

$$\begin{aligned} \xi'_i (\omega_{p+i,p+i} - \omega_{ii} - \omega_{00}) - \sum \xi'_k \omega_{ki} &= 0, \\ \xi'_i \omega_{ji} + \xi'_j \omega_{p+j,p+i} &= 0, \\ \xi'_i \omega_{p+i,2p+\lambda} &= 0; \end{aligned}$$

on déduit de toutes ces équations (siles ξ_i et les ξ_i sont *arbitraires*)

$$\begin{aligned}\omega_{p+i, 2p+i} &= 0, \\ \omega_{ji} &= \omega_{p+j, p+i} = 0, \\ \omega_{p+i, p+i} &= \omega_{ii} \quad \omega_{00} = 0;\end{aligned}$$

on a donc

$$s_1 + s_2 = p(n-1), \quad \text{d'où} \quad s_2 = p(p-1).$$

Il est évident maintenant que les entiers $s_1 + s_2 + s_3$, $s_1 + s_2 + s_3 + s_4$, ... sont tous égaux à $s_1 + s_2$; donc

$$s_3 = s_4 = \dots = s_p = 0.$$

Des valeurs trouvées pour les s on déduit

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \dots + ps_p = p(n+p-2);$$

or si l'on résout les équations (26) par rapport aux $p(n-1)$ expressions ω_{ij} , $\omega_{p+i, p+j}$, ..., on trouve

$$\begin{aligned}\omega_{ij} &= a_{ij}\omega_i + b_{ij}\omega_j, \\ \omega_{p+i, p+j} &= c_{ij}\omega_i - a_{ij}\omega_j, \\ \omega_{p+i, p+i} - \omega_{ii} - \omega_{00} &= h_i\omega_i - \sum_{k=1, \dots, p} b_{ki}\omega_k, \\ \omega_{p+i, p+2i} &= g_{ii}\omega_i,\end{aligned}$$

avec les $p(n+p-2)$ paramètres arbitraires a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , h_i , g_{ii} .
Le système (25) est donc en involution et les variétés cherchées dépendent de $s_2 = p(p-1)$ fonctions arbitraires de deux arguments.

44. On peut se placer à un autre point de vue et regarder les variétés cherchées comme engendrées par leurs hyperplans tangents. Les expressions

$$\omega_{\alpha i} = \omega_{i\alpha} \quad (i = 1, 2, \dots, p; \alpha = p+1, \dots, n)$$

sont linéairement indépendantes par rapport aux $(p+1)(n-p)$ paramètres dont dépend l'hyperplan tangent $[\Lambda_1 \dots \Lambda_p]$. Or les conditions auxquelles doit satisfaire la variété sont données par les

relations

$$(27) \quad \begin{cases} \omega_{p+1} = \dots = \omega_n = 0, \\ \omega_{j,p+i} = 0 & (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, p), \\ \omega_{i,2p+i} = 0 & (i = 1, 2, \dots, p; \lambda = 1, \dots, n-2p); \end{cases}$$

les relations (22) montrent en effet que $\omega_{i,p+i}$ ne dépend que de ω_i et que par suite le réseau asymptotique appartient au type projectif voulu. Les équations (27) sont bien de la nature de celles qui sont considérées au n° 29, mais ici ce sont les p expressions $\omega_{i,p+i}$ qui sont principales. Les équations quadratiques extérieures dérivées des équations (27) sont

$$(28) \quad \begin{cases} |\omega_i \omega_{i,p+i}| = 0 & (i = 1, 2, \dots, p), \\ -[\omega_{i,p+i} \omega_{ji}] + [\omega_{j,p+i} \omega_{p+j,p+i}] = 0 & (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, p), \\ [\omega_{i,p+i} \omega_{p+i,2p+i}] = 0 & (i = 1, 2, \dots, p; \lambda = 1, 2, \dots, n-2p). \end{cases}$$

Ici, les expressions secondaires qui figurent dans une quelconque des équations (28) sont indépendantes de celles qui figurent dans les autres; par conséquent (n° 32), le système est en involution et les valeurs de $s_1, \dots, s_n$ s'obtiennent en ajoutant les valeurs de ces nombres pour chacune des équations (28); on trouve ainsi immédiatement

$$s_1 = p(n-p), \quad s_2 = p(p-1), \quad s_3 = \dots = s_p = 0,$$

comme avec la première méthode.

45. Les variétés précédentes jouissent d'une propriété remarquable. Considérons les équations

$$\omega_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p);$$

chacune de ces équations est complètement intégrable; on a en effet, sur toute variété intégrale du système (25),

$$\omega'_i = [\omega_{00} \omega_i] + \sum_{k=1}^{k=p} [\omega_k \omega_{ki}] = [\omega_i (\omega_{p+i,p+i} - 2\omega_{00})];$$

comme ω'_i s'annule avec ω_i , l'équation $\omega_i = 0$ est bien complètement intégrable (n° 27).

Ce résultat peut s'interpréter géométriquement de la manière suivante :

Les équations $\omega_i = 0$ définissent p variétés planes à $p - 1$ dimensions tangentes à la variété en A : il existe sur la variété p familles de variétés à $p - 1$ dimensions tangentes en chacun de leurs points à l'une de ces p variétés planes.

Convenons de dire qu'une variété plane tangente à $p - 1$ dimensions est *distinguée* si, considérée comme une variété plane double, elle fait partie du réseau asymptotique. Appelons de même *variété distinguée* à $p - 1$ dimensions une variété située sur la variété donnée et telle qu'en chacun de ses points elle soit tangente à une variété plane tangente distinguée. Nous voyons alors que *si en chaque point A de la variété donnée le réseau asymptotique admet comme cônes de base p variétés planes doubles, la variété donnée admet p familles de variétés distinguées à $p - 1$ dimensions.*

46. Cherchons maintenant les variétés à p dimensions dont le réseau asymptotique peut se ramener à la forme

$$\lambda_1 \omega_1^2 + \dots + \lambda_q \omega_q^2 = 0 \quad (q < p).$$

On est ici dans un cas particulier intéressant, celui où *les q formes quadratiques asymptotiques peuvent s'exprimer en fonction de moins de p variables.* La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que *l'hyperplan tangent dépende de moins de p paramètres.*

Supposons en effet que l'hyperplan tangent dépende de $p' < p$ paramètres; d'après ce qui a été vu au n° 34, il faut et il suffit pour cela que parmi les $(p+1)(n-p)$ expressions

$$\omega_\alpha, \quad \omega_{i\alpha} \quad (i = 1, 2, \dots, p; \alpha = p+1, \dots, n)$$

il y en ait exactement p' indépendantes; or les seules qui ne soient pas nulles sont les demi-dérivées $\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_i}$; or dire que les dérivées $\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_i}$ ne dépendent que de $\omega_1, \dots, \omega_{p'}$, c'est dire que les formes Φ_α peuvent s'exprimer au moyen de $\omega_1, \dots, \omega_{p'}$ et ne peuvent pas s'exprimer au moyen d'un moindre nombre de variables.

Réciproquement, si les Φ_x ne dépendent que de $\omega_1, \dots, \omega_{p'}$, il en est de même des $\omega_{i\alpha}$, et comme les ω_x sont nulles d'elles-mêmes, l'hyperplan tangent dépend exactement de p' paramètres.

Cela posé, revenons aux variétés pour lesquelles le réseau asymptotique est engendré par q variétés planes doubles à $p - 1$ dimensions, et définissons ces variétés en coordonnées tangentielles.

On pourra supposer

$$\Phi_{p+1} = \omega_1^2, \quad \dots, \quad \Phi_{p+q} = \omega_q^2, \quad \Phi_{p+q+\lambda} = 0.$$

Le système de Pfaff qui définira les variétés cherchées sera

$$(29) \quad \begin{cases} \omega_{p+i} = 0 & (i = 1, 2, \dots, q), \\ \omega_{p+q+\lambda} = 0 & (\lambda = 1, 2, \dots, n - p - q), \\ \omega_{j,p+i} = 0 & (j \neq i; j = 1, 2, \dots, p; i = 1, 2, \dots, q), \\ \omega_{i,p+q+\lambda} = 0 & (i = 1, \dots, p; \lambda = 1, \dots, n - p - q). \end{cases}$$

On a ici q variables indépendantes et ce sont les expressions $\omega_{i,p+i}$ ($i = 1, 2, \dots, q$) qui sont principales. Les équations quadratiques alternées dérivées des équations (29) sont alors

$$(30) \quad \begin{cases} [\omega_{i,p+i} \omega_i] = 0 & (i = 1, \dots, q), \\ -[\omega_{i,p+i} \omega_{ji}] + [\omega_{j,p+j} \omega_{p+j,p+i}] = 0 & (i \neq j; i, j = 1, \dots, q), \\ -[\omega_{i,p+i} \omega_{ki}] = 0 & (i = 1, \dots, q; k = q + 1, \dots, p), \\ [\omega_{i,p+i} \omega_{p+i,p+q+\lambda}] = 0 & (i = 1, \dots, q; \lambda = 1, \dots, n - p - q). \end{cases}$$

On trouve facilement, comme plus haut, que le système est en involution avec

$$s_1 = q(n - q), \quad s_2 = q(q - 1), \quad s_3 = \dots = s_q = 0.$$

Les variétés cherchées dépendent donc de $q(q - 1)$ fonctions arbitraires de deux arguments.

Il n'y a d'exception à cette conclusion que si q est égal à 1. Dans ce cas, les variétés dépendent de $s = n - 1$ fonctions arbitraires d'un argument; ce sont les enveloppes d'une variété plane à p dimensions dépendant d'un paramètre; nous les retrouverons plus loin.

47. Étudions maintenant les variétés à p dimensions dont l'hyperplan tangent dépend de $q < p$ paramètres et dont l'hyperplan osculateur a le nombre maximum $p + \frac{q(q+1)}{2}$ de dimensions.

On pourra supposer ici que les formes quadratiques asymptotiques ne dépendent que de $\omega_1, \dots, \omega_q$. Nous poserons

$$\Phi_{iij} = \omega_i^2, \quad \Phi_{ijj} = 2\omega_i\omega_j \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, q)$$

en appelant $\Lambda_{iij}, \Lambda_{ijj}$ les $\frac{q(q-1)}{2}$ sommets du système de référence qui, avec $\Lambda, \Lambda_1, \dots, \Lambda_p$, déterminent l'hyperplan osculateur. Nous désignerons par $l, m, \dots$ les indices compris entre $q+1$ et p , et par $\alpha, \beta, \dots$ les indices des sommets du système de référence non situés dans l'hyperplan osculateur. On a évidemment

$$\begin{aligned} \omega_{i(ij)} &= \omega_i, & \omega_{i(ij)} &= \omega_j, & \omega_{i\alpha} &= 0 & (i = 1, 2, \dots, q), \\ \omega_{l(ij)} &= 0, & \omega_{lij} &= 0, & \omega_{l\alpha} &= 0 & (l = q+1, \dots, p). \end{aligned}$$

Des dernières équations on déduit, en prenant les covariants bilinéaires,

$$\begin{aligned} [\omega_i \omega_{li}] &= 0 & (i = 1, 2, \dots, q), \\ [\omega_l \omega_{lj}] + [\omega_j \omega_{li}] &= 0 & (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, q). \end{aligned}$$

Ces relations exigent qu'on ait

$$\omega_{li} = u_l \omega_i \quad (i = 1, \dots, \alpha; l = q+1, \dots, p),$$

où u_l est un coefficient convenablement choisi.

Considérons alors le point $\Lambda_l = u_l \Lambda$ et choisissons-le pour nouveau sommet Λ_l du système de référence: cela revient à supposer $u_l = 0$. On a donc

$$\omega_{li} = 0 \quad (i = 1, \dots, q; l = q+1, \dots, p).$$

Cette équation donne, par les covariants bilinéaires,

$$[\omega_{l0} \omega_l] = 0.$$

L'expression ω_{l0} ne dépend donc que de ω_l : par suite si q est plus grand que 1, on a aussi

$$\omega_{l0} = 0.$$

On en déduit que $d\Lambda_{q+1}, \dots, d\Lambda_p$ ne dépendent que de $\Lambda_{q+1}, \dots, \Lambda_p$ et par suite (n° 34) la variété plane $[\Lambda_{q+1} \dots \Lambda_p]$ est fixe.

Autrement dit, l'hyperplan tangent en Λ contient une variété plane fixe (II) à $p - q - 1$ dimensions. Considérons alors une autre variété plane fixe (II') à $n - p + q$ dimensions n'ayant

aucun point commun avec (H); elle a en commun avec la variété donnée une variété à q dimensions dont l'hyperplan tangent dépend de q paramètres et l'hyperplan osculateur est à $q - \frac{(q-1)}{2}$ dimensions; en joignant tous ses points aux différents points de (H) on a la variété cherchée.

Les variétés cherchées ont le même degré de généralité que les variétés à q dimensions de l'espace à $n - p + q$ dimensions; elles dépendent donc de $n - p$ fonctions arbitraires de q arguments.

48. La conclusion précédente ne s'applique pas si $q = 1$, c'est-à-dire si l'hyperplan tangent à la variété ne dépend que d'un paramètre. Ici encore on a comme plus haut

$$\omega_{p1} = 0 \quad (l = 2, \dots, p).$$

La caractéristique de l'hyperplan tangent est (n° 34) le lieu des points $x\Lambda + x_1\Lambda_1 + \dots + x_p\Lambda_p$ tels que le point

$$xd\Lambda + x_1d\Lambda_1 + \dots + x_p d\Lambda_p$$

appartienne à l'hyperplan tangent; c'est donc la variété plane $[AA_2\Lambda_3\dots\Lambda_p]$. La caractéristique de cette variété plane est le lieu des points $x\Lambda + x_2\Lambda_2 + \dots + x_p\Lambda_p$ tels que

$$x\omega_1 + x_2\omega_{21} + \dots + x_p\omega_{p1} - x\omega_1 = 0;$$

c'est donc la variété plane $[\Lambda_2\Lambda_3\dots\Lambda_p]$. La caractéristique de cette variété plane est le lieu des points $x_2\Lambda_2 + \dots + x_p\Lambda_p$ tels qu'on ait

$$x_2\omega_{20} + x_3\omega_{30} + \dots + x_p\omega_{p0} = 0;$$

or l'équation

$$\omega_{p1} = 0$$

conduit à

$$[\omega_{p0}\omega_1] = 0,$$

ce qui montre que $\omega_{20}, \dots, \omega_{p0}$ ne dépendent que de ω_1 . La caractéristique de $[\Lambda_2\Lambda_3\dots\Lambda_p]$ est donc une variété plane à $p - 2$ dimensions qu'on peut toujours supposer être $[\Lambda_3\dots\Lambda_p]$; on aura alors

$$\omega_{30} = \dots = \omega_{p0} = 0.$$

On déduit de ces dernières équations

$$[\omega_{32}\omega_{20}] = \dots = [\omega_{p2}\omega_{20}] = 0,$$

ce qui montre que $\omega_{32}, \dots, \omega_{p2}$ ne dépendent que de ω_1 ; par suite, la caractéristique de $[\Lambda_3 \dots \Lambda_p]$ est une variété plane à 1 dimension de moins qu'on peut toujours supposer être $[\Lambda_1 \dots \Lambda_p]$, avec

$$\omega_{12} = \dots = \omega_{p2} = 0.$$

On continuera ainsi de proche en proche et l'on pourra toujours supposer que, dans la suite des variétés planes

$[\Lambda\Lambda_1\Lambda_2\dots\Lambda_p], [\Lambda\Lambda_2\dots\Lambda_p], [\Lambda_2\dots\Lambda_p], [\Lambda_3\dots\Lambda_p], \dots, [\Lambda_{p-1}\Lambda_p], \Lambda_p$,
chacune est la caractéristique de la précédente; on aura

$$\omega_{lm} = 0 \quad \text{si} \quad m < l-1, \\ [\omega_{l,l-1}\omega_1] = 0.$$

Cela posé, considérons le point Λ_p ; il ne dépend que d'un paramètre, car

$$d\Lambda_p = \omega_{p,p-1}\Lambda_{p-1} + \omega_{pp}\Lambda_p;$$

il engendre donc une courbe dont la tangente est $[\Lambda_p\Lambda_{p-1}]$; comme on a

$$d\Lambda_{p-1} = \omega_{p-1,p-2}\Lambda_{p-2} + \omega_{p-1,p-1}\Lambda_{p-1} + \omega_{p-1,p}\Lambda_p,$$

le plan osculateur à cette courbe est $[\Lambda_p\Lambda_{p-1}\Lambda_{p-2}]$; la variété plane osculatrice à deux dimensions est $[\Lambda_p\Lambda_{p-1}\Lambda_{p-2}\Lambda_{p-3}]$ et ainsi de suite; finalement, sa variété plane osculatrice à $p-1$ dimensions est $[\Lambda\Lambda_2\dots\Lambda_p]$; cette variété plane engendre la variété donnée qui est ainsi *le lieu de la variété plane osculatrice à $p-1$ dimensions d'une courbe gauche*.

Réciproquement, partons d'une courbe gauche (C) lieu d'un point M fonction d'un paramètre t et considérons la variété à p dimensions lieu de la variété plane à $p-1$ dimensions osculatrice de (C). On a, pour tout point A de cette variété,

$$A = M + x_1 \frac{dM}{dt} + x_2 \frac{d^2M}{dt^2} + \dots + x_{p-1} \frac{d^{p-1}M}{dt^{p-1}},$$

les p paramètres dont dépend la position de A sur la variété étant $t, x_1, \dots, x_{p-1}$. On a alors

$$dA = dx_1 \frac{dM}{dt} + dx_2 \frac{d^2M}{dt^2} + \dots \\ + dx_{p-1} \frac{d^{p-1}M}{dt^{p-1}} + dt \left(\frac{dM}{dt} + x_1 \frac{d^2M}{dt^2} + \dots + x_{p-1} \frac{d^pM}{dt^p} \right);$$

on voit que l'hyperplan osculateur à la variété est déterminé par les $p + 1$ points

$$M, \quad \frac{dM}{dt}, \quad \frac{d^2M}{dt^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^p M}{dt^p};$$

il ne dépend donc que d'un paramètre, à savoir t .

Les variétés dont l'hyperplan tangent ne dépend que d'un paramètre dépendent évidemment, d'après ce qui précède, de $n - 1$ fonctions arbitraires d'un argument, comme on l'a trouvé directement au n° 46.

49. Proposons-nous enfin de *déterminer les variétés à p dimensions dont le réseau asymptotique est le plus général possible* (l'hyperplan osculateur étant alors à $\frac{p(p+3)}{2}$ dimensions), mais dont le réseau asymptotique du second ordre est engendré par p variétés triples n'ayant d'autre point commun que A .

Nous pourrions choisir le système de référence de manière que les formes asymptotiques du premier ordre soient

$$\Phi_{ii} = \omega_i^2, \quad \Phi_{ij} = 2\omega_i\omega_j \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, p)$$

et les formes asymptotiques du second ordre soient

$$\Psi_i = \omega_i^3 \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Nous aurons donc

$$\begin{aligned} d^2M &= \omega_1^2 \Lambda_{11} + 2\omega_1\omega_2 \Lambda_{12} + \dots + \omega_p^2 \Lambda_{pp} + \dots, \\ d^3M &= \omega_1^3 \Lambda_1 + \omega_2^3 \Lambda_2 + \dots + \omega_p^3 \Lambda_p + \dots, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant, dans la première formule, linéaires en $\Lambda, \Lambda_1, \dots, \Lambda_p$; dans la seconde formule, linéaires en $\Lambda, \Lambda_1, \dots, \Lambda_p, \Lambda_{11}, \Lambda_{12}, \dots, \Lambda_{pp}$. Il pourra enfin exister d'autres sommets du système de référence que $A, \Lambda_1, \dots, \Lambda_p, \Lambda_{11}, \dots, \Lambda_{pp}$, $\Lambda_1, \dots, \Lambda_p$; nous les appellerons Λ_2, Λ_3 , etc.

Cela posé, on a démontré au n° 40 la formule

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial \omega_j} = 3 \sum_{hk}^{1, \dots, p} \frac{\partial \omega_{hk}}{\partial \omega_j} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \omega_{hk}} \Phi_{ihk};$$

on en déduit

$$\omega_{ii'} = \omega_i, \quad \omega_{ij'} = 0, \quad \omega_{jk'} = 0 \quad (i \neq j \neq k; i, j, k = 1, \dots, p).$$

D'après cela, les variétés cherchées peuvent être regardées comme les solutions du système de Pfaff :

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{ij} = 0, \quad \omega_{i'} = 0, \quad \omega_{\alpha} = 0; \\ \omega_{i(ii)} = \omega_i, \quad \omega_{j(ii)} = 0, \\ \omega_{i(ij)} = \omega_j, \quad \omega_{i(jk)} = 0, \\ \omega_{ii'} = 0, \quad \omega_{ij'} = 0, \quad \omega_{i\alpha} = 0, \\ \omega_{(ii)i'} = \omega_i, \quad \omega_{ij i'} = 0, \quad \omega_{(jk)i'} = 0, \\ \omega_{(ii)\alpha} = \omega_{ij\alpha} = 0. \end{array} \right.$$

Les équations de ce système expriment des relations linéaires entre les expressions $\omega_i, \omega_{ij}, \omega_{i'}, \omega_{\alpha}, \omega_{i(jk)}, \omega_{ij}, \omega_{i\alpha}, \omega_{(ij)k}, \omega_{ij\alpha}$ qui sont linéairement indépendantes par rapport aux paramètres qui définissent la position de la figure formée par le point A, l'hyperplan tangent et l'hyperplan osculateur.

Le système quadratique extérieur dérivé de (31) est :

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_{i(ii)} = [\omega_i(\omega_{ii(ii)} + \omega_{00} - 2\omega_{ii})] + \sum_{k=1, \dots, p}^k \neq i [\omega_k(\omega_{ik(ii)} - \omega_{ki})] = 0, \\ \Theta_{j(ii)} = [\omega_j(\omega_{ij(ii)} - \omega_{ji})] + \sum_{k=1, \dots, p}^k \neq i [\omega_k \omega_{(jk)(ii)}] = 0, \\ \Theta_{i(ij)} = [\omega_i(\omega_{(ii)(ij)} - 2\omega_{ij})] + [\omega_j(\omega_{ij(ij)} + \omega_{00} - \omega_{ii} - \omega_{jj})] \\ \quad + \sum_{k=1, \dots, p}^k \neq i, j [\omega_k(\omega_{ik(ij)} - \omega_{kj})] = 0, \\ \Theta_{k(ij)} = [\omega_i(\omega_{ik(ij)} - \omega_{kj})] + [\omega_j(\omega_{jk(ij)} - \omega_{ki})] \\ \quad + \sum_{h=1, \dots, p}^h \neq i, j [\omega_h \omega_{kh(ij)}] = 0, \\ \Theta_{(ii)i'} = [\omega_i(\omega_{i'i'} - \omega_{00} - \omega_{(ii)(i')} - \omega_{ii})] - \sum_{k=1, \dots, p}^k \neq i [\omega_k \omega_{ki}] = 0, \\ \Theta_{ij i'} = [\omega_i \omega_{ij i'}] = 0, \\ \Theta_{jk i'} = [\omega_i \omega_{jk i'}] = 0, \\ \Theta_{ii\alpha} = [\omega_i \omega_{i'\alpha}] = 0, \end{array} \right.$$

Chacune des équations $\Theta_{ii}x = 0$ fait intervenir une expression secondaire ω_{i2} qui n'intervient dans aucune autre des équations : elle est involutive avec

$$\tau_1 = 1, \quad \tau_2 = \dots = \tau_p = 0.$$

De même le groupe des p équations

$$\Theta_{1ij}, \quad \Theta_{2ij}, \quad \dots, \quad \Theta_{pij},$$

où i et j sont deux (différents) des indices $1, 2, \dots, p$, fait intervenir $\frac{p(p+1)}{2}$ expressions secondaires

$$\begin{aligned} \omega_{iiij} - 2\omega_{ijij}, \quad \omega_{jjij} - 2\omega_{jijj}, \quad \omega_{ijij} - \omega_{00} - \omega_{ii} - \omega_{jj}, \\ \omega_{ikij} - \omega_{kjij}, \quad \omega_{jkij} - \omega_{hij}, \quad \omega_{hhij}, \end{aligned}$$

qui n'interviennent dans aucune des autres équations du système, et le système partiel formé par ces p équations est involutif (fin du n° 32), avec

$$\tau_1 = p, \quad \tau_2 = p-1, \quad \dots, \quad \tau_{p-1} = 2, \quad \tau_p = 1.$$

Il ne reste donc à étudier que le système des $\frac{p^2(p+3)}{2}$ équations

$$\begin{aligned} \Theta_{iil} = 0, \quad \Theta_{jil} = 0, \quad \Theta_{iil} = 0, \quad \Theta_{ijl} = 0, \quad \Theta_{jkl} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, p) \end{aligned}$$

et à voir s'il est involutif. Il faut intervenir les expressions secondaires

$$\omega_{iilil} + \omega_{00} - 2\omega_{il}, \quad \omega_{ijil}, \quad \omega_{jil}, \quad \omega_{il} = \omega_{00} - \omega_{ii} - \omega_{jj}$$

qui sont au nombre de $\frac{p^2(p+3)}{2}$. Or on trouve facilement que pour ce système partiel on a

$$\tau_1 = \frac{p^2(p+3)}{2}, \quad \tau_2 = 0, \quad \dots, \quad \tau_p = 0,$$

et l'on vérifie sans peine que les valeurs des expressions secondaires en fonction de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ introduisent exactement $\frac{p^2(p+1)}{2}$ paramètres arbitraires.

Le système (31) est donc en involution, et l'on a en particulier

$$s_p = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Les variétés cherchées dépendent donc de $\frac{p(p-1)}{2}$ fonctions arbitraires de p arguments.

Remarquons que la variété la plus générale à p dimensions dépend de $n - p$ fonctions arbitraires de p arguments, mais on a ici

$$n \geq \frac{p(p+5)}{2}.$$

Enfin on peut remarquer que chacune des équations

$$\omega_1 = 0, \quad \dots, \quad \omega_p = 0$$

est complètement intégrable, c'est-à-dire qu'il y a sur la variété p familles de variétés à $p - 1$ dimensions tangentes en chacun de leurs points à l'une des p variétés planes qui, regardées comme variétés triples, définissent le réseau asymptotique du second ordre.

CHAPITRE V.

LES VARIÉTÉS DÉVELOPPABLES. LES VARIÉTÉS DE COURBURE CONSTANTE DANS UN ESPACE NON EUCLIDIEN DE MÊME COURBURE.

§0. Plaçons-nous maintenant dans un espace euclidien à n dimensions et prenons d'abord un système de référence formé d'un point A et de n vecteurs-unités rectangulaires $I_1, \dots, I_n$. On a les formules (2) et l'on trouve facilement, comme au n° 33, les covariants bilinéaires

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega'_i &= \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \omega_{ki}] & (i = 1, \dots, n), \\ \omega'_{ij} &= \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_{ik} \omega_{kj}] & (i \neq j; i, j = 1, \dots, n). \end{aligned} \right.$$

Faisons correspondre à chaque point A d'une variété à p dimensions un système de référence ayant pour origine le point A et tel que les p premiers vecteurs $I_1, I_2, \dots, I_p$ soient tangents à la

variété. On aura

$$\omega_{p+1} = \dots = \omega_n = 0.$$

Nous dirons que la variété est *développable* lorsque son ds^2 sera celui d'un espace euclidien à p dimensions, c'est-à-dire lorsque la variété sera *applicable* sur une variété plane à p dimensions (de l'espace euclidien donné E_n à n dimensions). Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on puisse faire correspondre à chaque point A de la variété un point B d'un espace euclidien E_p à p dimensions de telle sorte que le ds^2 du point B soit égal à celui du point A, c'est-à-dire égal à $\omega_1^2 + \dots + \omega_p^2$. Si alors on pose

$$dB = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \dots + \omega_p J_p,$$

en désignant par $J_1, J_2, \dots, J_p$ un système de p vecteurs de l'espace E_p , on aura

$$dB \mid dB = \sum \omega_i \omega_k J_i \mid J_k,$$

et, par suite, les vecteurs $J_1, \dots, J_p$ seront de longueur 1 et rectangulaires entre eux.

Cela posé, prenons dans l'espace E_p un système de référence mobile (dépendant de $\frac{p(p+1)}{2}$ paramètres arbitraires); soient θ_{ij} , θ_{ij} les composantes de son déplacement instantané. La variété donnée de E_n sera développable si l'on peut déterminer les $\frac{p(p+1)}{2}$ paramètres du système de référence de E_p de manière à satisfaire aux équations

$$(34) \quad \theta_i = \omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Les équations quadratiques extérieures dérivées de (34) sont

$$(35) \quad \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k (\theta_{ki} - \omega_{ki})] = 0,$$

avec les ω_k comme expressions principales et les $\theta_{ki} = \omega_{ki}$ comme expressions secondaires. Or, si l'on cherche à résoudre les équations (35), on trouve

$$\theta_{ji} - \omega_{ji} = \sum_{k=1}^{k=p} \alpha_{jik} \omega_k$$

avec

$$a_{jik} = a_{hij}$$

et, naturellement,

$$a_{jik} = -a_{ijk}.$$

On déduit facilement de ces relations que tous les coefficients a_{ijk} sont nuls. Il faut donc adjoindre aux équations (34) les suivantes :

$$(36) \quad \theta_{ji} = \omega_{ji}.$$

Les équations quadratiques extérieures dérivées du système (34) et (36) sont maintenant

$$[\omega_{j,p+1}\omega_{p+1,i}] + [\omega_{j,p+2}\omega_{p+2,i}] + \dots + [\omega_{jn}\omega_{ni}] = 0.$$

Si ces conditions ne sont pas vérifiées, le système (34) est incompatible; si elles le sont, le système (34), (36) est *complètement intégrable* et, par suite, la variété est développable.

La condition nécessaire et suffisante pour que la variété soit développable est donnée par les équations quadratiques extérieures

$$(37) \quad \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} [\omega_{i\alpha}\omega_{j\alpha}] = 0 \quad (\alpha = p+1, \dots, n).$$

51. Introduisons maintenant les $n - p$ formes quadratiques asymptotiques

$$\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_n;$$

on a

$$\omega_{i\alpha} = \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial \omega_i}.$$

Les conditions (37) expriment donc que les formes quadratiques $\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_n$ des variables $\omega_1, \dots, \omega_p$ sont extérieurement orthogonales.

Ces formes quadratiques sont susceptibles d'une interprétation euclidienne. On a, en effet, pour toute courbe tracée sur la variété,

$$d^2 A = \Phi_{p+1} I_{p+1} + \dots + \Phi_n I_n + \dots,$$

les termes non écrits dépendant des vecteurs $I_1, \dots, I_p$. Or, si l'on appelle $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ le *vecteur courbure* de la courbe, $\left(\frac{1}{\rho_n}\right)$ le *vecteur courbure normale*, on a

$$d^2 A = ds^2 \left(\frac{1}{\rho}\right)$$

et, par suite,

$$ds^2 \left(\frac{1}{\xi_n} \right) = \Phi_{p+1} l_{p+1} + \dots + \Phi_n l_n.$$

Les formes Φ_α sont donc les composantes suivant les $n - p$ axes rectangulaires $l_{p+1}, \dots, l_n$ du vecteur courbure normale, multiplié par ds^2 .

Pour qu'une variété soit développable, il faut et il suffit que les composantes suivant $n - p$ axes rectangulaires du vecteur $ds^2 \left(\frac{1}{\xi_n} \right)$ soient des formes quadratiques extérieurement orthogonales.

§2. On arrive à des résultats analogues en se plaçant dans un espace non euclidien de courbure $\mathbf{C}$. En prenant un système de référence normal, on a

$$(38) \quad \begin{cases} d\mathbf{A} = \omega_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \omega_n \mathbf{A}_n, \\ d\mathbf{A}_i = -\mathbf{C} \omega_i \mathbf{A} + \omega_{i1} \mathbf{A}_1 + \dots + \omega_{in} \mathbf{A}_n \quad (i = 1, \dots, n), \end{cases}$$

avec

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0.$$

Les formules (26') deviennent alors ici

$$(39) \quad \begin{cases} \omega'_i = \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \omega_{ki}], \\ \omega'_{ij} = -\mathbf{C} [\omega_i \omega_j] + \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_{ik} \omega_{kj}] \quad (i \neq j; i, j = 1, \dots, n). \end{cases}$$

Considérons une variété à p dimensions applicable sur une variété plane de l'espace non euclidien donné $\mathbf{E}_n$, ou encore applicable sur un espace non euclidien $\mathbf{E}_p$ à p dimensions de même courbure $\mathbf{C}$. Le raisonnement fait au n° 50 peut se répéter mot pour mot. On aura à considérer les équations (34) qui conduisent aux équations (35), puis (36). Comme on a ici

$$\theta'_{ij} = -\mathbf{C} [\theta_i \theta_j] + \sum_{k=1}^{k=p} [\theta_{ik} \theta_{kj}] \quad (i, j = 1, 2, \dots, p),$$

on sera conduit à la même condition finale, exprimée par les équations (37).

Pour que la variété soit développable (c'est-à-dire applicable sur une variété plane de l'espace dans lequel est la variété),

il faut et il suffit que les composantes, par rapport aux points $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$, du point $d^2\Lambda$, soient des formes quadratiques extérieurement orthogonales.

Si l'on considère dans l'hyperplan polaire de Λ par rapport à la quadrique absolue le point dont les coordonnées sont $\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_n$, ce point est sur la projection normale de la normale principale à une certaine courbe de la variété et à une distance réduite du point Λ égale à la grandeur de la courbure normale de cette courbe.

Si l'on substitue dans le système de référence aux points $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ n autres points quelconques situés dans l'hyperplan polaire de Λ par rapport à la quadrique absolue (n vecteurs si l'espace est euclidien), la condition pour qu'une variété soit développable devient évidemment la suivante :

Il faut et il suffit que les $n - p$ formes quadratiques $\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_n$ soient extérieurement conjuguées par rapport à la forme quadratique $H(x_{p+1}, \dots, x_n)$ qui indique le carré de la distance réduite au point Λ du point dont les $n - p$ dernières coordonnées sont $x_{p+1}, \dots, x_n$, les autres étant

$$x = 1, \quad x_1 = \dots = x_p = 0.$$

33. Nous avons démontré (n° 20) que si r formes quadratiques réelles extérieurement orthogonales ne peuvent pas s'exprimer en fonction de moins de n variables, le nombre r est au moins égal à n , et, si r est égal à n , les r formes sont linéairement indépendantes et se déduisent par une substitution orthogonale de n formes carrés parfaits.

Nous déduisons de là que, *étant donné un espace euclidien ou non euclidien, et dans cet espace une variété développable réelle à p dimensions, si l'hyperplan tangent à la variété dépend de q paramètres, l'hyperplan osculateur est au moins à $p + q$ dimensions, et, s'il est exactement à $p + q$ dimensions, on peut choisir les sommets $\Lambda_{p+1}, \dots, \Lambda_n$ du système de référence de manière que $\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_{p+q}$ soient les carrés parfaits de q formes linéaires indépendantes en $\omega_1, \dots, \omega_p$, les formes quadratiques $\Phi_{p+q+1}, \dots, \Phi_n$ étant identiquement nulles.*

On peut énoncer ce théorème sous une autre forme :

Étant donnée, dans un espace euclidien ou non euclidien à

n dimensions, une variété développable réelle à p dimensions, si l'hyperplan osculateur est à $p + q \leq 2p$ dimensions, l'hyperplan tangent dépend de q paramètres au plus, et s'il dépend exactement de q paramètres, on peut choisir les sommets $\Lambda_{p+1}, \dots, \Lambda_n$ du système de référence de manière que $\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_{p+q}$ soient les carrés parfaits de q formes linéaires indépendantes, $\Phi_{p+q+1}, \dots, \Phi_n$ étant identiquement nulles.

§4. Pour savoir quel est le degré de généralité des variétés développables précédentes, choisissons un système de référence, comme il a été expliqué au n° 13, en partant d'une forme quadratique absolue

$$\Omega = \frac{x^2}{C} + \sum_{i,j}^{1,\dots,p} a_{ij} x_i x_j + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2$$

avec $\frac{p(p+1)}{2}$ paramètres arbitraires a_{ij} . Les relations *identiques* qui existeront entre les expressions de Pfaff $\omega_i, \omega_{i0}, \omega_{ij}$ seront :

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \omega_{i0} + C \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} \omega_k = 0 & (i = 1, \dots, p), \\ \omega_{\alpha 0} + C \omega_{\alpha} = 0 & (\alpha = p+1, \dots, n), \\ \omega_{i\alpha} + \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} \omega_{\alpha k} = 0 & (i = 1, \dots, p; \alpha = p+1, \dots, n), \\ \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} = 0 & (\alpha, \beta = p+1, \dots, n). \end{array} \right.$$

On pourra toujours supposer que les formes $\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_{p+q}$ sont égales à $\omega_1^2, \dots, \omega_q^2$, de sorte que, comme au n° 46, les variétés cherchées seront définies par le système de Pfaff (29). Les équations quadratiques extérieures dérivées sont encore les équations (30), mais les expressions secondaires

$$\omega_{i,j}, \omega_{j,i}, \omega_{p+j,p+i}, \omega_{k,i}, \omega_{p+i,p+q+j},$$

ne sont plus indépendantes; elles sont, d'après (40), liées par les relations

$$\omega_{p+i,p+j} + \omega_{p+j,p+i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, q).$$

D'après cela, si i et j sont deux quelconques des indices 1, 2, ..., q , les expressions secondaires

$$\omega_{ij}, \omega_{ji} \quad \text{et} \quad \omega_{p+i,p+j} = -\omega_{p+j,p+i}$$

entrent dans deux et deux seulement des équations (30), à savoir

$$\begin{aligned} -[\omega_{i,p+i}\omega_{ji}] - [\omega_{j,p+j}\omega_{p+j,p+i}] &= 0, \\ -[\omega_{j,p+j}\omega_{ij}] - [\omega_{i,p+i}\omega_{p+j,p+i}] &= 0; \end{aligned}$$

ces deux équations forment un système involutif avec

$$\sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = 1.$$

Le système (29) est donc lui-même involutif, avec les valeurs

$$s_1 = q(n - q), \quad s_2 = \frac{q(q-1)}{2}, \quad s_3 = \dots = s_q = 0.$$

Par conséquent, *les variétés développables réelles à p dimensions pour lesquelles l'hyperplan tangent dépend de $q \leq p$ paramètres, le nombre de dimensions de l'hyperplan osculateur ayant la valeur minima $p + q$, dépendent de $\frac{q(q-1)}{2}$ fonctions arbitraires de deux arguments.*

Rappelons (n° 46) que les variétés non développables dont le réseau asymptotique appartient au même type projectif dépendent de $q(q-1)$ fonctions arbitraires de deux arguments.

Il y a exception pour $q = 1$; mais alors toutes les variétés dont l'hyperplan tangent ne dépend que d'un paramètre sont développables ; elles dépendent de $n - 1$ fonctions arbitraires d'un argument et sont engendrées (n° 48) par les variétés planes à $p - 1$ dimensions osculatrices à une courbe gauche. Ces variétés développables sont les seules qui existent lorsque $n = p + 1$.

53. Étudions maintenant l'autre cas extrême. Supposons que l'hyperplan osculateur d'une variété développable réelle à p dimensions soit au nombre maximum $\frac{p(p-3)}{2}$ de dimensions. Choisissons un système de référence défini en partant de la forme quadratique absolue

$$\Omega = \frac{x^2}{C} + H(x_1, x_2, \dots, x_p) + H'(x_{p+1}, \dots, x_n),$$

où H et H' sont deux formes quadratiques définies positives provisoirement arbitraires.

Les points $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ du système de référence sont dans l'hyperplan polaire de Λ par rapport à la quadrique absolue ; les sommets $\Lambda_1, \dots, \Lambda_p$ seront choisis dans l'hyperplan tangent et les sommets $\Lambda_{p+1}, \dots, \Lambda_n$ seront alors dans l'hyperplan normal. On pourra,

en désignant par $(ii), (ij)$ les $\frac{p(p+1)}{2}$ indices $p+1, \dots, \frac{p(p+3)}{2}$, et par λ les indices suivants, supposer qu'on a

$$\Phi_{(ii)} = \omega_i^2, \quad \Phi_{(ij)} = 2\omega_i\omega_j, \quad \Phi_\lambda = 0 \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, p).$$

La condition pour la variété d'être développable ne sera plus que les formes quadratiques $\Phi_{(ii)}, \Phi_{(ij)}$ soient extérieurement orthogonales, mais *qu'elles soient extérieurement conjuguées par rapport à la forme quadratique H'*. Il résulte de là que cette forme H' n'est pas arbitraire : on trouve facilement que ses coefficients satisfont aux conditions

$$(41) \quad \begin{cases} a_{(ii)(jj)} = a_{(ij)(ij)}, \\ a_{(ii)(jk)} = a_{(ij)(ik)}, \\ a_{(ij)(kl)} = a_{(ik)(jl)} = a_{(il)(jk)}. \end{cases}$$

56. Cela posé, les variétés cherchées seront les solutions du système de Pfaff :

$$(42) \quad \begin{cases} \omega_{(ii)} = 0, & \omega_{ij} = 0, & \omega_\lambda = 0, \\ \omega_i \omega_{(ii)} = \omega_i, & \omega_j \omega_{(ii)} = 0, \\ \omega_i \omega_{(ij)} = \omega_j, & \omega_j \omega_{(ij)} = \omega_i, & \omega_k \omega_{(ij)} = 0, \\ \omega_i \omega_\lambda = 0. \end{cases}$$

Les équations quadratiques extérieures dérivées des équations (42) sont :

$$(43) \quad \begin{aligned} \Theta_{(ii)} &= [\omega_i(\omega_{(ii)(ii)} - 2\omega_{ii})] + \sum_{\substack{k=1, \dots, p \\ k \neq i}} [\omega_k(\omega_{(ik)(ii)} - \omega_{ki})] = 0, \\ \Theta_{j(ii)} &= [\omega_i(\omega_{(ij)(ii)} - \omega_{ji})] + \sum_{\substack{k=1, \dots, p \\ k \neq i}} [\omega_k \omega_{(jk)(ii)}] = 0, \\ \Theta_{i(ij)} &= [\omega_i(\omega_{(ii)(ij)} - 2\omega_{ij})] \\ &\quad + [\omega_j(\omega_{(ij)(ij)} - \omega_{ii} - \omega_{jj})] + \sum_{\substack{k=1, \dots, p \\ k \neq i, j}} [\omega_k(\omega_{(ik)(ij)} - \omega_{kj})] = 0, \\ \Theta_{k(ij)} &= [\omega_i(\omega_{(ik)(ij)} - \omega_{kj})] \\ &\quad + [\omega_j(\omega_{(jk)(ij)} - \omega_{ki})] + \sum_{\substack{k=1, \dots, p \\ k \neq i, j}} [\omega_k \omega_{(l, i)(j)}] = 0, \\ \Theta_{i\lambda} &= [\omega_i \omega_{(ii)\lambda}] + \sum_{k=1}^p [\omega_k \omega_{(ik)\lambda}] = 0. \end{aligned}$$

Les expressions principales sont ici $\omega_1, \dots, \omega_p$, et les expressions secondaires sont :

$$\begin{aligned} \omega_{(ii)(ii)} &= 2\omega_{ii}, & \omega_{(ij)(ii)} &= \omega_{ji}, & \omega_{(jk)(ii)} &= \omega_{(ii)(ij)} = 2\omega_{ij}, & \omega_{(ij)(ij)} &= \omega_{ii} - \omega_{jj}, \\ \omega_{(ik)(ij)} &= \omega_{kj}, & \omega_{(kl)(ij)} &= \omega_{(il)\lambda}, & \omega_{(ij)\lambda} &= \end{aligned}$$

mais *elles ne sont plus indépendantes*. En effet la forme Ω dépend d'un certain nombre de paramètres arbitraires, à savoir tous les coefficients de la forme II et ensuite tous les coefficients de la forme II' *assujettis aux seules relations* (41). Par suite, les expressions $\omega_i, \omega_{i0}, \omega_{ij}$ sont liées (n° 13) par les relations *identiques* (10') qui s'écrivent ici [en tenant compte de (42)] :

$$\begin{aligned} (44) \quad & \left\{ \begin{aligned} \omega_{i0} + \mathbf{C} \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} \omega_k &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p), \\ \omega_{\alpha 0} &= 0, \quad (\alpha = p+1, \dots, n), \\ \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} \omega_{\alpha k} + \sum_{\beta=p+1}^{\beta=n} a_{\alpha\beta} \omega_i \beta &= 0 \quad (i = 1, \dots, p; \alpha = p+1, \dots, n); \end{aligned} \right. \\ (45) \quad & \left\{ \begin{aligned} A_{ij|ij} &\equiv \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} [a_{(ii)\alpha} \omega_{(j)\alpha} + a_{(j)\alpha} \omega_{(ii)\alpha} - 2 a_{(ij)\alpha} \omega_{(ij)\alpha}] = 0, \\ A_{ij|ik} &\equiv \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} [a_{(ii)\alpha} \omega_{(jk)\alpha} + a_{(jk)\alpha} \omega_{(ii)\alpha} - a_{(ij)\alpha} \omega_{(ik)\alpha} - a_{(ik)\alpha} \omega_{(ij)\alpha}] = 0, \\ A_{il|jk} &\equiv \sum [a_{(ij)\alpha} \omega_{(kl)\alpha} + a_{(kl)\alpha} \omega_{(ij)\alpha} - a_{(ik)\alpha} \omega_{(jl)\alpha} - a_{(jl)\alpha} \omega_{(ik)\alpha}] = 0. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Les identités (44) ne nous intéressent pas. Quant aux identités (45), elles expriment des relations entre les expressions secondaires du système (43) :

$$\begin{aligned} \overline{\omega_{(ii)(ii)}} &= \omega_{(ii)(ii)} - 2\omega_{ii}, \\ \overline{\omega_{(ij)(ii)}} &= \omega_{(ij)(ii)} - \omega_{ji}, \\ \overline{\omega_{(jk)(ii)}} &= \omega_{(jk)(ii)}, \\ \overline{\omega_{(ii)(ij)}} &= \omega_{(ii)(ij)} - 2\omega_{ij}, \\ \overline{\omega_{(ij)(ij)}} &= \omega_{(ij)(ij)} - \omega_{ii} - \omega_{jj}, \\ \overline{\omega_{(ik)(ij)}} &= \omega_{(ik)(ij)} - \omega_{kj}, \\ \overline{\omega_{(kl)(ij)}} &= \omega_{(kl)(ij)}, \\ \overline{\omega_{(ii)\lambda}} &= \omega_{(ii)\lambda}, \\ \overline{\omega_{(ij)\lambda}} &= \omega_{(ij)\lambda}. \end{aligned}$$

Désignons maintenant par $\gamma_{(ij)\alpha}$ la combinaison linéaire des expressions secondaires $\bar{\omega}_{(ij)\beta}$ ($\beta = p + 1, \dots, n$) obtenue en prenant la demi-dérivée par rapport à la variable x_α de la forme quadratique K et en remplaçant dans cette demi-dérivée chaque variable x_β par $\bar{\omega}_{(ij)\beta}$. Comme le discriminant de H' n'est pas nul, les $n - p$ expressions $\gamma_{(ij)\alpha}$, où $\alpha = p + 1, \dots, n$, sont des combinaisons indépendantes des expressions $\bar{\omega}_{(ij)\alpha}$.

Avec ces notations les relations (45) deviennent

$$(45') \quad \begin{cases} \Lambda_{ij|ij} \equiv \gamma_{(ii)(jj)} + \gamma_{(jj)(ii)} - 2\gamma_{(ij)(ij)} = 0 & (i \neq j), \\ \Lambda_{ij|ik} \equiv \gamma_{(ii)(jk)} + \gamma_{(jk)(ii)} - \gamma_{(ij)(ik)} - \gamma_{(ik)(ij)} = 0 & (i \neq j; i \neq k), \\ \Lambda_{il|jk} \equiv \gamma_{(ij)(kl)} + \gamma_{(kl)(ij)} - \gamma_{(ik)(jl)} - \gamma_{(jl)(ik)} = 0 & (i \neq l; j \neq k), \end{cases}$$

et les équations quadratiques extérieures (43) peuvent également s'écrire

$$(43') \quad \bar{\Theta}_{i\alpha} \equiv \sum_{k=1}^{k=p} [\omega_k \gamma_{(ik)\alpha}] = 0 \quad (i = 1, \dots, p; \alpha = p + 1, \dots, n).$$

57. Les expressions de Pfaff $\Lambda_{il|jk}$ ne sont pas toutes indépendantes; si en effet les indices i, j, k, l sont distincts, on a l'identité

$$\Lambda_{ij|kl} + \Lambda_{ik|lj} + \Lambda_{il|jk} = 0.$$

D'autre part, on a évidemment

$$\Lambda_{ij|kl} = \Lambda_{kl|ij} = -\Lambda_{ji|kl} = -\Lambda_{lj|ik}.$$

Cela posé, on pourra toujours se borner à considérer les expressions $\Lambda_{ij|kl}$ pour lesquelles on a

$$i \leq j, \quad k \leq l, \quad j \leq l,$$

et enfin on pourra aussi supposer $i \leq k$, car si i était supérieur à k , l'équation

$$\Lambda_{ij|kl} = 0$$

serait une conséquence des équations

$$\Lambda_{ki|jl} = 0, \quad \Lambda_{kj|il} = 0.$$

Nous dirons que l'expression $\Lambda_{ij|kl}$, où les indices i, j, k, l satisfont aux inégalités précédentes, est de *poïds* j ; nous dirons de

même que l'expression $\gamma_{ij\alpha}$ où $i \leq j$ est de poids i . Le poids de γ_{ijkl} est le poids maximum des expressions γ qu'elle contient.

Cela posé, nous allons calculer pour les équations (43') les valeurs des nombres $s_1, \dots, s_p$. Si les expressions $\gamma_{ij\alpha}$ étaient toutes indépendantes, les expressions $\gamma_{ij\alpha}$ pour lesquelles α a une valeur donnée n'entreraient que dans les p équations

$$\bar{\theta}_{1\alpha} = 0, \quad \dots, \quad \bar{\theta}_{p\alpha} = 0;$$

or ces p équations formeraient un système involutif avec les valeurs

$$p, \quad p-1, \quad \dots, \quad 2, 1$$

des caractères s_i . Le système total serait donc involutif avec les valeurs

$$\begin{array}{ll} \tau_1 = p(n-p), & \tau_2 = (p-1)(n-p), \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \tau_{p-1} = 2(n-p), & \tau_p = n-p. \end{array}$$

Le système (43') conserve la même forme si l'on effectue sur les variables principales $\omega_1, \dots, \omega_p$ une substitution linéaire quelconque; on peut donc supposer que les p systèmes de valeurs

$$\begin{array}{lll} \xi_1, & \dots, & \xi_p; \\ \xi'_1, & \dots, & \xi'_p; \\ \dots, & \dots, & \dots; \\ \xi_1^{p-1}, & \dots, & \xi_p^{p-1}, \end{array}$$

dont il est question au n° 28, se réduisent à

$$\begin{array}{lll} 1, & 0, & \dots, \quad 0; \\ 0, & 1, & \dots, \quad 0; \\ \dots, & \dots, & \dots, \quad \dots; \\ 0, & 0, & \dots, \quad 1. \end{array}$$

Le nombre s_1 est alors le nombre des expressions $\gamma_{(1i)\alpha}$ indépendantes, c'est-à-dire le nombre des expressions γ indépendantes de poids 1; le nombre $s_1 + s_2$ est le nombre des expressions indépendantes de poids 1 et 2, et ainsi de suite, le nombre $s_1 + s_2 + \dots + s_h$ le nombre des expressions indépendantes de poids 1, 2, ..., h .

Or il y a en tout, d'après ce qui a été dit plus haut, respectivement

$$\tau_1, \quad \tau_2, \quad \dots, \quad \tau_p$$

expressions γ_i de poids 1, 2, ..., p ; tout revient donc à calculer le nombre de relations indépendantes qui existent entre les expressions de poids 1, les expressions de poids 1 et 2, et ainsi de suite; soient

$$\tau_1, \quad \tau_1 + \tau_2, \quad \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_p$$

ces nombres. On aura

$$s_i = \tau_i - \tau_{i-1}.$$

Cela posé, il n'y a aucune relation $\Lambda_{ij|kl} = 0$ de poids 1, puisque $j > i \geq 1$. Prenons celles qui sont de poids 2 :

$$\Lambda_{12|kl} = 0 \quad (k = 1, \quad l \geq k, \quad l \leq 2);$$

si dans ces relations on ne conserve que les expressions γ_i de poids 2, elles se réduisent à

$$\begin{aligned} \gamma_{(2l)(11)} &= 0 & (l = 2, \dots, p), \\ \gamma_{(2l)(1k)} - \gamma_{(2k)(1l)} &= 0 & (k < l; k, l = 2, \dots, p); \end{aligned}$$

elles sont évidemment indépendantes et sont au nombre de

$$p - 1 + \frac{(p-1)(p-2)}{2} = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Si maintenant dans les relations de poids 3

$$\Lambda_{i3|kl} = 0 \quad (i = 1, 2; k \leq i, l \geq 3, l > k),$$

on ne conserve que les expressions γ_i de poids 3, elles se réduisent à

$$\begin{aligned} \gamma_{(3l)(ik)} &= 0 & (i = 1, 2; k = 1, 2; i \leq k; l \geq 3), \\ \gamma_{(3l)(ik)} - \gamma_{(3k)(il)} &= 0 & (i = 1, 2; k < l; k, l = 3, \dots, p); \end{aligned}$$

elles sont manifestement indépendantes et sont au nombre de

$$3(p-2) + 2 \frac{(p-2)(p-3)}{2} = 2 \frac{p(p-2)}{2}.$$

D'une manière générale si, dans les relations de poids j ,

$$\Lambda_{ij|kl} = 0 \quad (i = 1, \dots, j-1; k \leq i, l \geq j, l > k),$$

on ne conserve que les expressions γ_i de poids j , elles se réduisent à

$$\begin{aligned} \gamma_{(j l)(i k)} &= 0 & (i, k = 1, 2, \dots, j-1; i \leq k; l = j, j+1, \dots, p), \\ \gamma_{(j l)(i k)} - \gamma_{(j k)(i l)} &= 0 & (i = 1, 2, \dots, j-1; k < l; k, l = j, j+1, \dots, p); \end{aligned}$$

elles sont manifestement indépendantes et sont au nombre de

$$(p-j+1) \frac{(j-1)j}{2} + (j-1) \frac{(p-j+1)(p-j)}{2} \\ = p \frac{(j-1)(p-j+1)}{2}.$$

De ce qui précède il résulte que τ_1 est nul, que τ_2 est le nombre des expressions A de poids 2, d'une manière générale que τ_h est le nombre des expressions A de poids h :

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = \frac{p(p-1)}{2}, \quad \dots, \quad \tau_j = \frac{p(j-1)(p-j+1)}{2}, \quad \dots, \\ \tau_p = \frac{p(p-1)}{2}.$$

On aura finalement

$$s_1 = \tau_1 - \tau_1 = p(n-p), \quad s_2 = \tau_2 - \tau_2 = (p-1)\left(n - \frac{3p}{2}\right), \quad \dots, \\ s_j = \tau_j - \tau_j = (p-j+1)\left(n - p \frac{j+1}{2}\right), \quad \dots, \\ s_p = \tau_p - \tau_p = n - \frac{p(p+1)}{2}.$$

58. Calculons maintenant le nombre des paramètres entrant dans la solution générale du système (43'). Si les expressions $\gamma_{(ij)\alpha}$ étaient indépendantes, on aurait

$$\gamma_{(ij)\alpha} = \sum_{k=1}^{k=p} c_{(ijk)\alpha} \omega_k,$$

où les coefficients $c_{(ijk)\alpha}$ sont arbitraires, avec la restriction que les trois indices i, j, k peuvent être échangés d'une manière quelconque; le nombre de ces paramètres serait

$$\tau_1 + 2\tau_2 + \dots + p\tau_p.$$

Or il est évident que les paramètres doivent satisfaire aux relations

$$(A_{ijlkh})_l = c_{(ikl)(j)h} + c_{(jhl)(ik)} - c_{(ihl)(jk)} - c_{(jkl)(ih)} = 0;$$

nous pouvons, d'après ce qui a été dit plus haut, toujours supposer

$$i < j, \quad k < h; \quad i \leq k, \quad j \leq h;$$

mais nous pouvons toujours supposer

$$l \leq j.$$

En effet, on a les identités

$$(\Lambda_{ij \setminus kh})_l + (\Lambda_{jl \setminus kh})_i + (\Lambda_{li \setminus kh})_j = 0,$$

$$(\Lambda_{ij \setminus kh})_l + (\Lambda_{ij \setminus hl})_k + (\Lambda_{ij \setminus lk})_h = 0;$$

la dernière montre d'abord que si l est supérieur à h , la relation

$$(\Lambda_{ij \setminus kh})_l = 0$$

se ramène aux relations

$$(\Lambda_{ij \setminus hl})_k = 0, \quad (\Lambda_{ij \setminus lk})_h = 0$$

pour lesquelles l'indice qui joue le rôle de l est inférieur à celui qui joue le rôle de h . On peut donc toujours supposer

$$l \leq h.$$

Si maintenant l est supérieur à j , la relation

$$(\Lambda_{ij \setminus kh})_l = 0$$

se ramène aux relations

$$(\Lambda_{jl \setminus kh})_i = 0, \quad \Lambda_{(il \setminus kh)j} = 0$$

dont la dernière satisfait aux conditions voulues et la première y satisfait aussi si $j \leq k$; si j était supérieur à k , c'est-à-dire si l'on avait

$$i \leq k < j < l < h,$$

cette première relation serait une conséquence des relations

$$(\Lambda_{kj \setminus lh})_i = 0, \quad (\Lambda_{kl \setminus jh})_i = 0$$

qui satisfont elles-mêmes à toutes les conditions voulues.

Finalement, nous n'avons à considérer que les relations

$$(\Lambda_{ij \setminus kh})_l = 0$$

pour lesquelles on a

$$i < j, \quad k \leq h, \quad i \leq k, \quad j \leq h, \quad l \leq j.$$

Nous dirons qu'une telle relation est de *poids* l . Si de même nous appelons *poids* du coefficient $c_{(ijk)\alpha}$ le plus petit des indices i, j, k ,

nous voyons que le poids de $(\Lambda_{ij|kh})_1$ est le plus grand des poids des coefficients c qui y figurent.

Cela posé, considérons d'abord les relations $(\Lambda_{ij|kh})_1 = 0$ de poids 1; on les déduit des relations entre les expressions γ en remplaçant $\gamma_{ij\alpha}$ par $c_{1ij\alpha}$; il y en a donc autant que de relations entre les γ , c'est-à-dire

$$\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_p.$$

Prenons maintenant les relations $(\Lambda_{ij|kh})_2 = 0$ de poids 2; si dans ces relations nous ne conservons que les coefficients c de poids 2, elles se déduisent des relations $\Lambda_{ij|kl} = 0$ de poids supérieur ou égal à 2, où l'on aurait enlevé les expressions γ de poids 1 et où l'on aurait remplacé toutes les autres expressions $\gamma_{ij\alpha}$ par $c_{2ij\alpha}$; il en résulte que les relations $(\Lambda_{ij|kh})_2 = 0$ sont toutes indépendantes entre elles et indépendantes de celles de poids 1 et que leur nombre est

$$\tau_2 + \dots + \tau_p.$$

Le raisonnement peut être continué et l'on voit finalement que les coefficients c sont liés par

$$\tau_1 + 2\tau_2 + \dots + p\tau_p$$

relations indépendantes. Le nombre des paramètres c indépendants est donc

$$\tau_1 + 2\tau_2 + \dots + p\tau_p - (\tau_1 + 2\tau_2 + \dots + p\tau_p) = s_1 + 2s_2 + \dots + ps_p.$$

Le système de Pfaff (12) est donc en involution et les variétés cherchées, qui sont les variétés développables à p dimensions les plus générales de l'espace à n dimensions, dépendent de

$$s_p = n - \frac{p(p+1)}{2}$$

fonctions arbitraires de p arguments.

59. On peut remarquer que la discussion précédente revient à celle du système d'équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre

$$\frac{\partial^2 z_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial^2 z_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 z_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 z_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

aux $n - p$ fonctions inconnues z_{ij} , z_i des p variables indépendantes $x_1, \dots, x_p$. Si l'on fait abstraction des fonctions z_i , la solution générale du système précédent dépend, d'après ce qu'on a trouvé, de p fonctions arbitraires de p arguments. Ce système contient

$$\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_p = \frac{p^2(p^2 - 1)}{12}$$

équations à $\frac{p(p-1)}{2}$ fonctions inconnues.

60. *Les variétés développables à p dimensions dont l'hyperplan tangent dépend de $q < p$ paramètres.* — Nous nous proposons maintenant de déterminer les variétés développables dont l'hyperplan tangent dépend de $q < p$ paramètres et dont l'hyperplan osculateur a le nombre maximum $p + \frac{q(q+1)}{2}$ de dimensions. Nous supposons naturellement $q > 1$, car le cas $q = 1$ a déjà été étudié (nos 48 et 54).

Nous avons vu au n° 47 que les variétés à p dimensions dont l'hyperplan tangent ne dépend que de $q < p$ paramètres et dont l'hyperplan osculateur est à $p + \frac{q(q+1)}{2}$ dimensions contiennent une variété plane fixe (II) à $p - q - 1$ dimensions. Nous pouvons, comme au n° 47, supposer

$$\Phi_{i,ii} = \omega_i^2, \quad \Phi_{i,jj} = 2\omega_i\omega_j \quad (i = j; i, j = 1, 2, \dots, q)$$

avec

$$(46) \quad \begin{cases} \omega_{i(ii)} = \omega_i, & \omega_{i,ij} = \omega_j, & \omega_{i,il} = 0 & (i, j = 1, 2, \dots, q), \\ \omega_{l,ii} = 0, & \omega_{l,ij} = 0, & \omega_{l,il} = 0 & (l = q+1, \dots, p). \end{cases}$$

Prenons d'autre part dans la variété plane fixe (II) $p - q$ points fixes $B_{q+1}, \dots, B_p$ et choisissons $p - q$ coefficients $u_{q+1}, \dots, u_p$ tels que les points

$$B_{q+1} = u_{q+1}A, \quad \dots, \quad B_p = u_pA$$

soient dans l'hyperplan polaire de A par rapport à la quadrique absolue (ou soient des vecteurs dans l'espace euclidien): on pourra choisir ces points comme points $\Lambda_{q+1}, \dots, \Lambda_p$. La variété

cherchée devra donc satisfaire à la condition que les points

$$\Lambda_l + u_l \Lambda \quad (l = q + 1, \dots, p)$$

soient fixes. Cela donne

$$(47) \quad \begin{cases} du_l + \omega_{l0} = 0, \\ \omega_{li} + u_l \omega_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q), \\ \omega_{lm} + u_l \omega_m = 0 \quad (m = q + 1, \dots, p). \end{cases}$$

Finalement, les variétés cherchées sont les solutions du système de Pfaff formé par les équations (46), (47) et

$$(48) \quad \omega_{(ii)} = 0, \quad \omega_{(ij)} = 0, \quad \omega_\lambda = 0.$$

Les équations quadratiques extérieures dérivées de ce système se réduisent aux équations (43), mais où les indices i, j, k ne prennent que les valeurs $1, 2, \dots, q$. On arrive donc à la conclusion que *les variétés cherchées dépendent de*

$$n - p - \frac{q(q-1)}{2}$$

fonctions arbitraires de q arguments.

61. Nous avons vu au n° 21 que si $p = 3$, un système quelconque de formes quadratiques réelles linéairement indépendantes extérieurement orthogonales se ramène toujours par une substitution orthogonale à un système de formes carrés parfaits.

Supposons d'une manière générale qu'avec un système de référence normal, les formes asymptotiques linéairement indépendantes $\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_{p+r}$ soient les carrés parfaits de $n - p$ formes linéaires $\Omega_{p+1}, \dots, \Omega_{p+r}$ en $\omega_1, \dots, \omega_p$, les formes $\Phi_{p+r+1}, \dots, \Phi_n$ étant identiquement nulles.

Chacune des variétés planes tangentes

$$\Omega_{p+1} = 0, \quad \dots, \quad \Omega_{p+r} = 0$$

est une variété plane tangente *distinguée*. Quand le point Λ se déplace d'une manière quelconque sur la variété, l'hyperplan normal a en commun avec l'hyperplan normal infiniment voisin le

point

$$x \Lambda + x_{p+1} \Lambda_{p+1} + \dots + x_n \Lambda_n$$

si le point

$$x d\Lambda + x_{p+1} d\Lambda_{p+1} + \dots + x_n d\Lambda_n$$

appartient à l'hyperplan normal; on voit facilement ainsi que l'hyperplan normal admet comme variété plane caractéristique la variété plane $[\Lambda_{p+r+1} \dots \Lambda_n]$. La variété plane normale $[\Lambda_{p+1} \dots \Lambda_{p+r}]$, qui est l'intersection de l'hyperplan normal et de l'hyperplan osculateur, peut s'appeler l'*hyperplan normal principal*.

Cela posé, lorsque le point Λ se déplace tangentielllement à la variété plane tangente distinguée $\Omega_\alpha = 0$, l'hyperplan normal a en commun avec l'hyperplan normal infiniment voisin le point Λ_α de l'hyperplan normal principal. Ce point Λ_α est dans l'hyperplan polaire de Λ par rapport à la quadrique absolue (ou est un vecteur, si l'espace est euclidien). On peut l'appeler le centre de courbure principal relatif à la variété plane tangente distinguée considérée.

L'hypothèse faite revient donc à admettre l'*existence dans l'hyperplan normal principal à r dimensions de r centres de courbure principaux conjugués entre eux et conjugués de Λ par rapport à la quadrique absolue*.

Cette propriété appartient à toutes les variétés développables réelles à moins de quatre dimensions, et aussi à toutes les variétés développables réelles dont l'hyperplan tangent dépend d'un nombre quelconque $q \leq p$ de paramètres, l'hyperplan osculateur n'étant pas à plus de $p + q$ dimensions.

CHAPITRE VI.

LES VARIÉTÉS D'UN ESPACE À COURBURE CONSTANTE DONT LE ds^2 EST ÉGALEMENT À COURBURE CONSTANTE, MAIS DIFFÉRENTE DE CELLE DE L'ESPACE.

62. Nous allons nous placer maintenant dans un espace non euclidien de courbure $\mathbf{C}$ et chercher dans cet espace les variétés à p dimensions dont le ds^2 est de courbure constante $\mathbf{c}$, c'est-à-dire dont le ds^2 est celui d'un espace à p dimensions de courbure $\mathbf{c}$.

Conservons le point de vue du n° 50. Les variétés cherchées sont celles pour lesquelles le système de Pfaff

$$\theta_1 = \omega_1, \quad \dots, \quad \theta_p = \omega_p$$

est compatible; il entraîne comme conséquence les équations

$$\theta_{ij} = \omega_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, p);$$

mais ici on a

$$\begin{aligned} \theta'_{ij} &= -\mathbf{C} [\theta_i \theta_j] + \sum_{k=1}^{k=p} [\theta_{ik} \theta_{kj}], \\ \omega'_{ij} &= -\mathbf{C} [\omega_i \omega_j] + \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_{ik} \omega_{kj}]. \end{aligned}$$

On en déduit la condition nécessaire et suffisante exprimée par les relations

$$(\mathbf{C} - \mathbf{c}) [\omega_i \omega_j] + \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} [\omega_{i\alpha} \omega_{j\alpha}] = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, p).$$

Ces relations sont encore vraies si l'espace donné est euclidien; il suffit alors d'y faire $\mathbf{C} = 0$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété à p dimensions d'un espace de courbure C ait son ds^2 de courbure constante c est que le ds^2 de la variété et les composantes normales $\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_n$ du vecteur $d^2\Lambda$ soient extérieurement conjuguées par rapport à la forme quadratique

$$(\mathbf{C} - \mathbf{c}) u^2 + u_{p+1}^2 + \dots + u_n^2.$$

Considérons la projection sur l'hyperplan normal à la variété en Λ , du point $d^2\Lambda + \mathbf{c}\Lambda$. On a

$$\begin{aligned} d\Lambda &= \omega_1 \Lambda_1 + \omega_2 \Lambda_2 + \dots + \omega_p \Lambda_p, \\ d^2\Lambda &= (\omega_1 \omega_{10} + \dots + \omega_p \omega_{p0}) \Lambda + \Phi_{p+1} \Lambda_{p+1} + \dots + \Phi_n \Lambda_n + \dots \end{aligned}$$

les termes non écrits ne dépendant que de $\Lambda_1, \dots, \Lambda_p$; or

$$\omega_1 \omega_{10} + \dots + \omega_p \omega_{p0} = -\mathbf{C} (\omega_1^2 + \dots + \omega_p^2) = -\mathbf{C} \Phi;$$

done

$$\text{proj. } (d^2\Lambda + c\,ds^2\Lambda) = (c - C)\Phi\Lambda + \Phi_{p+1}\Lambda_{p+1} + \dots + \Phi_n\Lambda_n.$$

Les composantes de cette projection par rapport aux points $\Lambda, \Lambda_{p+1}, \dots, \Lambda_n$ sont

$$(c - C)\Phi, \quad \Phi_{p+1}, \quad \dots, \quad \Phi_n.$$

La condition pour que la variété soit de courbure constante c est que ces $n - p + 1$ composantes soient extérieurement conjuguées par rapport à la forme quadratique

$$\frac{x^2}{c - c} + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2,$$

c'est-à-dire par rapport à la forme quadratique qui exprime la puissance du point $(x, x_{p+1}, \dots, x_n)$ de l'hyperplan normal par rapport à l'hypersphère de centre Λ et de rayon réduit $\frac{1}{\sqrt{c - C}}$.

Cet énoncé nous permet immédiatement de voir ce que devient la condition quand on choisit un système de référence quelconque.

Remarquons avant d'aller plus loin que le réseau linéaire

$$\lambda\Phi + \lambda_{p+1}\Phi_{p+1} + \dots + \lambda_n\Phi_n = 0$$

qui s'introduit maintenant comprend, outre les cônes du réseau asymptotique, le *cône isotrope*; on peut lui donner le nom de *réseau asymptotico-isotrope*.

63. Nous sommes conduit à considérer les systèmes de référence introduits au n° 14 et caractérisés :

1° Par la forme linéaire K qui indique la masse relative d'un point quelconque M par rapport au point-unité Λ ;

2° Par la forme quadratique H qui représente la puissance d'un point quelconque M par rapport à l'hypersphère de centre Λ et de rayon réduit $\frac{1}{\sqrt{c - C}}$.

Nous supposons les points $\Lambda_1, \dots, \Lambda_p$ dans l'hyperplan polaire

65. Les identités (12), (13), (14) et (15) se réduisent ici à

$$(53) \quad c_{p+1} \omega_{p+1} + \dots + c_{n+1} \omega_{n+1} = 0;$$

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_i = \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} \xi_{\lambda} \omega_{\lambda i} \quad (i = 1, 2, \dots, p), \\ d\xi_{\alpha} = - \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} \xi_{\lambda} \omega_{\lambda \alpha} \quad (\alpha = p+1, \dots, n+1); \end{array} \right.$$

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} c_{\lambda} \omega_{\lambda i} + \mathbf{C} \gamma_i = 0 \quad (i = 1, \dots, p), \\ dc_{\alpha} = \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} c_{\lambda} \omega_{\alpha \lambda} + \mathbf{C} \gamma_{\alpha} \quad (\alpha = p+1, \dots, n+1); \end{array} \right.$$

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} da_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} (a_{ik} \omega_{jk} + a_{jk} \omega_{ik}) \quad (i, j = 1, \dots, p), \\ 0 = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} \omega_{\alpha k} + \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} a_{\alpha \lambda} \omega_{i \lambda} + \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{C} - \mathbf{c}} c_{\alpha} \gamma_i \\ \quad (i = 1, \dots, p; \alpha = p+1, \dots, n+1), \\ da_{\alpha \beta} = \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} (a_{\alpha \lambda} \omega_{\beta \lambda} + a_{\beta \lambda} \omega_{\alpha \lambda}) + \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{C} - \mathbf{c}} (c_{\alpha} \gamma_{\beta} + c_{\beta} \gamma_{\alpha}) \\ \quad (\alpha, \beta = p+1, \dots, n+1). \end{array} \right.$$

Rappelons que les relations (54) sont des conséquences des relations (53), (55), (56) et que les relations (55) sont des conséquences des relations (53), (54), (56).

66. Prenons maintenant une variété à p dimensions lieu d'un point Λ et choisissons $\Lambda_1, \dots, \Lambda_p$ dans l'hyperplan tangent; $\Lambda_{p+1}, \dots, \Lambda_{n+1}$ seront dans l'hyperplan normal. On aura les équations

$$\omega_{p+1} = 0, \quad \dots, \quad \omega_{n+1} = 0$$

qui, d'après (53), se réduisent à $n - p$. Les équations quadratiques extérieures qui en dérivent sont

$$\sum_{k=1}^{k=p} [\omega_k \omega_{k\alpha}] = 0 \quad (\alpha = p+1, \dots, n+1);$$

elles expriment que $\omega_{i\alpha}$ est la demi-dérivée par rapport à ω_i d'une certaine forme quadratique. Posons, d'autre part,

$$d^2\Lambda + \mathbf{c} \, ds^2\Lambda = \Phi_{p+1}\Lambda_{p+1} + \dots + \Phi_{n+1}\Lambda_{n+1} + \dots,$$

les termes non écrits dépendant de $\Lambda_1, \dots, \Lambda_p$; on voit qu'on a

$$\Phi_{\alpha} = \sum_{k=1}^{k=p} \omega_k \omega_{k\alpha} + \mathbf{c} \, \xi_{\alpha} \Phi,$$

d'où

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial \omega_i} = \omega_{i\alpha} + \mathbf{c} \, \xi_{\alpha} \gamma_i.$$

Nous posons

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial \omega_i} = \pi_{i\alpha} = \omega_{i\alpha} + \mathbf{c} \, \xi_{\alpha} \gamma_i;$$

un calcul facile donne

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi'_{i\alpha} = \sum_{k=1}^{k=p} [\omega_{ik} \pi_{k\alpha}] + \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} [\pi_{i\lambda} \omega_{\lambda\alpha}] \\ (i=1, \dots, p; \alpha=p+1, \dots, n+1). \end{array} \right.$$

L'introduction de ces expressions $\pi_{i\alpha}$ simplifie les secondes relations (56) qui deviennent

$$(56') \quad 0 = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} \omega_{\alpha k} + \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} a_{\alpha\lambda} \pi_{i\lambda} \quad (i=1, \dots, p; \alpha=p+1, \dots, n+1).$$

La masse relative par rapport à Λ du point $d^2\Lambda + \mathbf{c} \, ds^2\Lambda$ est, d'après la valeur trouvée au n° 62, égale à $(\mathbf{c} - \mathbf{C})\Phi$; on a donc l'identité

$$(58) \quad (\mathbf{c} - \mathbf{C})\Phi = c_{p+1}\Phi_{p+1} + \dots + c_{n+1}\Phi_{n+1};$$

cette identité résulte du reste des premières identités (54) multipliées par ω_i et sommées par rapport à i .

67. On peut interpréter géométriquement les formes quadratiques Φ_{α} . Considérons une courbe tracée sur la variété; on a

$$\frac{d^2\Lambda}{ds^2} = -\mathbf{C}\Lambda + \frac{1}{\rho}\mathbf{I},$$

en désignant par $\frac{1}{\rho}$ la courbure de la courbe et par $\mathbf{I}$ un point tel

que $I|I=1$ et situé dans l'hyperplan polaire de A par rapport à la quadrique absolue ; par suite,

$$d^2 A = c \, ds^2 \wedge = (c - C) \, ds^2 \wedge + \frac{ds^2}{\rho} = (c - C) \, ds^2 \left(\Lambda + \frac{1}{\rho} \frac{1}{c - C} \right).$$

Il résulte de là que les formes Φ_x sont les coordonnées du point, de masse relative $(c - C) \, ds^2$, obtenu en portant à partir de Λ , sur la projection normale de la normale principale à la courbe, une longueur réduite égale à la courbure normale multipliée par $\frac{1}{c - C}$.

On peut également interpréter le nombre des formes Φ_x linéairement indépendantes. Supposons, ce qui est permis, que les formes

$$\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_{p+r}$$

soient linéairement indépendantes, les formes $\Phi_{p+r+1}, \dots, \Phi_{n+1}$ étant identiquement nulles. Cherchons la caractéristique de l'hyperplan normal quand le point A se déplace d'une manière quelconque sur la variété. Le point

$$x_{p+1} \Lambda_{p+1} + \dots + x_{n+1} \Lambda_{n+1}$$

appartiendra à cette caractéristique si l'on a identiquement, quel que soit $k = 1, \dots, p$,

$$\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} x_{\lambda} \omega_{\lambda k} = 0;$$

multiplions toutes ces équations par α_{ik} et sommons par rapport à k ; nous aurons, en tenant compte de (56'),

$$\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} \sum_{\mu=p+1}^{\mu=n+1} \alpha_{\lambda\mu} x_{\lambda} \omega_{i\mu} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Désignons par $u_{p+1}, \dots, u_{n+1}$ les coordonnées tangentielles de l'hyperplan polaire du point $(x_{p+1}, \dots, x_{n+1})$ par rapport à l'hypersphère de centre Λ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{c - C}}$; les équations précédentes se réduiront à

$$\sum_{\mu=p+1}^{\mu=n+1} u_{\mu} \omega_{i\mu} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

et elles expriment que la forme quadratique $\Sigma u_{\mu} \Phi_{\mu}$ est identiquement nulle : par suite, elles se réduisent à

$$u_{p+1} = 0, \quad \dots, \quad u_{p+r} = 0.$$

Il résulte de là que la variété plane caractéristique de l'hyperplan normal est la variété plane polaire de $[\Lambda_{p+1} \dots \Lambda_{p+r}]$ par rapport à l'hypersphère de centre Λ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{\mathbf{c} - \mathbf{C}}}$.

En particulier, cette caractéristique est à $n - p - r$ dimensions.

On a naturellement $n + 1 \geq p + r$. Si $n + 1 = p + r$, le nombre $n - p - r$ est égal à 1 et l'hyperplan normal n'a pas d'enveloppe ; si $n \geq p + r$, il a une enveloppe.

68. Supposons maintenant que le point Λ , au lieu de se déplacer d'une manière quelconque sur la variété, se déplace tangentielllement à une variété plane tangente à $p - 1$ dimensions. $\omega_1 = 0$ par exemple. Cherchons dans quel cas l'hyperplan normal peut avoir en commun avec l'hyperplan normal infiniment voisin un point qui n'appartienne pas à la caractéristique qui vient d'être déterminée. Si l'on considère l'hyperplan polaire $(u_{p+1}, \dots, u_{n+1})$ de ce point par rapport à l'hypersphère (Σ) , l'une au moins de ses coordonnées $u_{p+1}, \dots, u_{p+r}$ ne sera pas nulle et la forme quadratique $\Sigma u_{\mu} \Phi_{\mu}$ aura ses dérivées partielles nulles quand on y fera $\omega_1 = 0$; par suite, cette forme quadratique sera, à un facteur constant près, égale à ω_1^2 , c'est-à-dire un carré parfait. La variété $\omega_1 = 0$ sera dite alors une variété plane *tangente principale* et l'on pourra donner le nom de *centre de courbure principal* correspondant à l'un des points que l'hyperplan normal a en commun avec l'hyperplan normal infiniment voisin quand le point Λ se déplace le long de la variété plane tangente principale.

On choisira par exemple le point situé dans la variété plane

$$[\Lambda_{p+1} \dots \Lambda_{p+r}] :$$

ce point est bien déterminé si l'hypersphère (Σ) est de rayon purement imaginaire ($\mathbf{c} < \mathbf{C}$) parce qu'alors deux variétés planes polaires réelles n'ont aucun point réel commun.

69. Les variétés réelles de courbure $\mathbf{c} < \mathbf{C}$ dont le réseau

asymptotico-isotrope est d'ordre minimum. — Prenons maintenant une variété à p dimensions de courbure constante $\mathbf{c}$ inférieure à la courbure $\mathbf{C}$ de l'espace. La forme quadratique Π par rapport à laquelle les formes Φ_α sont extérieurement conjuguées est définie positive; d'autre part, la forme $\Phi = ds^2$, qui en est une combinaison linéaire, ne peut s'exprimer en fonction de moins de p variables. Il résulte alors du théorème général du n° 20 que parmi les $n+1-p$ formes Φ_α il y en a au moins p linéairement indépendantes et, s'il y en a exactement p , on peut les supposer carrés parfaits.

Par conséquent, *si une variété réelle à p dimensions a une courbure constante $\mathbf{c}$ inférieure à la courbure $\mathbf{C}$ de l'espace, le nombre n des dimensions de cet espace est au moins égal à $2p-1$. Si $n \leq 2p$, la caractéristique de son hyperplan normal est au plus à $n-2p$ dimensions et, si elle est exactement à $n-2p$ dimensions, la variété admet en chaque point p variétés planes tangentes principales n'ayant d'autre point commun que le point Λ .*

Supposons que la caractéristique de l'hyperplan normal ait exactement $n-2p$ dimensions. On pourra alors supposer

$$\Phi_{p+1} = \omega_1^2, \quad \dots, \quad \Phi_{2p} = \omega_p^2, \quad \Phi_{2p+1} = 0, \quad \dots, \quad \Phi_{n+1} = 0.$$

Le centre de courbure principal correspondant à la variété plane tangente principale $\omega_1 = 0$ est l'intersection de l'hyperplan $[\Lambda_{p+1} \dots \Lambda_{2p}]$ et de la variété plane polaire de $[\Lambda_{p+2} \dots \Lambda_{2p}]$, puisqu'on a pour ce point

$$u_{p+2} = 0, \quad \dots, \quad u_{2p} = 0.$$

Or si l'on exprime que les formes Φ_α sont extérieurement conjuguées par rapport à la forme Π , on trouve que les coefficients $a_{2\beta}$ de cette forme satisfont aux relations

$$a_{p+i, p+j} = 0 \quad (i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, p);$$

par suite, le centre de courbure principal cherché est le point Λ_{p+1} qui est en effet conjugué par rapport à chacun des points $\Lambda_{p+2}, \dots, \Lambda_{2p}$.

Il résulte de là que *les p centres de courbure principaux correspondant aux p variétés planes tangentes principales*

sont conjugués deux à deux par rapport à l'hypersphère (Σ) de centre A et de rayon réduit $\frac{1}{\sqrt{c-C}}$.

Réciproquement, supposons que la caractéristique de l'hyperplan normal d'une variété donnée à p dimensions soit à $n - 2p$ dimensions, que la variété admette p variétés planes tangentes principales et que les p centres de courbure correspondants soient conjugués par rapport à l'hypersphère (Σ) de centre A et de rayon réduit $\frac{1}{\sqrt{c-C}}$.

On sait que si p points réels distincts sont conjugués par rapport à une quadrique sans points réels, ils ne sont pas dans une même variété plane à $p - 1$ dimensions. On peut donc prendre les p centres de courbure principaux pour sommets $\Lambda_{p+1}, \dots, \Lambda_{2p}$. Or Λ_{p+1} est l'intersection de l'hyperplan $[\Lambda_{p+1} \dots \Lambda_{2p}]$ et de la variété plane polaire de $[\Lambda_{p+2} \dots \Lambda_{2p}]$; donc la forme quadratique carré parfait qui correspond au centre de courbure principal Λ_{p+1} est la forme Φ_{p+1} ; donc les p formes linéairement indépendantes $\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_{2p}$ sont des carrés parfaits de formes linéaires nécessairement indépendantes :

$$\Phi_{p+i} = \omega_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

On voit immédiatement que les points $\Lambda_{p+1}, \dots, \Lambda_{2p}$ étant conjugués par rapport à (Σ) , on a, pour la forme Π ,

$$a_{p+i, p+j} = 0 \quad (i \neq j; \quad i, j = 1, \dots, p);$$

et que par suite les formes Φ_α sont extérieurement conjuguées par rapport à la forme Π . La variété est donc de courbure constante c .

On peut ajouter la remarque importante que si, pour une variété à p dimensions, la caractéristique de l'hyperplan normal est à $n - 2p$ dimensions et si la variété admet p variétés planes tangentes principales n'ayant d'autre point commun que A , ces variétés sont rectangulaires entre elles. Cela résulte de ce que la forme ds^2 est une combinaison linéaire des carrés de p formes linéaires qui, égales à zéro, définissent les p variétés planes tangentes principales.

70. Nous avons vu (n° 67) que les formes Φ_α sont les coordonnées

du point de masse relative $(\mathbf{c} - \mathbf{C}) ds^2$, obtenu en portant à partir de Λ une longueur réduite égale (en direction, grandeur et sens) à la courbure normale $\frac{1}{\rho_n}$ multipliée par $\frac{1}{\mathbf{c} - \mathbf{C}}$. Par conséquent $\frac{1}{\mathbf{c} - \mathbf{C}} \frac{1}{\rho_n}$ est la distance réduite au point Λ du point H de l'hyperplan normal dont les coordonnées sont $\frac{\Phi_x}{(\mathbf{c} - \mathbf{C}) ds^2}$. Dans les variétés étudiées dans le numéro précédent, on a

$$\Phi_{p+i} = \omega_i^2, \quad \frac{\Phi_{p+i}}{(\mathbf{c} - \mathbf{C}) ds^2} = \frac{\omega_i^2}{(\mathbf{c} - \mathbf{C}) ds^2};$$

ces coordonnées sont donc proportionnelles aux carrés des cosinus directeurs de la tangente par rapport aux p tangentes principales; les coefficients de proportionnalité sont faciles à obtenir, puisqu'on a [formule (58)]

$$1 = \frac{c_{p+1} \omega_1^2}{(\mathbf{c} - \mathbf{C}) ds^2} + \dots + \frac{c_{2p} \omega_p^2}{(\mathbf{c} - \mathbf{C}) ds^2};$$

les p termes du second membre sont évidemment les carrés des cosinus directeurs; ce sont les masses relatives des p points $\frac{\omega_i^2}{(\mathbf{c} - \mathbf{C}) ds^2} \Lambda_{p+i}$ dont le point H est le barycentre.

Par conséquent, la courbure normale d'une courbe quelconque tracée sur la variété s'obtient en multipliant par $\mathbf{c} - \mathbf{C}$ la distance réduite au point Λ du barycentre des p centres de courbure principaux, chacun d'eux étant affecté d'une masse relative égale au carré du cosinus directeur correspondant de la tangente à la courbe.

Dans le cas de l'espace euclidien, la masse relative devient la masse ordinaire.

71. Le système différentiel qui définit les variétés de courbure constante $\mathbf{c}$ dont le réseau asymptotico-isotrope appartient à un type projectif donné. — Considérons un réseau linéaire de cônes du second ordre appartenant à un type projectif donné; nous supposons naturellement que l'un au moins des cônes du réseau est sans points réels (autres que son sommet). Donnons-nous les cônes de base de ce réseau, c'est-à-dire les formes linéairement indépendantes $\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_{p+r}$, en simplifiant autant que possible

leurs coefficients soit par un choix convenable des variables, soit par un choix convenable des cônes de base. Les formes $\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_{p+r}$ pourront alors dépendre d'un certain nombre m de paramètres arbitraires $u_1, u_2, \dots, u_m$. Nous ferons usage d'un système de référence de la nature de ceux envisagés au n° 63, les coefficients $c_\alpha, a_{ij}, a_{\alpha\beta}$ des formes $\mathbf{K}$ et $\mathbf{H}$ qui le caractérisent étant uniquement assujettis :

1° A la condition qu'on ait l'identité

$$(\mathbf{c} - \mathbf{C}) \sum_{i,j}^{1, \dots, p} a_{ij} \omega_i \omega_j = \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+r} c_\lambda \Phi_\lambda;$$

2° A la condition que les formes $\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_{p+r}, \Phi_{p+r+1} = 0, \dots, \Phi_{n+1} = 0$ soient extérieurement conjuguées par rapport à la forme

$$\sum_{\alpha, \beta}^{p+1, \dots, n+1} \alpha_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta.$$

Cela posé, les équations de Pfaff qui définissent les variétés cherchées sont

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{p+1} = 0, \quad \dots, \quad \omega_{n+1} = 0, \\ \varpi_{i\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_i} \quad (i = 1, \dots, p; \alpha = p+1, \dots, n+1). \end{array} \right.$$

Les équations quadratiques extérieures dérivées, si l'on pose

$$\Phi_\alpha = \sum_{i,j}^{1, \dots, p} u_{ij\alpha} \omega_i \omega_j \quad (\alpha = p+1, \dots, n+1),$$

sont

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_{i\alpha} \equiv \sum_{j=1}^{j=p} \left[\omega_j \left(du_{ij\alpha} - \sum_{k=1}^{k=p} (u_{ik\alpha} \omega_{jk} + u_{jk\alpha} \omega_{ik}) + \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} u_{ij\lambda} \omega_{j\lambda} \right) \right] = 0 \\ (i = 1, \dots, p; \alpha = p+1, \dots, n+1). \end{array} \right.$$

Les expressions de Pfaff principales sont ici $\omega_1, \dots, \omega_p$; les expressions de Pfaff secondaires sont

$$\gamma_{ij\alpha} = \gamma_{ji\alpha} = du_{ij\alpha} - \sum_{k=1}^{k=p} (u_{ik\alpha} \omega_{jk} + u_{jk\alpha} \omega_{ik}) + \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} u_{ij\lambda} \omega_{j\lambda};$$

ce sont des combinaisons linéaires de $du_1, \dots, du_m$ et des expressions

$$\omega_{ij}, \quad \omega_{\alpha\beta} \\ (i, j = 1, \dots, p; \quad \alpha = p+1, \dots, p+r; \quad \beta = p+1, \dots, n+1).$$

Pour savoir quelles relations identiques existent entre ces expressions $du_i, \omega_{ij}, \omega_{\alpha\beta}$, revenons aux identités (53), (54), (55) entre lesquelles nous devons éliminer les différentielles des paramètres (autres que $u_1, \dots, u_m$) qui entrent dans les expressions des $c_\alpha, a_{ij}, a_{\alpha\beta}$. Or, les premières identités (55) sont déjà vérifiées d'elles-mêmes d'après la condition 1^{re} énoncée tout à l'heure. Les secondes relations (56) s'écrivent [formules (56')]

$$(56') \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} \omega_{\alpha k} + \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=p+r} a_{\alpha\lambda} \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial u_i} = 0 \\ & \quad (i = 1, \dots, p; \quad \alpha = p+1, \dots, n+1). \end{aligned} \right.$$

Il faudra ajouter à ces identités :

1^o Celles qu'on obtient en différentiant les relations

$$(\mathbf{c} - \mathbf{C}) a_{ij} = \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n+1} c_\lambda u_{ij\lambda} \quad (i, j = 1, \dots, p)$$

et tenant compte des valeurs des différentielles da_{ij}, dc_λ , données par les formules (55) et (56) ;

2^o Celles qu'on obtient d'une manière analogue en différentiant les relations linéaires entre les $a_{\alpha\beta}$ qui expriment que les formes Φ_α sont extérieurement conjuguées par rapport à la forme $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$.

Ces dernières identités dépendent essentiellement du type projectif donné pour le réseau asymptotico-isotrope. Calculons donc celles qui correspondent aux conditions 1^o. Elles donnent, comme on le vérifie sans peine,

$$(61) \quad \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n+1} c_\alpha \gamma_{ij\alpha} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, p),$$

où les $\gamma_{ij\alpha}$ sont les expressions de Pfaff secondaires.

Remarquons du reste que les identités (56') ne fournissent

aucune relation entre les expressions secondaires. Comme celles qui résultent des conditions 2^o ne font manifestement pas intervenir les expressions $\omega_{\alpha i}$, on peut donc, tant qu'il ne s'agit que de décider si le système (59) est en involution et, dans l'affirmative, quel est le degré de généralité de ses solutions, faire abstraction de ces identités (56').

72. Appliquons ce qui précède aux variétés considérées aux n^{os} 69 et 70, autrement dit aux variétés dont le réseau asymptotico-isotrope appartient au type projectif

$$\lambda_1 \omega_1^2 + \dots + \lambda_p \omega_p^2 = 0.$$

Les équations (59) se réduisent ici à

$$(59) \quad \begin{cases} \omega_{\alpha} = 0 & (\alpha = p+1, \dots, n+1), \\ \varpi_{i,p+i} = \omega_i, & \varpi_{i,p+j} = 0, \quad \varpi_{i,2p+k} = 0 \\ & (i \neq j; i, j = 1, \dots, p; k = 1, \dots, n+1-2p). \end{cases}$$

Les équations quadratiques extérieures dérivées sont

$$(60) \quad \begin{cases} \Theta_{i,p+i} \equiv [\omega_i(\omega_{p+i,p+i} - 2\omega_{ii})] - \sum_{\substack{j=1, \dots, p \\ j \neq i}} [\omega_j \omega_{ji}] = 0, \\ \Theta_{i,p+j} \equiv [\omega_i \omega_{p+i,p+j}] - [\omega_j \omega_{ij}] = 0, \\ \Theta_{i,2p+k} \equiv [\omega_i \omega_{p+i,2p+k}] = 0. \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \chi_{i,i,p+i} &= \omega_{p+i,p+i} - 2\omega_{ii}, & \chi_{i,i,p+k} &= \omega_{p+i,p+k}, \\ \chi_{i,j,p+i} &= -\omega_{ji}, & \chi_{i,j,p+k} &= 0 \\ (i \neq j; i, j &= 1, \dots, p; k = 1, \dots, n+1-p). \end{aligned}$$

Les identités (61) sont ici

$$(61) \quad \begin{cases} c_{p+i}(\omega_{p+i,p+i} - 2\omega_{ii}) + \sum_{\substack{k=1, \dots, n+1-p \\ k \neq i}} c_{p+k} \omega_{p+i,p+k} = 0, \\ c_{p+i} \omega_{ji} + c_{p+j} \omega_{ij} = 0, \end{cases}$$

Quant aux identités résultant des conditions 2^o, elles s'obtiennent en exprimant que les coefficients $a_{p+i,p+j}$ sont nuls,

ce qui donne

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_{p+i, p+i} \omega_{p+j, p+i} + a_{p+j, p+j} \omega_{p+i, p+j} \\ & + \sum_{k=1}^{k=n+1-2p} (a_{p+i, 2p+k} \omega_{p+j, 2p+k} + a_{p+j, 2p+k} \omega_{p+i, 2p+k}) = 0 \end{aligned} \right.$$

($i \neq j; i, j = 1, \dots, p$).

Cela posé, les relations (61) montrent qu'on peut, pour chaque valeur de i , faire abstraction de l'une des $n+1-p$ équations

$$\Theta_{i, p+i} = 0, \quad \dots, \quad \Theta_{i, n+1} = 0;$$

nous choisirons l'équation $\Theta_{i, p+i} = 0$. Les seules expressions secondaires qui restent sont

$$\omega_{ij}, \quad \omega_{p+i, \lambda} \quad (i \neq j; i, j = 1, \dots, p; \lambda = 1, \dots, n+1-p)$$

Posons

$$\gamma_{p+i, p+j} = a_{p+j, p+j} \omega_{p+i, p+j} + \sum_{k=1}^{k=n+1-2p} a_{p+j, 2p+k} \omega_{p+i, 2p+k}.$$

On peut mettre celles des équations (60) qui subsistent sous la forme

$$(60') \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\Theta}_{i, p+j} &= [\omega_i \gamma_{p+i, p+j}] - a_{p+j, p+j} [\omega_j \omega_{ij}] = 0, \\ \bar{\Theta}_{i, 2p+k} &= [\omega_i \omega_{p+i, 2p+k}] = 0, \end{aligned} \right.$$

avec les identités

$$(61') \quad c_{p+i} \omega_{ji} + c_{p+j} \omega_{ij} = 0,$$

$$(62') \quad \gamma_{p+i, p+j} + \gamma_{p+j, p+i} = 0,$$

L'expression $\omega_{p+i, 2p+k}$ n'entre que dans l'équation $\Theta_{i, 2p+k} = 0$ qui est involutive avec $\tau_1 = 1, \tau_2 = \dots = \tau_p = 0$. Les expressions $\omega_{ij}, \omega_{ji}, \gamma_{p+i, p+j}, \gamma_{p+j, p+i}$ n'entrent que dans les deux équations $\bar{\Theta}_{i, p+j} = 0, \bar{\Theta}_{j, p+i} = 0$, et ces quatre expressions sont liées par deux relations (61'), (62'); il en résulte facilement que les deux équations sont involutives avec $\tau_1 = 2, \tau_2 = \dots = \tau_p = 0$. Par suite le système (59) est en involution avec

$$s_1 = p(n+1-2p) + p(p-1) = p(n-p), \quad s_2 = \dots = s_p = 0.$$

Les variétés cherchées dépendent de $p(n-p)$ fonctions

arbitraires d'un argument. Si $n = 2p - 1$, ce nombre est égal à $p(p-1)$. Donc dans l'espace à $2p-1$ dimensions de courbure constante $\mathbf{C}$, les variétés à p dimensions de courbure constante $\mathbf{c} < \mathbf{C}$ dépendent de $p(p-1)$ fonctions arbitraires d'un argument.

Les caractéristiques sont les variétés à $p-1$ dimensions obtenues en exprimant que les s_1 équations

$$\begin{aligned}\omega_i' /_{p+i,p+j} - a_{p+j,p+j} \omega_j \omega_{ij} &= 0, \\ \omega_i \omega_{p+i,2p+k} &= 0\end{aligned}$$

aux inconnues $/_{p+i,p+j}$, ω_{ij} , $\omega_{p+i,2p+k}$ se réduisent à un moindre nombre. On trouve ainsi s_1 familles de caractéristiques, à savoir les p familles $(n+1-2p)$ -uples

$$\omega_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

et les $p(p-1)$ familles simples

$$\frac{a_{p+i,p+i}}{c_{p+i}} \omega_i^2 = \frac{a_{p+j,p+j}}{c_{p+j}} \omega_j^2 \quad (i \neq j; i, j = 1, \dots, p).$$

Ces dernières sont réelles, puisque les coefficients $a_{p+i,p+i} = c_{p+i}$ sont manifestement positifs. Les premières n'existent pas si $n = 2p - 1$; ce sont les variétés principales à $n-1$ dimensions. Quant aux autres, elles sont liées aux courbes de courbure normale minimum; en effet, si l'on pose $\omega_i = x_i ds$, la courbure normale est, à un facteur constant près, la distance réduite au point A du point de coordonnées

$$\frac{1}{\mathbf{c} - \mathbf{C}} \frac{\Phi_{p+i}}{ds^2} = \frac{x_i^2}{\mathbf{c} - \mathbf{C}}.$$

Or, si l est cette distance réduite, on a

$$l^2 - \frac{1}{\mathbf{c} - \mathbf{C}} = \sum_{i=1}^{i=p} a_{p+i,p+i} \frac{x_i^2}{(\mathbf{c} - \mathbf{C})^2}$$

avec

$$\mathbf{c} - \mathbf{C} = c_{p+1} x_1^2 + \dots + c_{2p} x_p^2;$$

le minimum de l est donné par les équations

$$\frac{a_{p+1,p+1}}{c_{p+1}} x_1^2 = \frac{a_{p+2,p+2}}{c_{p+2}} x_2^2 = \dots = \frac{a_{2p}}{c_{2p}} x_p^2.$$

Supposons par exemple $p = 3$, $n = 5$; les centres de courbure A_4, A_5, A_6 forment dans le plan normal un triangle conjugué par rapport à la circonférence de centre A et de rayon réduit $\frac{1}{\sqrt{c - C}}$.

Si l'on représente une courbe par le point H barycentre des trois sommets A_4, A_5, A_6 affectés de masses relatives égales aux carrés des cosinus directeurs de la tangente à la courbe, *les surfaces caractéristiques sont représentées par les hauteurs du triangle $A_4 A_5 A_6$, hauteurs qui passent par A*; le point A lui-même représente quatre lignes asymptotiques dont les tangentes sont symétriques deux à deux par rapport aux trois tangentes principales. Les six familles de surfaces caractéristiques se partagent en trois couples de deux, deux surfaces du même couple se coupant suivant une ligne de courbure, deux surfaces de couples différents suivant une ligne asymptotique.

73. En général, si n est quelconque, le point A n'appartient pas à l'hyperplan $[A_{p+1} \dots A_{2p}]$ qui contient les p centres de courbure principaux, ce qui revient à dire qu'il n'y a pas en général de lignes asymptotiques, puisque la courbure normale ne peut être nulle que si le barycentre des points $A_{p+1}, \dots, A_{2p}$ affectés de masses convenables est en A. Cherchons toutes les variétés pour lesquelles le point A est dans l'hyperplan $[A_{p+1} \dots A_{2p}]$. Il faut et il suffit pour cela qu'on ait

$$\xi_{2p+1} = \dots = \xi_{n+1} = 0.$$

Nous choisirons donc un système de référence qui, outre les conditions énoncées plus haut, satisfasse aux conditions précédentes. D'après les formules (53), ces conditions nouvelles introduisent entre les $\omega_{2\beta}$ les relations identiques nouvelles

$$(63) \quad \sum_{k=1}^{i-p} \xi_{p+i, 2p+k} \omega_{p+i, 2p+k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n+1-2p).$$

Comme, d'après (60), $\omega_{p+i, 2p+k}$ ne dépend que de ω_i et qu'aucune des coordonnées ξ_{p+i} n'est nulle, il en résulte qu'il faut ajouter aux équations (59) les équations

$$\omega_{p+i, 2p+k} = 0.$$

Par conséquent, la variété plane $[\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{2p}]$ est fixe et les variétés cherchées n'existent en somme que dans l'espace à $2p - 1$ dimensions; elles dépendent de $p(p - 1)$ fonctions arbitraires d'un argument.

74. Le système différentiel qui définit dans l'espace de courbure constante $\mathbf{C}$ à n dimensions les variétés à p dimensions de courbure constante c dont le réseau asymptotico-isotrope est d'ordre maximum. — Prenons maintenant le cas extrême où le réseau asymptotico-isotrope est d'ordre maximum $\frac{p(p-1)}{2}$, avec naturellement |

$$n + 1 \geq \frac{p(p+3)}{2}.$$

Le système de Pfaff qui définit les variétés cherchées peut être supposé formé des équations

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{p+1} = 0, \quad \dots, \quad \omega_n = 0; \\ \overline{\omega}_{i(i)} = \omega_i, \quad \overline{\omega}_{j(i)} = 0; \\ \overline{\omega}_{i(ij)} = \omega_j, \quad \overline{\omega}_{j(ij)} = \omega_i, \quad \overline{\omega}_{k(ij)} = 0; \\ \overline{\omega}_{ij} = 0, \end{array} \right.$$

où l'on a employé des notations analogues à celles des n^{os} 55 et suivants. Les équations quadratiques extérieures dérivées sont identiques aux équations (43). Les expressions secondaires $\overline{\omega}_{(ij)\alpha}$ sont liées :

1^o Par les relations

$$(65) \quad \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n+1} c_{\alpha} \overline{\omega}_{ij\alpha} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, p);$$

2^o Par les relations déjà établies (45). Si l'on pose, comme au n^o 56,

$$\chi_{ij\alpha} = \sum_{\beta=p+1}^{\beta=n+1} \alpha_{\alpha\beta} \omega_{ij\beta}.$$

Les relations qui lient les expressions secondaires $\chi_{ij\alpha}$ deviennent :

1° Les relations

$$(65') \quad B_{ij} = \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n+1} \xi_{\alpha} \gamma_{ij\alpha} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, p);$$

2° Les relations déjà établies

$$(45'') \quad \Lambda_{ijkl} = \gamma_{ijl,kl} + \gamma_{kl,i(j)} - \gamma_{ik,j(l)} - \gamma_{(j,l),ik} = 0.$$

Les équations quadratiques extérieures à considérer sont

$$(43') \quad \bar{\Theta}_{i\alpha} = \sum_{k=1}^{k=p} [\omega_k \gamma_{(ik)\alpha}] = 0.$$

Cela posé, remarquons d'abord que si toutes les coordonnées ξ_i sont nulles, on peut toujours effectuer une substitution linéaire sur $\omega_1, \dots, \omega_p$ de manière à ne pas avoir

$$\xi_{pp} = 0;$$

en effet, si l'on pose

$$\bar{\omega}_i = l_{i1}\omega_1 + \dots + l_{ip}\omega_p \quad (i = 1, \dots, p),$$

on aura

$$\sum \bar{\omega}_i \bar{\omega}_j \bar{\Lambda}_{ij} = \sum \omega_i \omega_j \Lambda_{ij},$$

d'où

$$\Lambda_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{h=1}^{h=p} l_{ik} l_{jh} \bar{\Lambda}_{kh};$$

par suite,

$$\sum \xi_{ij} l_{ik} l_{jh} \bar{\Lambda}_{kh} = \sum \xi_{kh} \bar{\Lambda}_{kh},$$

d'où

$$\bar{\xi}_{kh} = \sum_{i,j} \xi_{ij} l_{ik} l_{jh}.$$

La nouvelle coordonnée $\bar{\xi}_{(pp)}$ ne pourrait être nulle quels que soient les coefficients de la substitution que si toutes les coordonnées ξ_{ij} étaient nulles, ce qui est impossible, le point A ne pouvant avoir toutes ses coordonnées nulles.

Ce point étant admis, nous définirons comme au n° 57 le poids des expressions secondaires $\xi_{ij\alpha}$ et le poids des expressions Λ_{ijkl} ; quant au premier membre B_{ij} de l'équation (65'), son poids sera

par définition le plus petit des deux indices i et j . Il existe alors entre les expressions secondaires de poids 1 les p relations

$$B_{1i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

qui sont manifestement indépendantes. Quant aux relations

$$B_{2i} = 0 \quad (i = 2, \dots, p),$$

elles introduisent entre les expressions secondaires de poids 1 et 2 des relations nouvelles en nombre $p - 1$, indépendantes des relations $A_{ij|kl} = 0$ de poids 2, car ces dernières ne contenaient pas les expressions $\omega_{(2i)(pp)}$, tandis que les relations $B_{2i} = 0$ sont résolubles par rapport à ces expressions. On peut continuer ainsi de proche en proche. Des valeurs trouvées au n° 57 pour $s_1, s_2, \dots, s_p$ on déduit les nouvelles valeurs relatives au nouveau système de Pfaff en changeant n en $n + 1$ et en retranchant $p - i + 1$ de s_i ; on constate alors tout de suite que *les valeurs des s_i ne sont pas changées*.

Quant au nombre des paramètres rentrant dans la solution générale du nouveau système (43'), un raisonnement identique à celui qui est fait plus haut montre qu'il n'est pas altéré non plus. Par suite, *le système de Pfaff (64) est en involution et les variétés cherchées dépendent de $n - \frac{p(p+1)}{2}$ fonctions arbitraires de p arguments*.

75. *Les variétés réelles à p dimensions de courbure constante $c > C$ et pour lesquelles la caractéristique de l'hyperplan normal est à $n - p - 1$ dimensions.* — Si la courbure c est supérieure à C , le théorème du n° 69 tombe en défaut et le réseau asymptotico-isotrope peut être d'un ordre quelconque. Étudions le cas extrême où il est d'ordre 1, c'est-à-dire où l'hyperplan normal admet une variété plane caractéristique à $n - p - 1$ dimensions. On aura ici

$$\Phi_{p+1} = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots + \omega_p^2, \quad \Phi_{p+2} = 0, \quad \dots, \quad \Phi_{n+1} = 0.$$

Les variétés seront définies par le système de Pfaff :

$$(65) \quad \begin{cases} \omega_{p+1} = 0, & \dots, & \omega_{n+1} = 0, \\ \overline{\omega}_{i,p+1} = \omega_i & (i = 1, 2, \dots, p), \\ \overline{\omega}_{i,p+k} = 0 & (i = 1, 2, \dots, p; k = 1, \dots, n + 1 - p). \end{cases}$$

Le système quadratique extérieur dérivé est

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_{i,p+1} \equiv [\omega_i(\omega_{p+1,p+1} - 2\omega_{ii})] - \sum_{\substack{j=1,\dots,p \\ i \neq j}} [\omega_j(\omega_{ij} + \omega_{ji})] = 0, \\ \theta_{i,p+k} \equiv [\omega_i \omega_{p+1,p+k}] = 0. \end{array} \right.$$

Les identités (61) deviennent ici

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{p+1}(\omega_{p+1,p+1} - 2\omega_{ii}) + \sum_{k=1}^{k=n+1-p} c_{p+k} \omega_{p+1,p+k} = 0, \\ c_{p+1}(\omega_{ij} + \omega_{ji}) = 0 \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, p). \end{array} \right.$$

Quant aux autres identités, elles résultent des relations qui expriment que les formes Φ_α sont extérieurement conjuguées par rapport à la forme $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$; ces relations se réduisent à

$$a_{p+1,p+1} = 0,$$

qui donne lieu à l'identité

$$(68) \quad \sum_{k=1}^{k=n+1-p} a_{p+1,p+k} \omega_{p+1,p+k} = 0.$$

Les identités (67) montrent que l'on peut faire abstraction des équations $\theta_{i,p+1} = 0$; il ne reste alors comme expressions secondaires que les expressions $\omega_{p+1,p+k}$; mais ces expressions, d'après les équations $\theta_{i,p+k} = 0$, doivent manifestement être nulles. Si nous ajoutons aux équations (65) les équations

$$(69) \quad \omega_{p+1,p+k} = 0,$$

qui, d'après (68), se réduisent à $n - p$ indépendantes, on constate sans difficulté que le nouveau système de Pfaff obtenu est complètement intégrable.

On voit du reste, en se servant des identités (56'), que le point Λ_{p+1} est fixe, et comme il est sur l'hypersphère de centre Λ et de rayon réduit $\frac{1}{\sqrt{c-C}}$, il est à une distance constante du point Λ . D'autre part, l'hyperplan $[\Lambda \Lambda_1 \dots \Lambda_p \Lambda_{p+1}]$ est fixe; donc la variété cherchée est, dans un espace à $p+1$ dimensions de courbure C , une hypersphère de rayon réduit $\frac{1}{\sqrt{c-C}}$.

76. Les variétés, réelles ou imaginaires, de courbure $\mathbf{c}$ dans l'espace à $p + 1 \leq 4$ dimensions rentrent dans le cas précédent.

On peut, en effet, toujours ramener la forme $\Sigma a_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta$ à $2x_{p+1}x_{p+2}$. L'une au moins des deux formes Φ_{p+1} et Φ_{p+2} , dont le ds^2 est une combinaison linéaire, est réductible à une somme de $q \geq 2$ carrés indépendants, soit

$$\Phi_{p+1} = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots + \omega_q^2;$$

en exprimant alors que Φ_{p+1} et Φ_{p+2} sont extérieurement conjuguées par rapport à la forme $2x_{p+1}x_{p+2}$, on trouve que Φ_{p+2} est identiquement nulle si $q = p$, et qu'elle ne dépend que de $\omega_1, \dots, \omega_q$ si $q < p$; mais ce dernier cas est impossible, car le ds^2 ne pourrait être une combinaison linéaire de Φ_{p+1}, Φ_{p+2} . On est donc nécessairement ramené au cas du n° 73, où il y a une seule forme Φ indépendante.

77. *Les points de Beltrami. Les variétés dont tous les points sont des points de Beltrami.* — Nous avons vu au n° 62 que si une variété à p dimensions située dans un espace à n dimensions de courbure constante $\mathbf{C}$ est elle-même à courbure constante, les formes quadratiques $\Phi_{p+1}, \dots, \Phi_n$, calculées par rapport à un système de référence normal, jouissent de la propriété que l'on a en chaque point de la variété

$$\sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \omega_j} \right] = \lambda [\omega_i \omega_j] \quad (i, j = 1, 2, \dots, p),$$

où λ désigne un coefficient convenablement choisi. Nous dirons qu'un point d'une variété est un *point de Beltrami* si les formes quadratiques asymptotiques relatives à ce point satisfont à la condition précédente.

Il est facile de voir que *si tous les points d'une variété à $p \geq 3$ dimensions sont des points de Beltrami, la variété est à courbure constante*, c'est-à-dire que le coefficient λ est le même en tous les points de la variété.

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons la notion de *covariant trilinéaire*. Étant donnée une expression quadratique

extérieure de la forme

$$\Omega = \sum_{(ij)} a_{ij} [dx_i dx_j],$$

où les coefficients a_{ij} sont des fonctions des n variables $x_1, \dots, x_n$, on appelle « covariant trilinéaire de Ω » l'expression cubique extérieure

$$\Omega' = \sum_{(ij)} [da_{ij} dx_i dx_j],$$

où le produit extérieur de trois facteurs change de signe quand on échange deux des facteurs entre eux.

Si l'on effectue un changement de variables tel qu'on ait l'identité

$$\sum a_{ij} [dx_i dx_j] = \sum b_{ij} [dy_i dy_j],$$

on aura également l'identité

$$\sum [da_{ij} dx_i dx_j] = \sum [db_{ij} dy_i dy_j].$$

Si ω et π sont deux expressions de Pfaff quelconques, m un coefficient fonction de $x_1, \dots, x_n$, le covariant trilinéaire de l'expression $m [\omega \pi]$ est

$$[dm \omega \pi] + m [\omega' \pi] - m [\omega \pi'].$$

Cela posé, partons de la relation

$$\sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} [\omega_{i\alpha} \omega_{j\alpha}] = \lambda [\omega_i \omega_j]$$

et prenons les covariants trilinéaires des deux membres en utilisant les formules (39) et en se servant du fait que $\omega_{p+1}, \dots, \omega_n$ sont nulles. On aura

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} [\omega_{ik} \omega_{ka} \omega_{j\alpha}] - \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} \{ \omega_{i\alpha} \omega_{jk} \omega_{k\alpha} \} \\ & + \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=p+1}^{\beta=n} [\omega_{i\beta} \omega_{\beta\alpha} \omega_{j\alpha}] - \sum_{\alpha=p+1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=p+1}^{\beta=n} [\omega_{i\alpha} \omega_{j\beta} \omega_{\beta\alpha}] \\ & = [d\lambda, \omega_i \omega_j] + \lambda \sum_{k=1}^{k=p} [\omega_k \omega_{ki} \omega_j] - \lambda \sum_{k=1}^{k=p} [\omega_i \omega_k \omega_{kj}]. \end{aligned}$$

Remplaçons dans la première somme du premier membre $\sum_{\alpha} [\omega_{k\alpha} \omega_{j\alpha}]$ par $\lambda [\omega_k \omega_j]$, dans la seconde somme $\sum_{\alpha} [\omega_{i\alpha} \omega_{k\alpha}]$ par $\lambda [\omega_i \omega_k]$, et remarquons enfin que la troisième et la quatrième somme se détruisent en échangeant dans l'une d'elles les deux indices de sommation α et β ; nous en déduisons immédiatement

$$[d\lambda \omega_i \omega_j] = 0 \quad (i, j = 1, \dots, p).$$

Cette relation montre que $d\lambda$ est une combinaison linéaire de ω_i et de ω_j ; comme on suppose $p \geq 3$, cela n'est possible que si $d\lambda$ est identiquement nul. La variété est donc de courbure constante.

SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES;

PAR M. P. FATOU.

(TROISIÈME MÉMOIRE.)

CHAPITRE VI.

38. Considérons un domaine invariant par une substitution rationnelle et contenant à son intérieur un point double attractif z ; si ce domaine D ne contient pas tous les points du plan, il coïncide alors avec le domaine immédiat du point z , tel que nous l'avons défini dans les Chapitres précédents. Si D est simplement connexe (c'est-à-dire, comme on l'a vu précédemment, si les branches de la fonction $R_{-1}(z)$ restreinte au domaine D se permutent circulairement entre elles le long d'un chemin simple intérieur à D et infiniment voisin de sa frontière), on peut en effectuer la représentation conforme et biunivoque sur un cercle du plan de la variable t , ayant pour centre l'origine et l'unité pour rayon, de manière que le point double $z = z$ corresponde à $t = 0$, et que deux directions

de droites arbitraires issues de ces deux points homologues se correspondent également. L'étude approfondie de cette représentation conforme conduit à des propriétés remarquables de la frontière de D qui feront l'objet de ce Chapitre. Nous supposons, pour plus de commodité, que D ne renferme pas le point à l'infini à son intérieur. Soient $t = g(z)$ et $z = h(t)$ les fonctions, holomorphes respectivement dans D et dans $\Delta (|t| < 1)$, qui effectuent la représentation conforme de D sur Δ et réciproquement. A la substitution $z_1 = R(z)$, qui transforme D en lui-même, correspond la substitution $t_1 = \varphi(t)$ qui transforme Δ en lui-même. La fonction $\varphi(t) = g(z_1) = g\{R[h(t)]\}$ est holomorphe dans Δ , puisque $R(z)$ est holomorphe dans D ; on a, en outre, $\varphi(0) = 0$, puisque $R(z) = z$. A un point z_1 intérieur à D , l'équation $z_1 = R(z)$ fait correspondre ν points z intérieurs à D ($\nu > 1$); corrélativement, l'équation $t_1 = \varphi(t)$, le point t_1 étant donné et intérieur à Δ , admet ν points racines intérieurs à Δ ; ces ν points représentent les ν branches d'une même fonction $\varphi_{-1}(t_1)$ qui se permutent entre elles dans D ; elles se permutent circulairement le long d'une circonférence infiniment voisine de la frontière de Δ . Les points critiques de la fonction $\varphi_{-1}(t)$ dans Δ sont les homologues des points critiques de la fonction $R_{-1}(z)$ restreinte à D ; ils sont donc en nombre fini. Remarquons que $|t|$ et $|\varphi(t)|$ tendent en même temps vers l'unité, et enfin que le multiplicateur de la substitution $t_1 = \varphi(t)$ au point double $t = 0$ est égal au multiplicateur de la substitution $z_1 = R(z)$ au point double z .

Ces remarques faites, qui sont à peu près évidentes ou facilement vérifiables, nous allons démontrer une proposition plus cachée, à savoir que $\varphi(t)$ est rationnelle. Considérons une circonférence c de rayon $r < 1$, concentrique à Δ et contenant à son intérieur les points critiques de $\varphi_{-1}(t)$; les ν branches de cette fonction sont donc holomorphes en chaque point intérieur à la couronne

$$r < |t| < 1,$$

et d'ailleurs bornées dans cette couronne; donc, en tout point de la circonférence $C(|t| = 1)$, sauf au plus aux points d'un ensemble de mesure nulle, ces fonctions prennent une valeur déterminée suivant les chemins faisant des angles finis avec C ; il y a donc dans tout intervalle de C des points pour lesquels cette propriété

existe ⁽¹⁾; il y en a même pour lesquels les valeurs limites obtenues diffèrent de valeurs données à l'avance en nombre fini ⁽²⁾. Soit a un tel point sur C , et traçons dans la couronne Γ la coupure radiale ab qui la transforme en un domaine simplement connexe $\bar{\Gamma}$; les ν branches de $\varphi_{-1}(t)$ donnent comme images de $\bar{\Gamma}$ ν domaines distincts juxtaposés dans la couronne comprise entre la circonférence C et la courbe c_{-1} transformée de la circonférence c ; l'un de ces domaines aura une frontière constituée par un arc pq de C , un arc rs de c_{-1} et deux courbes rp et sq analytiques, sauf peut-être en p et q , mais aboutissant en ces deux points de manière que tous les points de cette frontière sont des points simples et *accessibles*. Appelons $\bar{\Gamma}_{-1}$ ce domaine: soit m un point de l'arc pq et λ un chemin continu, formé par exemple de segments de droites, aboutissant au point unique m en restant à l'intérieur de $\bar{\Gamma}_{-1}$; le point t décrivant λ , le point $t_1 = \varphi(t)$ décrit un chemin λ_1 intérieur à $\bar{\Gamma}$ et tendant vers la circonférence C ; si λ_1 avait au moins deux points limites distincts m_1 et m'_1 sur C , en décrivant des points m_1 et m'_1 comme centres, deux petites circonférences extérieures l'une à l'autre, on voit que λ_1 comprendrait une infinité d'arcs joignant un point de la première à un point de la seconde et tendant vers C ; ces arcs auraient pour limite tout un arc σ de C et tout rayon aboutissant en un point de σ couperait λ_1 en une infinité de points tendant vers C . Or, on peut toujours choisir un tel rayon ρ_1 de manière que la fonction $\varphi_{-1}(t_1)$, quand t_1 décrit ρ_1 , tende vers une valeur déterminée et même distincte d'une valeur donnée à l'avance: le point t décrira alors dans $\bar{\Gamma}_{-1}$ un chemin ρ aboutissant en un point unique n de C et distinct si l'on veut de m ; or ceci est impossible, car ρ_1 rencontre une infinité de fois λ_1 en des points infiniment voisins de C ; donc ρ rencontrerait λ en des points infiniment voisins de C , ce qui est incompatible avec le fait que λ et ρ intérieurs à Δ aboutissent respectivement en deux points m et n distincts. Il en résulte que $\varphi(t)$ prend une valeur unique et bien déterminée en tout

(1) P. FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (*Acta mathematica*, t. XXV, 1906, p. 371).

(2) *Ibid.*, p. 394. Voir également: F. et M. RIESZ, *Ueber die Randwerte einer Analytischen Funktion* (4^e congrès des mathématiciens scandinaves, Stockholm, 1916).

point m de l'arc pq distinct de p et q ; le même raisonnement s'applique d'ailleurs aux γ arcs analogues à pq ; quant aux extrémités de ces arcs, on peut toujours disposer de la coupure ab de manière à les remplacer par d'autres qui soient toutes distinctes des premières, en vertu de la remarque faite plus haut et extraite de notre Mémoire déjà cité. On voit donc que $\varphi(t)$ prend une suite continue de valeurs sur C , dont les points représentatifs appartiennent eux-mêmes à C . Le mode de démonstration précédent est dû à M. Carathéodory ⁽¹⁾.

Ce point étant acquis, le principe de *prolongement par symétrie* donne immédiatement le résultat annoncé. Au point t intérieur à Δ , faisons correspondre le point $t' = \frac{1}{\bar{\varphi}(t)}$, $\bar{t}$ étant l'imaginaire conjuguée de t ; ces deux points sont l'image l'un de l'autre par rapport au cercle, c'est-à-dire deux points homologues dans l'inversion de centre o et de puissance égale à 1. Considérons alors la fonction de t' définie par $\Phi(t') = \frac{1}{\bar{\varphi}(t)}$, $\bar{\varphi}(t)$ étant la quantité imaginaire conjuguée de $\varphi(t)$. La fonction $\Phi(t')$ ainsi définie à l'extérieur du cercle est une fonction analytique uniforme n'ayant comme singularités à distance finie ou à l'infini que des pôles qui sont les images des zéros de $\varphi(t)$. D'autre part, elle prend sur la circonférence unité une suite continue de valeurs qui sont les mêmes que celles de la fonction $\varphi(t)$ aux mêmes points. Il s'ensuit que cette fonction est le prolongement analytique de $\varphi(t)$ à l'extérieur du cercle; on sait, en effet, qu'une fonction continue dans un domaine et analytique en tout point de ce domaine, sauf peut-être sur une droite, est encore analytique aux points de cette droite (Painlevé).

Il résulte de cette analyse que la substitution $t_1 = \varphi(t)$ est une substitution rationnelle à cercle fondamental de première espèce. En effet, elle est rationnelle puisque $\varphi(t)$ n'a d'autres singularités que des pôles dans tout le plan; elle laisse, d'autre part, invariants l'intérieur, l'extérieur et la circonférence du cercle Δ . Enfin, elle admet un point invariant intérieur qui est l'origine et par

(1) CARATHÉODORY, *Untersuchungen über die Konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten* (Math. Annalen, t. LXXII, 1912, p. 197-141).

suite également un point invariant extérieur qui est le point à l'infini.

La démonstration précédente peut être rendue plus élémentaire dans le cas particulier qui est d'ailleurs le plus important au point de vue des applications qui suivent, où l'on suppose *a priori* que le domaine D est limité par un contour formé d'un nombre fini d'arcs réguliers de courbes analytiques. Dans ce cas, on sait démontrer d'une manière élémentaire que les points frontières se correspondent un à un dans la représentation conforme de D sur un cercle ⁽¹⁾. Si l'on fait décrire à t un chemin aboutissant en un point de C , $z = h(t)$ décrit un chemin aboutissant en un point déterminé de la frontière de D ; il en est de même pour $z_1 = R(z)$, puisque R est rationnelle; donc $t_1 = g(z_1)$ décrit aussi un chemin aboutissant en un point bien déterminé de la circonférence; $\varphi(t)$ est donc continue sur C et l'on achève la démonstration comme plus haut.

39. Nous allons maintenant considérer le cas où le domaine invariant D est le domaine immédiat d'un point double z de multiplicateur égal à $+1$. Dans ce cas, z appartient à la frontière de D qui n'a pas de point invariant intérieur (on suppose toujours D simplement connexe). On fera donc correspondre le centre du cercle Δ à un point quelconque intérieur à D . La démonstration précédente est toujours valable, et l'on a encore en posant $z = h(t)$ l'équation fonctionnelle

$$R[h(t)] = h[\varphi(t)],$$

la substitution $t_1 = \varphi(t)$ étant cette fois une substitution rationnelle qui admet le cercle fondamental Δ , mais sans point invariant intérieur. Le point z est un point accessible de D auquel aboutissent des chemins intérieurs à D et de plus invariants par la substitution $z_1 = R(z)$. Soit un chemin de cette espèce L qui contient les conséquents $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ d'un quelconque z de ses points, lesquels tendent vers z ; à ce chemin L va correspondre dans le plan des t un chemin l intérieur à Δ et aboutissant en un point déterminé θ de C , de sorte que l contenant t contient aussi

(1) PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 276-77.

$t_1 = \varphi(t), \dots, t_n = \varphi(t_{n-1}), \dots, t, t_1, \dots, t_n$ ayant pour limite θ . Il s'ensuit que θ est un point double de la substitution $t_1 = \varphi(t)$; de plus, c'est un point limite de conséquents de points intérieurs à Δ ; c'est donc le point double unique de multiplicateur inférieur ou égal à 1. (On peut disposer des constantes arbitraires de la représentation conforme de manière que $\theta = +1$.) Je dis que θ ne peut pas être un point double attractif; en effet, on peut aussi tracer dans D un chemin simple L' aboutissant en z et contenant les antécédents de tous ses points obtenus par la branche de fonction inverse $R_{-1}(z)$ égale à z pour $z = z$. Pour le voir nettement, reportons-nous à ce qui a été dit au Chapitre II, en nous plaçant d'abord dans l'hypothèse $R''(z) \neq 0$. Si l'on rejette le point double à l'infini par une transformation homographique, comme nous l'avons fait maintes fois, de manière à ramener la substitution à la forme

$$R(z) = z + \alpha + \frac{b}{z} + \dots \quad (\alpha, \text{ réel, } > 0),$$

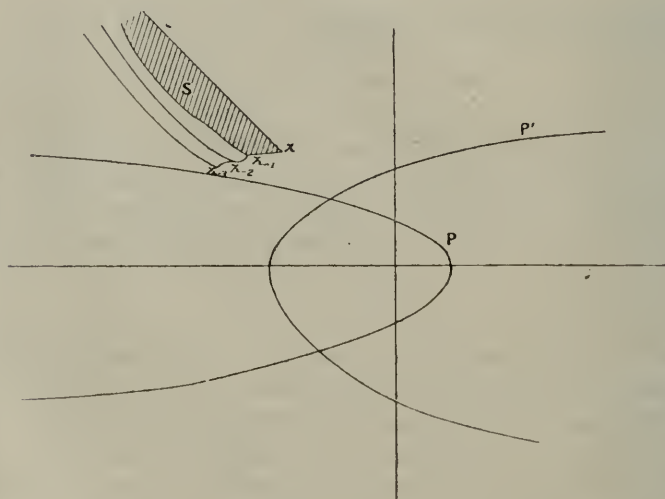
et la substitution inverse à la forme

$$R_{-1}(z) = z - \alpha - \frac{b}{z} - \dots,$$

on sait que les $R_n(z)$ et les $R_{-n}(z)$ convergent vers l'infini simultanément dans la région du plan extérieure à deux courbes de forme parabolique P et P' dont les directions asymptotiques sont celles de Ox et de Ox' . Prenons un point z dans la partie de cette région située au-dessus de l'axe réel, par exemple, avec un argument voisin de $\frac{3\pi}{4}$ pour fixer les idées; si $|z|$ est suffisamment grand, le point z_{-1} qui se déduit de z par une transformation asymptotiquement équivalente à la translation $-\alpha$ sera encore dans la même région et par conséquent dans le domaine immédiat du point à l'infini. Il en sera de même pour le segment de droite zz_{-1} , ainsi que pour la demi-droite allant de z à l'infini dans le prolongement de Oz ; la transformée de cette demi-droite sera la ligne $z_{-1}\infty$ qui ne coupe pas Oz , puisque l'argument de z_{-1} est plus grand que celui de z . Cette ligne sera d'ailleurs encore dans le domaine D et voisine d'une parallèle à $z\infty$. On limite ainsi un domaine $z_{-1}z\infty$ ou S qui appartient à D et dans lequel les $R_{-n}(z)$ convergent, nous le savons, uniformément vers zéro. Soit S_{-1} l'antécédent

immédiat de ce domaine; on voit de suite que S_{-1} et S qui sont contigus suivant la ligne $z_{-1} \infty$ ne se recouvrent pas; en prenant les antécédents successifs de ce domaine, on obtient des domaines contigus deux à deux qui forment par leur réunion un domaine simplement connexe limité d'une part par le rayon $z \infty$, d'autre part par la courbe $z z_{-1} z_{-2} \dots$, s'étendant à l'infini; tous les points de ce domaine appartiennent à D . Il est utile de remarquer qu'en prenant le point z au contraire dans le demi-plan inférieur, dans la position symétrique de celle de tout à l'heure, on obtiendra un domaine analogue n'ayant aucun point intérieur commun avec le premier, et pas d'autre point frontière commun que le point à l'infini. Les mêmes considérations s'appliquent aux conséquents d'un point z qu'on pourra prendre, par exemple, dans la même région avec un argument voisin de $\frac{\pi}{4}$ et à partir duquel on pourra tracer une ligne simple $z z_1 z_2 \dots z_n \dots$ aboutissant au point à

Fig. 1.



l'infini de manière que cette ligne et le rayon $z \infty$ limitent un domaine intérieur à D , sauf au point frontière à l'infini ⁽¹⁾. Le cas

(1) On doit supposer pour cela que les $B_n(z)$ ne prennent qu'une fois chaque valeur dans le domaine élémentaire de convergence qu'on a choisi: un tel choix est toujours possible.

de $R''(z) = 0$ se ramène au premier par la transformation conforme $(|z|z^p)$, comme au Chapitre II.

En ramenant le point z à distance finie, on a l'énoncé suivant qui va nous être très utile pour l'objet que nous avons en vue : Étant donné un point double z de multiplicateur égal à $+1$, d'une substitution rationnelle, on peut tracer deux lignes L et L' intérieures au domaine immédiat D de z , sans en leur extrémité commune z , telles que $L + L'$ limite un domaine simplement connexe E intérieur à D avec le seul point frontière commun z , L contenant, en outre, les conséquents d'un de ses arcs, et L' une infinité d'antécédents d'un de ses arcs terminés en z . De plus, on peut choisir ces courbes de deux manières différentes et de telle sorte que les deux domaines E et $E^{(1)}$ ainsi obtenus n'aient aucun point intérieur commun.

Ceci posé, revenons à la représentation conforme de D . Au chemin L va correspondre dans Δ un chemin aboutissant au point double θ , au chemin L' un chemin aboutissant au même point θ ; en effet, M. Montel a montré, dans son Mémoire déjà cité sur la représentation conforme, que : « Pour que deux chemins aboutissant à un même point accessible z fassent correspondre à z un même point de la circonférence, il faut et il suffit que le domaine limité extérieurement par ces courbes ne contienne que le point frontière z ⁽¹⁾. » C'est bien ce qui a lieu ici. Mais L' contenant une infinité de points $R_{-n}(z_0)$, la ligne correspondante dans Δ contiendra une infinité de points $\varphi_{-n}(t_0)$, t_0 étant un point de Δ ; θ étant limite d'antécédents d'un point de Δ ne peut donc pas être un point attractif.

Je dis que la substitution $t_n = \varphi(t)$ ne peut être non plus une substitution singulière de seconde espèce. S'il en était ainsi, on aurait $\varphi''(\theta) \neq 0$ et les conséquents $t_n = \varphi_n(t)$ convergeraient vers θ sur tout un arc $\theta\xi$ de la circonférence. Soient alors I et I' les lignes correspondant à L et L' et aboutissant en θ ; un élément de I , contenant les conséquents de tous ses points, sera tangent en θ à la circonférence dans le sens de θ vers ξ ; un élément de I' , contenant les antécédents de tous ses points [obtenus au moyen de

(1) Cette proposition est d'ailleurs implicitement contenue dans le Mémoire antérieur de M. Lindelöf (*Sur un principe général de l'analyse*, *Acta Societatis scientiarum Fennicæ*, Helsingfors, 1915).

la fonction $\varphi_{-1}(t)$ égale à θ pour $t = \theta$], sera également tangent à la circonférence, mais avec une direction de tangente opposée à $\theta\xi^{(1)}$. Le domaine E, limité par $L + L'$, aura donc pour image un domaine e tangent en θ à la circonférence. Mais on peut remplacer L, L', E par $L^{(1)}, L'^{(1)}, E^{(1)}$ jouissant des mêmes propriétés. E et $E^{(1)}$ n'ayant aucun point intérieur commun; l'image de $E^{(1)}$ sera alors le domaine $e^{(1)}$; les deux domaines simplement connexes e et $e^{(1)}$ limités par des courbes de Jordan formées d'arcs analytiques et tangentes à la circonférence au même point et *dans les deux sens* ont nécessairement des points intérieurs communs, par exemple sur le rayon. Or, ceci contredit l'hypothèse que E et $E^{(1)}$ n'en ont pas.

Il est clair que cette démonstration deviendrait parfaitement inutile si l'on supposait $h(t)$ continue; mais il nous a paru intéressant de la faire dans le cas général pour être complet, la représentation conforme d'une aire sur un cercle paraissant être l'un des moyens les plus puissants que l'on possède pour obtenir des propriétés des domaines étudiés dans ce Mémoire.

En résumé, si l'on fait la représentation conforme sur un cercle du domaine immédiat d'un point double de multiplicateur inférieur en module à l'unité ou égal à $+1$, ce domaine étant supposé simplement connexe, la fonction $h(t)$, inverse de celle qui effectue cette représentation, vérifie l'équation fonctionnelle

$$R[h(t)] = h[\varphi(t)],$$

$[z | R(z)]$ étant la substitution donnée dans le plan des z , et $\varphi(t)$ une fonction rationnelle telle que la substitution correspondante dans le plan t possède un cercle fondamental; cette substitution est toujours de première espèce; elle est singulière dans le cas du multiplicateur égal à $+1$.

40. Supposons maintenant que $h(t)$ soit méromorphe sur la circonférence C . Nous allons démontrer qu'elle est rationnelle. Plaçons-nous d'abord dans le cas où (φt) correspond à une substitution non singulière admettant le point invariant $t = 0$. Comme

(1) On a vu, en effet, au Chapitre II qu'au voisinage d'un point double de cette espèce, placé à l'origine, les conséquents d'un point ne peuvent tendre vers zéro qu'avec une valeur limite déterminée ω de l'argument, et les antécédents avec la valeur limite $\omega + \pi$ de l'argument.

nous l'avons déjà remarqué, $\frac{\varphi(t)}{t}$ n'ayant pas de pôles dans Δ et étant égale à 1 en module pour $|t| = 1$, et plus petite que 1 pour $t = 0$, on aura, pour $|t| \leq t < r$, l'inégalité

$$|\varphi(t)| \leq k|t| \quad (k < 1).$$

De même, à l'extérieur de Δ , l'inégalité $|t| \leq \varphi < 1$ entraîne

$$|\varphi(t)| \geq z|t| \quad (z > 1).$$

Ceci posé, $h(t)$ est par hypothèse méromorphe pour $|t| \leq \varphi$ ($\varphi > 1$). Je dis qu'il en sera de même pour $|t| \leq z\varphi$, z étant le nombre que nous venons de définir. Considérons la fonction

$$F(t) = R[h(t)],$$

qui est également méromorphe dans le cercle $\Gamma(|t| \leq \varphi)$. On a d'ailleurs, dans Δ (circonférence comprise),

$$F(t) = h[\varphi(t)].$$

Il s'ensuit que $F[\varphi_{-1}(t)]$, où $\varphi_{-1}(t)$ désigne l'une quelconque des 2 déterminations de la fonction inverse de $\varphi(t)$, est égale à $h(t)$ et par suite uniforme dans Δ et sur C .

Je considère dans le domaine $\Gamma_1(|t| \leq z\varphi)$ la fonction

$$H(t) = F[\varphi_{-1}(t)],$$

en choisissant une valeur bien déterminée mais quelconque de $\varphi_{-1}(t)$ en un point de C . Tant que t reste dans Γ_1 , $\varphi_{-1}(t)$ reste dans Γ , car si l'on avait $|\varphi_{-1}(t)| \geq \varphi$, on en déduirait $|t| \geq z\varphi$. On aura donc en chaque point une valeur bien définie pour $H(t)$ puisque $F(t)$ est bien définie et uniforme dans Γ ; $H(t)$ ne pourra avoir comme singularité dans Γ_1 que des pôles ou des points critiques algébriques, ces derniers ne pouvant être que ceux de $\varphi_{-1}(t)$. Mais si t partant d'un point t_0 de C et demeurant dans la couronne $(\Gamma_1 - \Delta)$ décrit un lacet tournant autour d'un point critique de $\varphi_{-1}(t)$ pour revenir à son point de départ, $\varphi_{-1}(t)$ reste dans la couronne $(\Gamma - \Delta)$ et part d'un point t_{-1} de C pour revenir à un autre point t_{+1} de C , en sorte que $H(t)$ part de la valeur $F(t_{-1})$ pour arriver à la valeur finale $F(t_{+1})$. Mais on a pour tout point t_0 de C

$$F(t_{+1}) = F(t_{-1}) = h(t_0).$$

Il s'ensuit que $H(t)$ revient à sa valeur initiale. D'ailleurs, $H(t) = h(t)$ dans Δ . $H(t)$ est donc uniforme et méromorphe dans Γ , et est le prolongement analytique de $h(t)$ dans ce domaine. On voit de proche en proche que $h(t)$ est méromorphe pour $|t| \leq x^n$, quel que soit l'entier n . Donc $h(t)$ est méromorphe dans tout le plan et y vérifie toujours l'équation fonctionnelle

$$R[h(t)] = h[\varphi(t)],$$

puisque les fonctions analytiques des deux membres sont bien définies et de plus égales entre elles dans Δ . Si $\varphi(t)$ admet un pôle à distance finie, $h(t)$ sera rationnelle, en vertu de cette équation fonctionnelle; en effet, à l'extérieur d'un cercle de rayon infiniment grand, une branche de la fonction $\varphi_{-1}(t)$ (ramifiée ou non à l'infini) fera correspondre un domaine infiniment petit entourant le pôle $t = \pi$, où la fonction $R[h[\varphi_{-1}(t)]]$ prendra des valeurs infiniment voisines de la valeur bien déterminée (finie ou infinie) $R[h(\pi)]$. Donc $h(t)$ n'aura pas de point singulier essentiel à l'infini. Pour que $\varphi(t)$ possède un pôle à distance finie, il suffit qu'elle ne soit pas de la forme

$$\varphi(t) = \Lambda t^q,$$

où Λ est une constante.

41. Nous devons maintenant examiner à part ce cas particulier. Mais auparavant nous remarquerons que la démonstration que nous venons de faire ne suppose nullement que la fonction $h(t)$ fait la représentation conforme de Δ sur une aire simple et simplement connexe, mais seulement que cette fonction est méromorphe dans un cercle de rayon plus grand que l'unité. Nous allons de même démontrer que l'équation fonctionnelle

$$h(\Lambda t^q) = R[h(t)]$$

ne peut être vérifiée par aucune fonction méromorphe ou entière non rationnelle. La démonstration supposera toutefois que $R(z)$ n'est pas du premier degré, ce qui n'était pas nécessaire tout à l'heure.

Nous écrirons notre équation sous la forme

$$h(\Lambda t^q) = R[h(t)] \quad (q > 0),$$

puisque $|A|$ doit être égal à 1, et qu'on peut orienter les axes de manière que son argument devienne nul. On peut supposer que l'origine n'est pas un pôle de $h(t)$, sinon on remplacera $h(t)$ par $\frac{1}{h(t)}$ qui vérifie une équation de même forme. Posons

$$h(0) = z.$$

On a $R(z) = z$, et un calcul immédiat montre que le développement de $R(z)$ autour de $z = z$ commence par un terme en $(z - z)^q$; z est donc un point double de multiplicateur nul de la substitution correspondante. Si l'on pose $z = h(t)$, on a

$$R_n(z) = h(t^{q^n})$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = z \quad \text{pour } |t| < 1,$$

c'est-à-dire que les points correspondant à ceux de Δ sont intérieurs au domaine immédiat D de z , ce que nous n'avions pas supposé *a priori*.

Ceci posé, deux cas sont à distinguer :

1^{re} L'équation $h(t) = z$ admet une racine t_0 autre que zéro. On a évidemment, quel que soit n ,

$$h(t_0^{q^n}) = R_n[h(t_0)] = R_n(z) = z,$$

et si ω désigne une racine quelconque de l'équation $\omega^{q^n} = 1$,

$$h[\omega(t_0)^{q^n}] = R_n[h(\omega t_0)] = z.$$

Donc $h(\omega t_0)$ est un antécédent de z . Les points ωt_0 , où $\omega = e^{\frac{2i\pi N}{q^n}}$, forment un ensemble dense sur la circonférence $|t| = |t_0|$. A un arc de cette circonférence contenant t_0 , la fonction $z = h(t)$ fera correspondre un arc de courbe contenant z et une infinité d'antécédents ayant z pour point limite, ce qui est impossible puisque z , point double attractif, n'est pas limite de ses propres antécédents autres que lui-même.

Remarquons que l'équation $h(t) = z$ aura toujours des racines non nulles, si dans le plan des z le point z a des antécédents distincts de lui-même. En effet, on pourra en trouver un pour lequel l'équation

$$h(t) = z_{-p}$$

aura une solution t' (théorème de Picard); or, $h(t') = z_{-p}$ entraîne

$$h(t'^{q^p}) = R_p[h(t')] = R_p(z_{-p}) = z,$$

et t' étant différent de zéro, il en est de même de t'^{q^p} .

2° Supposons que $h(t) = z$ n'ait pas de racine autre que zéro et que par conséquent, dans le plan des z , le point double z n'ait pas d'autre antécédent que lui-même : c'est dire que la substitution $z_t = R(z)$ se ramène à la forme polynomiale par une transformation homographique qui rejette z à l'infini.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble parfait caractéristique qui se confond ici avec la frontière du domaine immédiat D de z dans le plan des z . Nous appellerons points ξ les points de $\mathcal{F}$. L'équation $h(t) = \xi$ a toujours des racines, car les points ξ ont toujours une infinité d'antécédents distincts et l'on en déduira (en vertu du raisonnement fait précédemment pour z) l'existence de ces racines. Nous appellerons $\mathcal{G}$ l'ensemble des points θ du plan des t qui correspondent aux points ξ de $\mathcal{F}$. $\mathcal{G}$ est un ensemble parfait constitué par un ensemble de cercles concentriques à Δ . En effet :

a. Si θ appartient à $\mathcal{G}$, il en est de même des points $\theta e^{\frac{2i\pi N}{q^n}}$, n , N entiers quelconques et ces points sont denses sur la circonférence $|\theta| = |\theta|$.

b. Si θ' correspond à ξ , il y a une infinité de points ξ autour de ξ' , donc une infinité de points θ autour de θ' , puisqu'il y a correspondance continue entre un élément d'aire du plan des z entourant ξ' et un élément de surface de Riemann à un nombre fini de feuillets du plan des t autour de θ' .

c. Si des points θ tendent vers le point limite θ' , $h(\theta)$ tend vers $h(\theta')$; ξ tend vers ξ' qui est de $\mathcal{F}$; donc θ' est de $\mathcal{G}$.

La section de $\mathcal{G}$ par un rayon issu de l'origine est un ensemble fermé. Soit alors z_0 un point intérieur au domaine D de z tel que l'équation $h(t) = z_0$ ait une infinité de racines : il y en aura une t_0 extérieure à Δ . Je mène le rayon Ot_0 et soient $\mathcal{E}$ la section de $\mathcal{G}$ par ce rayon, mn l'intervalle contigu à $\mathcal{E}$ qui contient t_0 , Γ la couronne engendrée par la rotation de mn autour de l'origine. Quant t décrit Γ , le point $z = h(t)$ décrit un domaine d'un seul tenant dont tous les points frontières proviennent de la frontière de Γ et par

suite appartiennent à $\mathcal{F}$; ce domaine contient z_0 puisque Γ contient t_0 . Il doit donc coïncider avec le domaine D du point z , et par suite contenir z . Or Γ ne contenant par hypothèse aucun point racine de l'équation $h(t) = z$, la contradiction est manifeste.

On peut donc énoncer le théorème suivant : « L'équation

$$h(t^q) = R[h(t)],$$

où R est une fraction rationnelle de degré plus grand que 1 et $h(t)$ la fonction inconnue, n'admet aucune solution méromorphe ou entière qui ne soit pas rationnelle. » Une discussion élémentaire que nous omettons montre que les seules solutions rationnelles s'obtiennent par l'identité

$$(t^q)^m = (t^m)^q.$$

42. Nous avons enfin à examiner le cas du point double de multiplicateur égal à $+1$, c'est-à-dire de l'équation fonctionnelle

$$R[h(t)] = h[\varphi(t)],$$

où $\varphi(t)$ correspond à une substitution singulière de première espèce.

Il est commode de supposer que la représentation conforme de D a été faite non sur le cercle unité, mais sur le demi-plan $\lambda(t) \geq 0$, et de manière que le point double z corresponde au point à l'infini du plan des t . $\varphi(t)$ est alors de la forme

$$\varphi(t) = t \sum \frac{\Lambda}{t - a},$$

les a étant réels et les Λ positifs. En posant $t = x + iy$, $t_1 = \varphi(t) = x_1 + iy_1$, on obtient

$$x_1 = x - \sum \frac{\Lambda(x-a)}{(x-a)^2 + y^2},$$

$$y_1 = y - \sum \frac{\Lambda y}{(x-a)^2 + y^2}.$$

On a toujours $\frac{y_1}{y} \geq 1$. Pour x infiniment grand, x_1 est infiniment voisin de x et plus petit que x en valeur absolue; y_1 est infiniment voisin de y . Considérons alors dans le demi-plan supérieur le

contour $(f(x, y))$ formé par deux droites $x = \pm \xi$ et la droite $y = \gamma$. Si ξ est suffisamment grand on constate aisément que le domaine E extérieur à ce contour est contenu dans son conséquent $\varphi(E)$.

On a ensuite

$$y_1 = y + \frac{M}{y}, \quad M = \sum \frac{A_i y^2}{(x - a)^2 + y^2} = \sum A_i \sin^2 \omega_i,$$

les ω_i étant les arguments des quantités $z - a$. Quand t est intérieur à la bande PQRS, M a un minimum non nul. J'appelle μ un nombre positif au plus égal à ce minimum et au plus égal d'autre part à γ^2 . Je définis ensuite les nombres $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, par récurrence, comme il suit :

$$\gamma_1 = \gamma + \frac{\mu}{\gamma},$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 - \frac{\mu}{\gamma_1},$$

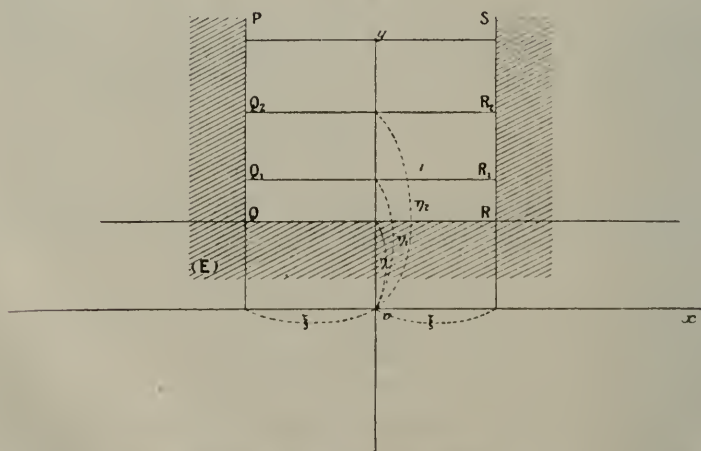
$$\dots\dots\dots$$

J'appelle $E, E^{(1)}, \dots, E^{(n)}, \dots$, les domaines limités toujours par les deux droites $x = \pm \xi$ et, successivement, par les droites

$$y = \gamma_1, \quad y = \gamma_2, \quad \dots, \quad y = \gamma_n.$$

Je dis que si t est dans $E^{(n)}$, $\varphi_{-1}(t)$ sera dans E (quelle que soit la

Fig. 1.



branche de cette fonction que l'on considère). Sinon $\varphi_{-1}(t)$ serait dans la bande PQRS et y_{-1} serait supérieur à γ_1 . On aurait donc,

en remarquant que $y + \frac{y}{x}$ est une fonction croissante de y pour $y > x_1$ (à cause de $x = x_1^2$),

$$y_0 = y_{-1} + \frac{M}{y_{-1}} = y_{-1} + \frac{y}{y_{-1}} \geq x_1 + \frac{y}{x_1} = x_1.$$

De même les antécédents des points de $E^{(2)}$ sont dans $E^{(1)}$, ..., et ainsi de suite. Ces domaines finissent par comprendre un point quelconque du plan à distance finie, car les x_n tendent vers l'infini (comme $\sqrt{n}$). Or, si $h(t)$ est méromorphe dans le demi-plan inférieur et sur l'axe réel, elle sera méromorphe dans un domaine tel que E . Le raisonnement fait dans le cas d'une substitution non singulière est alors applicable : $h(t)$ est rationnelle, car, par hypothèse, le point à l'infini est un point ordinaire ou un pôle.

On peut donc maintenant énoncer le théorème général qui suit : *Si $t_1 = \varphi(t)$ désigne une substitution rationnelle admettant le cercle fondamental Δ et de première espèce, et $R(z)$ une fraction rationnelle quelconque, l'équation fonctionnelle*

$$h[\varphi(t)] = R[h(t)]$$

n'admet aucune solution méromorphe dans le cercle Δ et sur sa circonférence qui ne soit une fonction rationnelle.

On vérifiera aisément que cet énoncé est encore exact quand $R(z)$ est du premier degré.

43. Supposons, maintenant, que $h(t)$ soit régulière sur un arc σ de C ; la fonction $\varphi_{-1}(t)$ n'ayant pas de point critique sur C , la relation

$$h(t) = R[h[\varphi_{-1}(t)]]$$

montre que $h(t)$, méromorphe dans Δ et régulière sur l'arc σ , sera méromorphe sur l'arc $\sigma_1 \equiv \varphi(\sigma)$ et de même sur $\sigma_2, \sigma_3, \dots$. Or σ_p recouvre toute la circonférence pour une valeur finie de p . On peut donc encore dire que *toute solution de l'équation fonctionnelle précédente, méromorphe à l'intérieur de Δ et qui n'est pas une fonction rationnelle, admet C comme ligne singulière essentielle.*

Nous allons maintenant rechercher quelles peuvent être les

fractions rationnelles vérifiant cette équation, en nous bornant au cas le plus intéressant où $h(t)$ fait la représentation conforme de Δ sur le domaine simplement connexe D du point double z de la substitution $z_t = R(z)$.

$h(t)$ étant rationnelle, quand t décrit C , $z = h(t)$ décrit une courbe algébrique unicursale dont certains arcs peuvent être parcourus plusieurs fois et admettre des points de rebroussement; si δ est un domaine aussi petit qu'on le veut, entourant un point t_0 de C , les domaines consécutifs $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ couvrent, à partir d'une valeur finie de n , tout le plan de la variable t , sauf peut-être l'entourage d'un ou de deux points doubles exceptionnels; par conséquent si $z_0 = h(t_0)$, un domaine arbitrairement petit entourant z_0 aura pour conséquents des domaines du plan des z qui, à partir d'un certain rang, le recouvriront tout entier, sauf peut-être l'entourage d'un ou de deux points exceptionnels; il y a, en effet, correspondance continue entre le plan simple des t et une surface de Riemann à p feuillets couvrant le plan des z , en appelant p le degré de $h(t)$; z_0 sera donc bien, comme il fallait s'y attendre, un point de l'ensemble parfait $\mathcal{F}$ relatif à la substitution $z_t = R(z)$. Si maintenant t décrit l'intérieur du cercle Δ , z décrit un domaine D qui est bien un domaine immédiat du point z , car, autour d'un point de Δ , la suite des $\varphi_n(t)$ converge uniformément vers a (a étant le centre de Δ ou un point de la circonférence suivant qu'il s'agit d'une substitution ordinaire ou singulière); donc autour de chaque point de D les $R_n(z)$ convergent uniformément vers z . Si enfin t décrit l'extérieur Δ' de Δ , z décrit un domaine D' ; dans Δ' les $\varphi_n(t)$ convergent vers b ($b = \infty$ ou $b = a = 1$ suivant les cas); donc dans D' les $R_n(z)$ convergent vers $\beta = h(b)$; l'ensemble des domaines D, D' et de la courbe $h(C)$ couvre tout le plan des z et l'on voit bien ainsi que la courbe transformée de C est identique à l'ensemble $\mathcal{F}$.

Ceci posé, si $h(t)$ n'est pas du premier degré, les domaines D et D' , contigus à $\mathcal{F}$, ont des parties communes, sinon un point de D aurait plus d'un homologue dans Δ . Donc ces deux domaines D et D' coïncident; par suite, le domaine fermé $D + \mathcal{F}$ comprend tout le plan. Il y a donc deux cas à distinguer :

1° Le domaine D avec ses points frontières ne couvre pas tout le

plan; $h(t)$ est alors une fonction homographique, et $z_1 = R(z)$ est elle-même une substitution à cercle fondamental de première espèce.

2° Le domaine D avec sa frontière $\mathcal{F}$ couvre tout le plan; $h(t)$ ne peut pas être du premier degré; je dis qu'elle sera du second degré. Soit z_0 un point de $\mathcal{F}$ distinct des points critiques de la fonction $t(z)$; les p points correspondants $t_0, t'_0, \dots$ sont distincts et situés sur C ; si à partir de z_0 on déplace le point z infiniment peu sur la normale à $\mathcal{F}$, les p points t correspondants vont subir des déplacements normaux à C à partir de $t_0, t'_0, t''_0, \dots$, les uns vers l'extérieur, les autres vers l'intérieur. Mais à deux déplacements élémentaires, de sens contraire de z , correspondent des déplacements de sens contraire pour chacun des t ; donc si l'on avait $p > 2$, à un point z de D situé dans le voisinage de z_0 d'un certain côté de $\mathcal{F}$ correspondrait plus d'un point t intérieur à Δ . On a donc $p = 2$ et les deux points critiques de $h_{-1}(t)$ sont les deux extrémités de $\mathcal{F}$ correspondant aux deux zéros de $h'(t)$ situés sur C .

Pour achever la détermination de $h(t)$, on peut supposer qu'on a transformé la relation $z_1 = R(z)$ par une transformation homographique préalable, de manière que les deux extrémités de la courbe $\mathcal{F}$ deviennent les deux points $z = 0, z = \infty$. En outre, on peut faire la représentation conforme, non pas sur le cercle unité, mais sur le demi-plan supérieur, de manière que les points $t = 0, t = \infty$ correspondent aux points $z = 0, z = \infty$. La relation $z = h(t)$ devient alors $z = \Lambda t^2$. On pourra même prendre $\Lambda = 1$. La substitution $z_1 = R(z)$ est donc l'une de celles étudiées au Chapitre III (n° 25) qui laissent invariants un arc de cercle et le domaine extérieur à cet arc.

Soit maintenant D le domaine d'un point double z de multiplicateur < 1 en module ou égal à $+1$. Si D est simplement connexe et si sa frontière possède un arc analytique isolé, la fonction $t = g(z)$ qui fait la représentation de D sur Δ est analytique sur cet arc; réciproquement, $z = h(t)$ sera analytique sur un arc de G . On peut donc énoncer le théorème suivant :

Soit z un point double de la substitution rationnelle $z_1 = R(z)$ avec la condition $|R'(z)| < 1$ ou $R'(z) = +1$. Si le domaine

immédiat D de z est simplement connexe, et si sa frontière présente un arc analytique isolé ⁽¹⁾, cette frontière est tout entière constituée par une circonférence ou une droite; ou bien par un arc de circonférence ou un segment de droite.

La substitution est alors ou bien une substitution à cercle fondamental, ou bien l'une de celles qui s'en déduisent par une transformation du second degré.

44. Revenons maintenant au cas général, où l'on ne suppose pas que $h(t)$ soit analytique en quelque point de C . Faisons d'abord quelques remarques au sujet de la détermination effective de cette fonction. Si nous nous plaçons dans le cas non singulier, en prenant $h(0) = z$, l'équation fonctionnelle que vérifie $h(t)$ permettra d'obtenir par identification tous les coefficients de son développement en série de Mac-Laurin quand on se donne le coefficient de t [$h'(0) \neq 0$], mais à condition que les coefficients de la fonction rationnelle $\varphi(t)$ soient connus, et que $R'(z)$ ne soit pas nul. Dans le cas général, on n'aperçoit aucune méthode simple pour déterminer cette fonction $\varphi(t)$; mais il y a un cas particulier où la solution est immédiate; c'est celui où z est un point double de multiplicateur nul n'ayant pas d'autre antécédent que lui-même dans D , ce qui implique que la fonction $R_{-1}(z)$ restreinte à D n'a pas d'autre point critique que z . Le domaine D est alors simplement connexe et $\varphi(t)$ est égal à t^q ; l'équation fonctionnelle

$$h(t^q) = R[h(t)]$$

permet alors de déterminer les coefficients de $h(t)$. Si l'on pose

$$h(t) = z + u_1 t + u_2 t^2 + \dots \quad (u_1 \neq 0),$$

$$R(z) = z + a(z - z)^q + \dots$$

on verra que u_1 est déterminé par l'équation $u_1^{q-1} = \frac{a}{1}$ et que $u_2, u_3, \dots$ s'obtiennent ensuite par des équations du premier

⁽¹⁾ D'une manière plus précise, nous devons supposer qu'on peut tracer à l'intérieur de D une coupure L aboutissant en deux points frontières accessibles distincts et divisant D en deux domaines partiels D' et D'' , dont l'un D' est limité par L et par un arc analytique faisant partie de la frontière de D .

degré. Il est inutile de s'étendre sur ces formules d'identification dont il n'y a pas grand'chose à tirer: mais il est intéressant de noter qu'on peut déterminer les coefficients de $h(t)$ par des opérations élémentaires. On peut prendre comme exemple la fonction $R(z) = 3z^2 - z^3$: le domaine immédiat du point double $z = 0$ est ici simplement connexe, car parmi les trois points critiques $z = 0$, $z = \infty$, $z = \frac{1}{2}$, de la fonction $R_1(z)$, le premier seul appartient au domaine D_0 (le point $z = \frac{1}{2}$ appartient à D_∞ qui est d'ordre de connexion infini); on a ici $\varphi(t) = t^2$ et

$$h(t) = \frac{1}{3}t + \frac{1}{2 \cdot 3^3}t^{2+2} - \frac{23}{9^3 \cdot 3^3}t^3 + \dots$$

Dans l'exemple actuel, analogue à d'autres étudiés au Chapitre V, la frontière de D_0 est une courbe de Jordan simple. Il s'ensuit que $h(t)$ est continue sur son cercle de convergence; elle y est donc uniformément convergente, le domaine D_0 étant borné, comme il résulte d'un théorème de M. Fejér⁽¹⁾. On pourra donc représenter la frontière en question par les séries uniformément convergentes:

$$\begin{aligned} x &= A_0 + A_1 \cos \varphi + B_1 \sin \varphi + \dots + A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi + \dots, \\ y &= B_0 + A_1 \sin \varphi - B_1 \cos \varphi + \dots + A_n \sin n\varphi - B_n \cos n\varphi + \dots \end{aligned}$$

les coefficients A et B étant calculés exactement par des opérations élémentaires. Dans le cas général, nous ne savons pas si une telle représentation est possible, $h(t)$ pouvant n'être pas continue sur son cercle de convergence, par exemple si la frontière étudiée a des points inaccessibles. Enfin, si l'on sait d'avance qu'une telle représentation est possible, il manque un moyen de calculer simplement les coefficients, tant qu'on ne sait pas déterminer effectivement la fonction rationnelle $\varphi(t)$ ⁽²⁾. Il se pose donc un certain nombre de questions qu'on devra résoudre pour qu'on puisse considérer ces courbes frontières comme effectivement connues.

(1) L. FEJÉR, *La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissances effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple* (C. R. Acad. Sc., t. 156, 1913, p. 10-19).

(2) Dans le cas où $R(\infty)$ n'est pas nul, il faudrait aussi calculer préalablement $|h(\infty)|$.

43. Laissant de côté ces difficultés, nous allons essayer d'obtenir quelques propriétés de la frontière f de D . Je considère sur la circonférence C un point double t' de la substitution $t_1 = \varphi(t)$; c'est un point double répulsif à multiplicateur réel et positif (en laissant de côté, dans le cas d'une substitution singulière, l'unique point double de multiplicateur $+1$). Par un point intérieur à Δ et voisin de t' , on peut faire passer une courbe invariante et même analytique aboutissant en t' ; il lui correspondra dans le plan des z une courbe continue intérieure à D , formée d'une chaîne d'arcs antécédents $(z_0 z_{-1}, z_{-1} z_{-2}, \dots)$, l'arc $z_{-n-1} z_{-n}$ se déduisant de l'arc $z_{-n} z_{-n+1}$ par la substitution $[z | R(z)]$. On a démontré (Chap. V, n° 33) qu'une telle courbe aboutit en un point frontière unique qui est un point double de la substitution. A tout point double t' correspondra ainsi un point double z' , mais à deux points t' distincts peuvent correspondre deux points z' confondus en un seul, les deux chemins qui aboutissent en z' étant séparés par la frontière (1) . Voici un exemple où cette circonstance se produit; posons

$$R(z) = z + z^3,$$

et faisons la représentation conforme du domaine du point à l'infini qui, on le verra facilement, est simplement connexe; pour z réel ou purement imaginaire mais non nul, $z, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ croissent en valeur absolue et tendent vers l'infini; le domaine D_∞ comprend donc les axes de coordonnées sauf l'origine. D'autre part, le point $z=0$ est un point double de multiplicateur $+1$, mais qui compte pour quatre points de cette espèce réunis en un seul et donne lieu à une étoile à quatre branche, c'est-à-dire à quatre domaines immédiats distincts assemblés autour de l'origine et d'ailleurs symétriques chacun par rapport à l'une des bissectrices des axes de coordonnées. L'ensemble $\mathcal{F}$, qui est continu et se confond avec f , aura donc des points au voisinage de l'origine dans chacun des quatre angles des axes; donc les quatre chemins $xO, yO, x'O, y'O$, qui aboutissent au point double origine, sont séparés deux à deux par des branches de la courbe f . La fonction $\varphi(t)$ sera ici égale à t^3 et l'équation $t^3 = t$ donnera les quatre points doubles répulsifs

(1) Voir, par exemple, MONTEL, *Sur la représentation conforme*, p. 43.

sur C , $t = \pm 1$, $t = \pm i$, auxquels correspond le seul point $z = 0$ qui peut être regardé comme la réunion de quatre points frontières.

De même aux points périodiques d'ordre p sur C correspondront sur f des points périodiques d'ordre p ou diviseur de p . Il est probable que parmi les points périodiques en nombre infini qu'on obtient ainsi sur f il y en a une infinité qui sont distincts, mais je ne sais pas le démontrer dans le cas général.

46. Supposons maintenant que $h(t)$ soit continue sur un arc σ de C et de manière qu'à deux valeurs de t distinctes correspondent deux valeurs de z distinctes; on aura alors un arc f' de f constitué par une courbe simple de Jordan et qui renfermera une infinité dense de points périodiques; tous ces points, sauf un nombre fini d'entre eux, seront répulsifs (Chap. IV, n° 30). Il s'ensuit, comme nous allons le voir, que, sauf dans les deux cas simples examinés au n° 43, la courbe f aura une infinité partout dense de points sans tangente. Démontrons pour cela le lemme suivant :

Si o est un point double répulsif de la substitution rationnelle $z_1 = R(z)$ et si ol est un arc de courbe de Jordan simple invariant par cette substitution, cette courbe n'a pas de tangente en o sauf dans le cas où le multiplicateur étant réel et positif, ol est analytique en o .

Traçons un cercle de centre O dans lequel la fonction $R_{-1}(z)$, nulle à l'origine, soit holomorphe et vérifie la condition

$$|R_{-1}(z)| \leq k|z| \quad (k < 1).$$

Il existe une fonction holomorphe dans ce cercle qui vérifie l'équation fonctionnelle de Schröder :

$$F[R_{-1}(z)] = \frac{1}{S} F(z) \quad [|S| = |R'(0)| < 1, F'(0) = +1].$$

La fonction $Z = F(z)$ fait la représentation conforme de ce cercle sur un domaine du plan des Z entourant l'origine. A la courbe ol , qu'on peut supposer tout entière intérieure au cercle, correspondra dans le plan des Z une courbe OL invariante par la substitution $Z_1 = \frac{Z}{S}$, et par suite formée d'une chaîne d'arcs

$Z_0 Z_{-1}, Z_{-1} Z_{-2}, Z_{-2} Z_{-3}, \dots$ déduits de l'arc initial par les puissances de cette substitution. Soit ω l'argument de $\frac{1}{S}$ compris entre 0 et 2π . Quand Z décrit l'arc initial, son argument varie de β à $\beta + \omega$; quand Z décrit le deuxième arc, son argument varie de $\beta + \omega$ à $\beta + 2\omega$; quand Z décrit le $n^{\text{ième}}$ arc, son argument varie de $\beta + (n-1)\omega$ à $\beta + n\omega$; si donc ω n'est pas nul, la courbe OL s'enroule en spirale autour de l'origine et toute droite, passant par O la rencontre en une infinité de points tendant vers O . Si ω est nul, c'est-à-dire S réel et positif, Z_0 et Z_{-1} ont même argument; mais si l'arc $Z_0 Z_{-1}$ ne se confond pas avec un segment de droite passant par l'origine, Z a sur cet arc une oscillation θ non nulle, et tous les arcs homothétiques $Z_{-(n-1)} Z_{-n}$ qui tendent vers l'origine sont vus de ce point sous le même angle θ . Il n'y a donc de tangente en O que si OL est un segment de droite aboutissant en O . En revenant au plan des z , on voit qu'il n'y aura de tangente en o à la courbe ol que si ol est un arc de courbe analytique invariante passant par o .

Ce lemme démontré, la proposition annoncée est immédiate: car l'arc de courbe f' considéré est invariant par la substitution $z_p = R_p(z)$ et passe par un point double répulsif ξ de cette substitution, correspondant à un point double répulsif η de la substitution $t_p = z_p(t)$. A un élément d'arc $\eta\lambda$ de C correspond un élément d'arc ξl de f' auquel s'applique la démonstration précédente. Or, les points tels que ξ sont denses sur f' , qui a ainsi une infinité dense de points sans tangente à droite ni à gauche. Le fait est encore exact pour la courbe f tout entière, qui résulte de f' par itération jusqu'à un ordre fini, comme il résulte de l'équation fonctionnelle

$$R_n[h(t)] = h[z_n(t)],$$

et du fait que $z_n(t)$ décrit toute la circonférence quand t décrit τ dès que n est suffisamment grand. La proposition ne serait en défaut que si $h(t)$ était analytique sur un arc, ce qui ne peut arriver, comme nous le savons, que dans les deux cas simples déjà examinés.

Supposons, par exemple, que l'on puisse tracer dans le domaine D une coupure aboutissant en deux points distincts et divisant ce

domaine en deux domaines partiels, dont l'un soit un domaine convexe D' . Cette coupure a pour image, dans le plan des t , une coupure aboutissant en deux points distincts de C et divisant Δ en deux domaines, dont l'un Δ' correspond à D' . Les contours de D' et Δ' se correspondent point par point d'une manière continue (Painlevé, Carathéodory); $h(t)$ est donc continue sur un arc τ de C auquel correspond point par point un arc f' de f ; on peut appliquer le théorème précédent; mais, sauf dans les deux cas simples déjà mentionnés, f' est coupé en une infinité de points infiniment voisins de A par les droites qui passent par certains de ses points A ; f ne peut donc pas limiter un domaine convexe. On a donc le théorème suivant :

Si la substitution rationnelle $z_1 = R(z)$ admet le point double z_1 ($|R'(z_1)| < 1$ ou $R'(z_1) = +1$) ayant un domaine immédiat D simplement connexe, aucune coupure tracée dans D ne peut le diviser en deux domaines, dont l'un soit convexe, à moins que la substitution n'admette un cercle fondamental ou un domaine invariant dont la frontière est un arc de cercle, ce cercle fondamental ou ce domaine illimité coïncidant alors avec D .

47. Revenons au cas général, et soit PQ une coupure quelconque de D aboutissant en deux points frontières accessibles distincts; il lui correspond une coupure pq de Δ (p, q distincts) qui divise Δ en deux domaines partiels Δ' et Δ'' correspondant à D' et D'' . Un conséquent de rang n de Δ' (ou de Δ'') couvre Δ entièrement (sauf peut-être l'entourage de l'origine). Donc, dans le plan des z , un conséquent de rang fini de D' ou de D'' couvre D entièrement, sauf peut-être l'entourage de z . Ce résultat n'est pas, en général, équivalent à celui du n° 26 (Chap. IV). D'ailleurs, on n'est pas certain que PQ étant, par exemple, un arc de cercle de rayon infiniment petit, l'un des domaines D ou D'' soit lui-même intérieur à un cercle de rayon infiniment petit, f pouvant avoir des points inaccessibles. Nous ne pouvons donc pas affirmer que tout point de f soit limite d'antécédents d'un point quelconque de f si l'on ne considère que les antécédents appartenant eux-mêmes à f . Tant que l'on n'aura pas résolu la question de savoir si ces points

inaccessibles existent ou non, il y a peu de chances pour que la représentation conforme conduise à des propriétés précises de f , à part celles que nous venons de démontrer et qui ont d'ailleurs un caractère purement négatif.

48. Nous allons obtenir au contraire d'autres propriétés de f par une autre méthode reposant sur l'emploi des suites normales, mais à la condition de faire des hypothèses particulières sur la distribution des points critiques des fonctions $R_n(z)$. Nous allons pour cela exposer tout d'abord quelques propriétés des suites normales dont nous allons avoir besoin, et qui sont faciles à déduire des propositions de M. Montel, extraites de son Mémoire « Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine » (*J. E. M. S.*, 3^e série, t. XXIX, 1912, p. 506-507).

Considérons dans un domaine D simplement ou multiplement comme l'ensemble des fonctions $f(z)$ qui satisfont aux conditions suivantes :

- a. Elles sont holomorphes en chaque point intérieur à D ;
- b. Elles sont uniformes;
- c. Elles prennent des valeurs distinctes pour des valeurs distinctes de z ;
- d. Elles ne prennent jamais la valeur finie a .

Si l'on désigne par M et m le maximum et le minimum de $|f(z) - a|$ dans un domaine fermé complètement intérieur à D , on a

$$m > Mq,$$

q étant un nombre positif, qui ne dépend pas de la fonction f , mais seulement de la figure.

En effet, M. Montel a démontré dans le Mémoire cité que les fonctions qui sont holomorphes et uniformes dans un domaine où elles ne prennent jamais la valeur zéro et pas plus de p fois la valeur 1 y forment une famille normale. Il suffit alors d'employer le mode de raisonnement suivant dû au même auteur.

M étant le module maximum de $|f(z) - a|$ dans D' , les fonctions $\varphi(z) = \frac{f(z) - a}{M}$ sont holomorphes et uniformes dans D où

elles ne prennent jamais la valeur zéro et une fois au plus la valeur 1. Elles y forment donc une famille normale. Elles sont d'ailleurs bornées dans leur ensemble (au plus égales à 1 en module) dans D' et de toute suite infinie de ces fonctions on peut en extraire une autre qui converge uniformément dans un domaine renfermant D' et intérieur à D vers une fonction limite holomorphe et bornée. Si la proposition annoncée n'était pas exacte, on pourrait trouver une suite de points $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ de D' tendant vers le point limite z_0 et une suite de fonctions $\varphi_n(z)$ telle que les nombres $\varphi_n(z_n)$ tendent vers zéro. Extrayons de cette suite une nouvelle suite qui converge uniformément vers $\varphi(z)$ dans D' et pour laquelle nous conservons les mêmes notations. Les quantités $\varphi_n(z_n)$ tendent vers zéro par hypothèse et les différences $\varphi(z_n) - \varphi_n(z_n)$ à cause de la convergence uniforme; il s'ensuit que $\varphi(z_n)$ tend vers zéro et par suite que $\varphi(z_0) = 0$, z_0 étant le point limite des z_n . Mais $\varphi(z)$ ne peut prendre la valeur zéro en z_0 que si les fonctions $\varphi_n(z)$ prennent toutes la valeur zéro dans le voisinage de z_0 , ou si $\varphi(z)$ est identiquement nulle (MONTÉL, *loc. cit.*, p. 490). Ces deux hypothèses sont impossibles, car $\varphi_n(z)$ n'est jamais nulle dans D et prend d'autre part au moins une fois une valeur égale à 1 en module sur le contour de D' . La proposition est donc démontrée. On peut aussi l'énoncer en disant que si z_1 et z_2 sont deux points quelconques intérieurs à D' , on a

$$q = \frac{f(z_1) - a}{f(z_2) - a} < \frac{1}{q}.$$

43). La méthode employée permet de démontrer très simplement un théorème important et tout à fait analogue à celui-ci, dû à M. Kœbe.

Le théorème de Kœbe s'énonce ainsi (1) :

« Considérons les fonctions $f(z)$ qui ne prennent jamais deux fois la même valeur à l'intérieur du cercle ($|z| < R$), où elles sont holomorphes. Soit $0 < \theta < 1$. Il existe une fonction positive de θ ,

(1) J'emprunte cet énoncé à l'ouvrage de M. Landau : *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie* (Berlin, Springer, 1906, p. 102).

$\Omega(\theta)$ telle que si z_1 et z_2 désignent deux points du cercle ($|z| \leq \theta R$), on ait

$$\frac{1}{\Omega(\theta)} < \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} < \Omega(\theta).$$

Posons

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

$$F(z) = \frac{f(Rz) - a_0}{a_1 R} = z + \dots \quad (a_1 \neq 0).$$

$F(z)$ ne prend jamais deux fois la même valeur dans le cercle $C(|z| < 1)$; $f'(z)$ et $F'(z)$ ne sont jamais nulles pour $|z| < R$ et $|z| < 1$ respectivement. On a d'ailleurs

$$F'(z) = \frac{f'(Rz)}{a_1}.$$

Appliquons le théorème que nous venons de démontrer à la fonction $F(z)$, le domaine D étant par exemple le cercle ($|z| < 1$). On aura, pour $|z| = \theta$,

$$\min |F(z)| > q(\theta) \max |F(z)|$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\min \left| \frac{F(z)}{z} \right| > q(\theta) \max \left| \frac{F(z)}{z} \right|,$$

$\frac{F(z)}{z}$, qui est holomorphe et non nulle pour $|z| \leq \theta$ atteignant son minimum sur le contour $|z| = \theta$, on aura

$$\left| \frac{F(0)}{0} \right| = 1 > \min \left| \frac{F(z)}{z} \right|_{|z|=\theta}.$$

En combinant les deux dernières inégalités, il vient

$$\max \left| \frac{F(z)}{z} \right|_{|z|=\theta} < \frac{1}{q(\theta)}$$

ou

$$\max |F(z)|_{|z|=\theta} < \frac{\theta}{q(\theta)} = \Lambda(\theta).$$

Il s'ensuit que les $F(z)$ sont bornées dans leur ensemble dans tout cercle de rayon inférieur à 1. Il en sera de même pour les

fonctions dérivées, en vertu de la formule de Cauchy :

$$F'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{(z-u)^2}{F(u)} du,$$

qui donnera, pour $\theta' > \theta$,

$$|F'(z)|_{|z|=\theta} = \max |F'(z)|_{|z|=\theta} \times \frac{\theta'}{(\theta' - \theta)^2}.$$

Par exemple, en prenant $\theta' = \frac{1+\theta}{2}$, il vient

$$|F'(z)|_{|z|=\theta} < A \left(\frac{1+\theta}{2} \right) \times \frac{\frac{1+\theta}{2}}{\left(\frac{1-\theta}{2} \right)^2} = B(\theta).$$

Les $F'(z)$ forment donc dans C une famille normale dont les fonctions limites ne sont pas infinies. Elles ne peuvent non plus être nulles en aucun point, car $F'(z)$ étant différent de zéro dans C , une fonction limite ne peut être nulle en un point que si elle est identiquement nulle, ce qui est impossible puisque $F'(0) = 1$. On en conclura, en vertu d'un raisonnement employé plus haut,

$$\min |F'(z)|_{|z|=\theta} > C(\theta) > 0.$$

On a donc pour $|z| \leq \theta$ la double inégalité

$$C(\theta) \leq |F'(z)| = \left| \frac{f'(Rz)}{a_1} \right| \leq B(\theta),$$

c'est-à-dire, pour $|z| \leq R\theta$,

$$C(\theta) \leq \left| \frac{f'(z_1)}{a_1} \right| \leq B(\theta),$$

$$C(\theta) \leq \left| \frac{f'(z_2)}{a_1} \right| \leq B(\theta);$$

d'où

$$\frac{C(\theta)}{B(\theta)} \leq \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} \leq \frac{B(\theta)}{C(\theta)}.$$

La proposition est donc démontrée pour un domaine de forme circulaire et s'étend facilement par la méthode des chaînes de cercles à un domaine de forme quelconque.

50. Considérons maintenant une suite infinie de fonctions

$f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., holomorphes dans le domaine D que nous supposons simplement connexe, tendant uniformément vers la constante α et satisfaisant encore à la condition c , mais pas nécessairement à la condition d .

De toute suite des fonctions f_n , on peut en extraire une autre pour laquelle on a

$$f_n(z) = \alpha + \mu_n [f(z) + \varepsilon_n(z)],$$

les μ_n étant des constantes qui tendent vers zéro, $f(z)$ une fonction holomorphe dans D , jamais identiquement nulle, et les $\varepsilon_n(z)$ des fonctions qui tendent uniformément vers zéro. $f(z)$ peut être une constante non nulle; hormis ce cas, elle ne prend jamais deux fois la même valeur dans D .

En effet, si $f_n(z)$ n'est jamais nulle dans D , posons

$$\mu_n = f(z_0) - \alpha,$$

z_0 étant intérieur à D ; les fonctions $\frac{f_n(z) - \alpha}{\mu_n}$ ont dans tout domaine D' intérieur à D leurs modules compris entre q et $\frac{1}{q}$ ($q > 0$); elles forment donc une famille normale dans D , et de toute suite de ces fonctions on peut en extraire une autre qui converge uniformément dans le domaine D' (qui contient z_0) vers une fonction holomorphe et bornée $\varphi(z)$; $\varphi(z)$ n'est pas identiquement nulle, puisque les fonctions considérées ont toutes la valeur 1 au point z_0 . Elle n'est donc jamais nulle puisque les fonctions dont elle est la limite ne sont jamais nulles dans D . Elle peut se réduire à une constante non nulle; sinon elle ne prend jamais deux fois la même valeur dans D , étant limite uniformément atteinte de fonctions qui jouissent de cette propriété. La proposition annoncée est donc exacte dans ce cas.

Supposons maintenant que les $f_n(z)$ s'annulent dans D .

Comme elles prennent chacune une fois au plus la valeur zéro, on peut de toute suite de ces fonctions en extraire une autre telle que les zéros $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ des fonctions $f_n(z) - \alpha$ aient un point limite unique ξ . Si ξ n'est pas intérieur à D , on est ramené au cas précédent. Si ξ est intérieur à D , on peut décrire de ξ comme centre un petit cercle c renfermant tous les points z_n , au moins à partir d'un certain rang, et de plus intérieur à D . Soient D'

un domaine limité par un contour simple, intérieur à D et contenant c , et z_0 un point de la couronne $(D' - c)$. Dans cette couronne les fonctions $\frac{f_n(z) - a}{f_n(z_0) - a}$ satisfont aux conditions du lemme de tout à l'heure et restent comprises en module entre q et $\frac{1}{q}$ ($q < 1$).

Elles sont donc encore inférieures à $\frac{1}{q}$ à l'intérieur du cercle c puisqu'elles y sont holomorphes et atteignent leur maximum sur la circonférence. Elles forment donc une famille normale, et de toute suite de ces fonctions, on peut en extraire une autre qui converge uniformément dans D' vers la fonction limite holomorphe $\varphi(z)$; $\varphi(z)$ n'étant pas identiquement nulle dans la couronne $(D' - c)$ n'est pas non plus identiquement nulle dans c ; mais elle est nulle au point ξ . D'ailleurs cette fonction, n'étant pas une constante, prend une seule fois chaque valeur pour la raison indiquée plus haut et l'on a la même égalité asymptotique que tout à l'heure, $\varphi(z)$ étant certainement une véritable fonction.

On pourrait prendre pour les nombres μ_n au lieu de $|f_n(z_0) - a|$ les maxima des fonctions $|f_n(z) - a|$ sur certains contours convenablement choisis, ou encore les valeurs des dérivées $f'_n(z_0)$ en un point intérieur à D .

51. Dans les applications, le théorème précédent fournit, à défaut d'une expression asymptotique des f_n souvent difficile à obtenir, des indications sur les valeurs asymptotiques pouvant conduire à des résultats importants. Nous en donnerons deux exemples relatifs aux problèmes qui nous occupent actuellement.

Considérons un point double attractif z d'une substitution rationnelle et son domaine immédiat D supposé simplement connexe et limité par une courbe f . Nous allons démontrer que, du moins dans des cas très étendus, f n'a de tangente en aucun point ou seulement en une infinité dénombrable de points.

Nous savons que f , qui est la courbe limite des courbes antécédentes intérieures à D d'une circonférence entourant z , peut aussi être regardée comme l'ensemble dérivé des antécédents intérieurs à D d'un point quelconque de D autre que z ; c est même l'ensemble des points limites des domaines antécédents d'un domaine Δ aux conditions suivantes : Δ doit renfermer des points intérieurs à D

et ne contenir aucun point critique ou limite de points critiques des fonctions $R_{-n}(z)$; enfin les domaines antécédents de Δ doivent être choisis parmi ceux qui renferment des points intérieurs à D . S'il en est ainsi, les branches de fonctions $R_{-n}(z)$, restreintes au domaine D , forment dans Δ une famille normale à fonctions limites constantes, ces constantes ayant pour affixes tous les points de f . Nous supposons qu'on peut choisir Δ de manière qu'il renferme à la fois des points de D et des points de f . Soit alors une suite de fonctions $\bar{R}_{-z_1}(z)$, $\bar{R}_{-z_2}(z)$, ..., tendant uniformément dans Δ vers la constante a . Il est possible d'extraire de la suite de ces fonctions une nouvelle suite que nous désignerons par $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$, ..., pour laquelle on aura

$$f_n(z) - a = \mu_n \{ \varphi(z) + \varepsilon_n(z) \}.$$

μ_n , $\varphi(z)$, $\varepsilon_n(z)$ ayant les significations indiquées plus haut. En effet, on suppose que les fonctions $\bar{R}_{-n}(z)$ sont uniformes dans Δ ; on voit facilement qu'il est permis de supposer qu'elles n'y ont pas de pôle. Elles satisfont donc aux conditions d'application du théorème précédent. Pour que $\varphi(z)$ ne soit pas une constante, il suffit qu'elle ait un zéro dans Δ ; c'est-à-dire que les $f_n(z) - a$ aient des zéros ayant un point limite intérieur à Δ . Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que le domaine Δ renferme un point limite des conséquents de a . Soient donc E'_a l'ensemble dérivé de ces conséquents, b un point de cet ensemble qui naturellement appartient à f ; si, en outre, b n'appartient pas à l'ensemble $E_c + E'_c$ formé par les points critiques de la fonction $R_{-1}(z)$, leurs conséquents et leurs points limites, un cercle de centre b et de rayon convenable pourra être choisi comme domaine Δ dans lequel toutes les conclusions qui précèdent sont valables, la fonction $z' = \varphi(z)$ prenant la valeur zéro pour $z = b$ et faisant la représentation conforme de Δ sur un domaine Δ' du plan des z' entourant l'origine. Soit γ la section de f par Δ . Si z est un point de γ , le point $f_n(z)$ appartient à la courbe f en raison du caractère invariant de cette frontière et de la signification de $f_n(z)$.

Appelons ω l'une des limites d'indétermination de l'argument de μ_n pour n infini et ψ l'argument de $z' = \varphi(z)$, z étant un point de γ distinct de b ; en vertu de l'équation

$$f_n(z) - a = \mu_n \{ \varphi(z) + \varepsilon_n(z) \},$$

il en résultera pour l'argument de $f_n(z) - a$ une valeur limite égale à $\omega + \psi$; comme ω est indépendant de z , pour que l'argument limite de $f_n(z) - a$ n'ait qu'un nombre fini de valeurs distinctes, il faut que ψ n'ait qu'un nombre fini de valeurs distinctes quand z varie sur γ . S'il en est ainsi, l'image γ' de γ dans le domaine Δ' est formée de points situés sur un nombre limité de droites issues de l'origine; si γ' était partout discontinu, il en serait de même de γ et de f ; or, f est continu; γ' contient donc un segment de droite et, de plus, puisque γ' est sur un nombre fini de droites, un segment isolé (dont les points intérieurs ne sont pas limites d'autres points de γ' extérieurs à ce segment). Comme z est une fonction analytique de z' dans Δ' , il en résulte que γ contient un arc isolé de courbe analytique. Ceci n'est possible (n° 43) que si la courbe f tout entière est une courbe analytique qui ne peut être qu'une circonférence ou une droite (cas des substitutions à cercle fondamental), ou encore un arc de circonférence ou un segment de droite (substitutions qui possèdent un domaine invariant illimité ayant pour frontière un arc de courbe de cette nature).

Écartons ces deux cas particuliers simples. On voit qu'il existe alors sur f des points ξ infiniment voisins de a tels que l'argument de $\xi - a$ ait une infinité de valeurs limites distinctes ($\text{mod } 2\pi$). La courbe f , quelle que soit sa nature, n'a donc pas une tangente unique au point a et ne peut pas non plus être formée d'un nombre fini de courbes ayant chacune une tangente en a .

52. Nous allons voir que, dans les cas les plus simples, les points a constituent tous les points de f , sauf peut-être une infinité dénombrable d'entre eux. Considérons les points de f qui sont des points critiques ou limites de points critiques des fonctions $R_{-n}(z)$, c'est-à-dire qui appartiennent à l'ensemble $E_c + E'_c$. Nous supposons que ces points ξ de f sont en nombre fini; comme le conséquent d'un point ξ est encore un point ξ , ces points sont donc des points périodiques ou antécédents de points périodiques. Soit maintenant a un point de f ; si l'ensemble dérivé E'_a des conséquents de a renferme une infinité de points, il y en a qui sont distincts des points ξ . Le résultat qui précède est applicable à a . Si E'_a , qui est un ensemble invariant, ne renferme qu'un nombre limité de points, ces points appartiennent tous à des cycles. Supposons que

les points de E'_a soient tous des points ξ . Si un tel point périodique n'a pas un multiplicateur de la forme $e^{i\theta}$, θ étant incommensurable à 2π , la chose n'est possible que si α est un antécédent de ξ . En effet, d'une part un point double répulsif ne peut être point limite unique des conséquents d'un point que si ce point est l'un de ses antécédents; la même propriété a lieu pour les points doublés dont

le multiplicateur est de la forme $e^{\frac{i\pi p}{q}}$, sauf pour les points z qui appartiennent aux domaines de convergence vers ces points doubles et qui, par conséquent, n'appartiennent pas à f ; d'autre part, nous avons démontré (Chap. II, n° 15) que si un point double non attractif est limite des conséquents d'un point z , mais n'est pas leur seul point limite, ces points limites sont en nombre infini. Ces propriétés s'étendent d'elles-mêmes aux points périodiques. Par conséquent, si les points ξ de f sont en nombre fini et ne sont pas des points périodiques dont le multiplicateur soit de la forme $e^{i\theta}$, où θ est incommensurable à 2π , tous les points de f sont des points sans tangente sauf peut-être une infinité dénombrable d'entre eux, à savoir les antécédents des points ξ . En particulier, s'il n'y a aucun point ξ sur f , cette courbe n'a de tangente en aucun point.

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Soient z un point double attractif de la substitution $z_1 = R(z)$ et D son domaine immédiat supposé simplement connexe; si la frontière f de D ne contient aucun point qui soit un conséquent ou limite de conséquents de points critiques de la fonction $R_{-1}(z)$, cette frontière n'a de tangente en aucun point sauf dans les deux cas simples mentionnés au n° 43.

§3. En général, dans ce cas, f est une courbe simple de Jordan; du moins il en est toujours ainsi quand le domaine complémentaire de D est celui d'un autre point double attractif. Cette courbe non seulement n'a pas de tangente unique en un point, mais n'a pas non plus une tangente à droite et une tangente à gauche; on peut même démontrer qu'elle n'a de tangente ni à droite ni à gauche. Comme exemple, nous pouvons prendre la courbe de séparation des domaines des deux points 0 et ∞ pour la substitution

$$z_1 = \frac{z + z^m}{2} \quad (m \geq 2).$$

Supposons maintenant qu'il y ait des points ξ sur la courbe f . Elle pourra avoir alors des tangentes en certains points. Supposons, par exemple, que f contienne un point double β pour lequel $R'(\beta) = +1$ et $R''(\beta) \neq 0$. Au point β il y aura une tangente de rebroussement. En effet, nous avons appris à tracer une courbe c passant par ce point β , y possédant une tangente de rebroussement et limitant un domaine avec une pointe rentrante qui fait partie du domaine du point β ; par conséquent, les points de f voisins de β sont extérieurs à cette courbe c et toute branche de f passant par β sera tangente à c , avec un rebroussement en ce point. Il en sera de même en tous les points antécédents de β . D'ailleurs, si, prenant β pour origine, nous considérons les branches des fonctions $R_{-n}(z)$ nulles en ce point, nous savons qu'elles ont pour expression asymptotique, dans un certain secteur qui renferme des points de f ,

$$R_{-n}(z) = \frac{1}{\Lambda_n + B\mathfrak{L}_n + F(z) + \varepsilon_n(z)},$$

$\varepsilon_n(z)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Cette expression est de la forme

$$\mu_n[C + \tau_n(z)],$$

en prenant, par exemple, $\mu_n = \frac{1}{\Lambda_n + B\mathfrak{L}_n}$ et $C = 1$. La fonction $\varphi(z)$, qui nous a servi dans la démonstration précédente, est ici une constante et l'on voit bien ainsi pourquoi cette démonstration ne s'applique pas dans le cas actuel. On peut prendre comme exemple la courbe de séparation des deux points doubles $z = 0$, $z = \infty$ de la substitution $z_1 = z - z^2$. On peut démontrer que c'est une courbe de Jordan sans points doubles. Elle a une infinité de points de rebroussement qui sont les points antécédents de l'origine. Partout ailleurs elle n'a pas de tangente.

Nous devons remarquer que l'analyse qui nous a conduit à ces propriétés plutôt négatives de la courbe f nous fournit en même temps une propriété positive, à savoir qu'autour d'un point α il existe une infinité d'ares appartenant à la courbe, tendant vers ce point et représentables par la formule

$$Z = \alpha + \mu_n[\varphi(z) + \varepsilon_n(z)],$$

les μ_n étant des constantes qui tendent vers zéro, $\varphi(z)$ une fonction analytique à dérivée non nulle, les $\varepsilon_n(z)$ des fonctions qui tendent vers zéro et z décrivant un arc de cette même courbe. On constate facilement que c'est une propriété banale (facile à traduire en langage géométrique) qui appartient, par exemple, à toutes les courbes analytiques et à beaucoup d'autres; mais c'est grâce à elle que nous avons pu étudier la « condensation des singularités » qui se produit en chaque point de la courbe, et conclure de la non-analyticité de certains arcs, la non-existence des tangentes en chaque point. La démonstration employée n'est d'ailleurs qu'une généralisation de celle du n° 46. On peut aussi remarquer qu'en chaque point a pour lequel cette démonstration est valable, il existe des domaines infiniment petits intérieurs à D et tendant vers a et qui, de plus, sont asymptotiquement semblables entre eux avec un centre de similitude commun en a , de sorte qu'ils sont vus de a sous un angle qui tend vers une limite non nulle. Il est clair qu'une telle propriété, quoique assez banale, n'appartient pas à tous les points frontières, notamment aux points de rebroussement, avec une pointe dirigée vers l'extérieur du domaine; c'est précisément ce qui se produit pour les points doubles de multiplicateur $+1$, pour lesquels la démonstration est en défaut.

Voici enfin une dernière remarque : plaçons-nous dans le cas où f est une courbe de Jordan sans points doubles. Comme elle n'a de tangente en aucun point (ou seulement en une infinité dénombrable de points), il résulte des recherches de M. Lebesgue qu'elle n'est pas rectifiable, et que les fonctions d'un paramètre réel qui la représentent sont à variation non bornée dans tout intervalle. Ces courbes ont d'ailleurs les plus grandes analogies avec celles de M. Helge von Koch; mais les courbes étudiées par cet auteur sont définies par une méthode constructive de manière à leur donner certaines propriétés assignées à l'avance. Il nous a fallu, au contraire, pour analyser le mécanisme de construction de nos courbes, de longues et patientes recherches comportant notamment l'étude analytique approfondie de certaines équations fonctionnelles (nos 40-42).

54. Nous allons donner maintenant une autre application des mêmes principes concernant les points doubles dont le multipli-

cateur est de la forme $e^{i\theta}$, θ incommensurable à 2π , et démontrer qu'il ne peut exister de domaine invariant à l'intérieur duquel les conséquents d'un point tendent régulièrement vers ce point double. Soit, le point double étant à l'origine.

$$z_1 = R(z) = z e^{i\theta} + \Lambda z^2 + \dots$$

Il existe un cercle C de centre O dans lequel $R(z)$ est holomorphe et ne prend qu'une fois chaque valeur; si $|z|$ est infiniment petit, on a

$$\arg z_1 = \arg z + \theta + o(|z^2|),$$

$$\text{mod } z_1 = \text{mod } z + c(|z^2|),$$

$o(|z^2|)$ désignant une quantité qui est au plus de l'ordre de $|z^2|$; la transformation est donc équivalente, au second ordre près, à une rotation de l'angle θ autour de l'origine. On aura de même

$$\arg z_n = \arg z + n\theta + o(|z^2|),$$

$$\text{mod } z_n = \text{mod } z + o(|z^2|),$$

les diverses quantités $o(|z^2|)$ qui figurent dans ces égalités étant plus petites que $k|z^2|$, où k peut être supposé fixe tant que n reste inférieur à un nombre fixe p et $|z|$ inférieur à r .

Supposons que les z_n tendent régulièrement et uniformément vers zéro dans un domaine fermé D faisant partie d'un domaine invariant $\mathcal{Q}$. Les domaines D et $D_1 = R(D)$ étant tous deux intérieurs à $\mathcal{Q}$, il existe un domaine qui les contient tous les deux et qui jouit de la même propriété que D . Il est donc permis de supposer que D et D_1 , et en général D_n et D_{n+1} ont des points intérieurs communs. Ces domaines sont tous, à partir d'un certain rang, intérieurs au cercle C ; on peut supposer qu'il en est ainsi à partir du premier. Les fonctions $R_n(z)$ ne prennent alors qu'une fois chaque valeur dans D . D peut d'ailleurs être supposé simplement connexe et limité par une courbe formée d'arcs analytiques. Nous savons, en outre, que les $R_n(z)$ ne peuvent pas converger uniformément vers zéro dans un domaine contenant l'origine; les $R_n(z)$ n'ont donc pas de zéros dans D .

Soit ξ un point intérieur à D . Les fonctions $\frac{R_n(z)}{R_n(\xi)} = f_n(z)$ sont telles que de toute suite de ces fonctions, on peut en extraire une autre qui converge uniformément vers une fonction limite $f(z)$

holomorphe et non nulle dans D , en vertu des lemmes que nous avons établis. Aucune des fonctions limites n'est une constante, car si l'on avait, pour certaines valeurs infiniment grandes de n ,

$$z_n = R_n(z) = \xi_n [C + \varepsilon_n(z)]$$

[C constante non nulle, $\xi_n = R_n(\xi)$], on en déduirait

$$\arg z_n = \arg \xi_n + \arg C + \text{inf. pet.}$$

Le domaine D_n serait donc vu de l'origine sous un angle infiniment petit. Or, le domaine D_{n+1} se déduisant de D_n par une substitution qui équivaut asymptotiquement à une rotation de l'angle fini θ ($0 < \theta < 2\pi$) autour de l'origine, à partir d'un certain rang D_n et D_{n+1} n'auraient aucun point commun.

Les fonctions $f_n(z)$ n'ayant aucune fonction limite constante et prenant toutes la valeur 1 au point ξ , il en résulte que les domaines qu'elles représentent, quand z décrit D , ont en commun un cercle de rayon non nul ayant pour centre le point 1. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et soient L un contour simple tracé dans D entourant ξ , l_n l'image de L par $f_n(z)$. Il existerait alors une suite de fonctions $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \dots, f_{\alpha_n}, \dots$ telles que la plus courte distance du point 1 aux contours simples $l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}, \dots$ tende vers zéro. On peut supposer, puisque les f_n forment une famille normale, que les fonctions $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \dots, f_{\alpha_n}, \dots$ convergent uniformément vers f dans D ; l_{α_n} tend alors uniformément vers l image de L par $f(z)$. Le point 1 serait donc sur l . Or la fonction $f(z)$, limite non constante de fonctions qui ne prennent jamais deux fois la même valeur dans D , jouit de la même propriété et fait la représentation conforme de D sur une aire simple; le point 1 ne peut donc pas correspondre à la fois au point ξ et à un point de L . Le lemme énoncé est donc exact.

Les domaines représentatifs des fonctions $\frac{R_n(z)}{\xi_n}$ ayant ainsi un cercle intérieur commun de centre 1 et de rayon non nul, ont aussi en commun un secteur circulaire Σ compris entre deux cercles de rayons $1+h$ et $1-h$ ayant pour centre l'origine, et deux rayons qui font entre eux l'angle $\omega \neq 0$. Il correspond à ce secteur une partie du domaine D_n , qu'on peut appeler $\xi_n \Sigma$ et qui est un secteur circulaire semblable, de rayons $|\xi_n|(1+h)$

et $|\xi_n|(1-h)$, d'ouverture ω et contenant le point ξ_n (qui est le milieu du rayon médian).

Transformons ce secteur successivement par $R(z)$, $R_2(z)$, ..., $R_{p-1}(z)$, p étant un nombre fixe (indépendant de n) que nous déterminerons tout à l'heure. Nous obtenons ainsi p domaines qui sont voisins chacun d'un secteur circulaire égal au premier, puisque le secteur initial étant voisin de l'origine, ces $p-1$ transformations sont approximativement des rotations de θ , 2θ , ..., $(p-1)\theta$ autour de l'origine. Je dis que la somme de ces p domaines comprendra toute une couronne circulaire de rayons $|\xi_n|\left(1+\frac{h}{2}\right)$ et $|\xi_n|\left(1-\frac{h}{2}\right)$, au moins dès que n dépasse une certaine limite.

Nous allons choisir p de manière qu'il en soit bien ainsi. Supposons d'abord que la substitution se réduise à

$$z_1 = z e^{i\theta},$$

c'est-à-dire à une simple rotation de l'angle θ . Le choix de p est alors une simple question d'approximation des incommensurables dont nous rappelons la solution pour plus de clarté. Cherchons à déterminer l'entier x de façon que le point $e^{i\theta}$ soit aussi voisin que possible d'un point $e^{i\beta}$ de la circonférence, c'est-à-dire à résoudre approximativement en nombres entiers l'équation

$$x\theta - 2\pi y = \beta.$$

Soit $\frac{m}{p}$ une réduite du développement de $\frac{\theta}{2\pi}$ en fraction continue :

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{m}{p} + \frac{\varepsilon}{p^2} \quad (|\varepsilon| < 1)$$

et

$$\frac{\beta}{2\pi} = \frac{q + \varepsilon'}{p} \quad (|\varepsilon'| < 1, \varepsilon\varepsilon' \geq 0).$$

L'équation à résoudre devient

$$\frac{mx + py - q}{p} = \frac{\varepsilon'}{p} - \frac{\varepsilon x}{p^2}.$$

m et p étant des premiers entre eux, on peut déterminer deux entiers x et y , x étant pris dans la suite $(0, 1, 2, \dots, p-1)$, tels que

$$mx - py - q = 0.$$

On aura, pour ces valeurs de x et de y ,

$$x \frac{\theta}{2\pi} - y - \frac{\beta}{2\pi} = \frac{\varepsilon x}{p^2} - \frac{\varepsilon'}{p} < \frac{1}{p} \quad (\text{en valeur absolue}).$$

Si nous prenons p de manière que $\frac{1}{p} < \frac{\omega}{2}$, les arcs d'amplitude ω ayant pour milieux les points $1, e^{i\theta}, \dots, e^{i(p-1)\theta}$ couvriront toute la circonférence. Si nous prenons $\frac{1}{p} < \frac{\omega}{4}$, les arcs d'amplitude $\frac{\omega}{2}$ et ayant toujours pour milieux les points $1, e^{i\theta}, \dots, e^{i(p-1)\theta}$ couvriront la circonférence; les arcs d'amplitude ω et de mêmes milieux couvriront la circonférence de manière que deux arcs consécutifs empiètent d'au moins $\frac{\omega}{4}$. Si nous revenons aux secteurs circulaires décrits plus haut, on voit qu'ils seront transformés en secteurs égaux empiétant les uns sur les autres d'au moins $\frac{\omega}{4}$ angulairement, leur ensemble constituant une couronne unique de rayons $|\xi_n|(1+h)$ et $|\xi_n|(1-h)$.

Si maintenant nous ne supposons plus que la fonction $R(z)$ se réduise à $e^{i\theta}z$, les conclusions subsistent, l'entier p étant toujours déterminé de la même manière, c'est-à-dire en fonction de la seule constante ω et indépendamment de n . En effet, d'après la remarque faite au début de cette démonstration, nous obtiendrons, au lieu des p secteurs circulaires que nous venons de décrire, p domaines qui s'en déduisent par une transformation infiniment petite du second ordre (ξ_n étant regardé comme l'infiniment petit principal), les modules et les arguments variant de moins de $k|\xi_n|^2$. Donc, si $|\xi_n|$ est suffisamment petit, c'est-à-dire n supérieur à une certaine valeur N , les p domaines obtenus formeront encore un domaine coronal d'un seul tenant comprenant une couronne circulaire de rayons $|\xi_n|(1+\frac{h}{2})$ et $|\xi_n|(1-\frac{h}{2})$ qui appartient par conséquent au domaine $D_n + D_{n+1} + \dots + D_{n+p-1}$. La somme des domaines $D_{n+p} + D_{n+p+1} + \dots + D_{n+2p}$ renfermera de même une couronne circulaire dont les rayons auront pour valeur $|\xi_{n+p}|(1+\frac{h}{2})$ et $|\xi_{n+p}|(1-\frac{h}{2})$. Ces deux couronnes empièteraient l'une sur l'autre au moins à partir d'une certaine valeur de n , car $|\xi_n|$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, il résulte immédiatement de l'expression

de $R(z)$ et de $R_p(z)$ que $\left| \frac{z_{n+p}}{z_n} \right|$ tend vers l'unité et peut être supposé compris pour $n > N'$ entre les limites $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ et $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ où $\varepsilon < \frac{h}{2}$, de sorte que z_{n+1} est intérieur à la couronne de rang précédent.

En continuant ainsi indéfiniment on obtient des couronnes successives empiétant les unes sur les autres et couvrant, puisqu'elles tendent vers l'origine, tout un cercle C' intérieur et concentrique à C , à l'exception de l'origine. Dans C' , les fonctions $R_n(z)$ convergent vers zéro et uniformément dans toute partie de C' qui ne contient pas l'origine; mais ces fonctions sont bornées dans leur ensemble dans C' puisque les domaines D_n ne sortent pas de C . La convergence uniforme a donc lieu dans tout le cercle C' . Or, nous savons que les fonctions $R_n(z)$ ne peuvent converger uniformément dans un domaine comprenant l'origine que vers des fonctions limites non constantes. Le théorème est donc démontré.

D'autre part, la substitution $z_p \doteq R_p(z)$ a pour multiplicateur à l'origine $e^{ip\theta}$ dont l'argument est toujours incommensurable à 2π . Par conséquent, deux domaines quelconques D_n et D_{n+p} ($p \geq 1$), conséquents d'un domaine D où les $R_n(z)$ tendent uniformément vers zéro, ne peuvent jamais faire partie d'un même domaine d'un seul tenant qui possède la même propriété. Si $R(z)$ est rationnelle et si ω désigne une région, contiguë à l'ensemble parfait $\mathcal{F}$, où les $R_n(z)$ convergent uniformément vers le point double (à supposer que la chose soit possible), les régions conséquentes $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ seront donc toutes distinctes. Cette propriété n'a rien de surprenant. En effet, dans le cas où le multiplicateur est de la

forme $e^{2\pi \frac{p}{q}}$, p et q premiers entre eux, les régions de convergence vers le point double, contiguës à $\mathcal{F}$, forment un ou plusieurs cycles de q régions $\omega, \omega_1, \dots, \omega_{q-1}$ qui sont permutées circulairement entre elles par les puissances de la substitution donnée (on devra y ajouter éventuellement d'autres régions antécédentes de celles-ci). En faisant croître q indéfiniment, on est conduit à admettre que dans le cas où l'argument du multiplicateur est incommensurable à 2π , on obtient des régions $\omega, \omega_1, \dots$ toutes distinctes. Mais ce n'est là qu'une méthode heuristique et la démonstration précédente, d'ailleurs plus longue à exposer qu'à concevoir, ne paraît pas pouvoir être évitée.

55. Ce résultat va nous permettre de préciser certains résultats antérieurs. Nous avons démontré (n° 33) que sur la frontière du domaine immédiat D d'un point double attractif, il existe toujours un point double auquel aboutit un chemin intérieur à D et formé d'une chaîne d'arcs $(z_0 z_{-1}, z_{-1} z_{-2}, \dots, z_{-n} z_{-(n+1)}, \dots)$ tels que $z_{-(n-1)} z_{-n} = R(z_{-n} z_{-(n+1)})$. On peut d'ailleurs, au lieu d'une chaîne d'arcs de cette nature, obtenir une chaîne de domaines jouissant de la même propriété, comme il résulte de la démonstration que nous avons donnée. Ceci n'est pas possible, en vertu de ce qui précède, si le point double considéré sur la frontière a un multiplicateur de la forme $e^{i\theta}$, $\frac{\theta}{2\pi}$ étant incommensurable; car la démonstration ne suppose pas que $R(z)$ soit rationnelle dans un certain voisinage du point double. On voit facilement d'autre part que le multiplicateur ne peut pas être non plus une racine $q^{\text{ième}}$ de l'unité autre que $+1$. On peut donc énoncer le résultat suivant.

Sur la frontière du domaine immédiat d'un point double attractif α , il y a toujours au moins un point double β pour lequel on a $|R'(\beta)| > 1$ ou $R'(\beta) = +1$.

56. Précisons maintenant quelques notions relatives aux domaines invariants. Si un tel domaine a plus de deux points frontières, les fonctions $R_n(z)$ y forment une famille normale. Par conséquent, ce domaine ne renferme à son intérieur aucun point de l'ensemble parfait $\mathcal{F}$. C'est donc soit un domaine contigu à $\mathcal{F}$, soit une partie d'un tel domaine.

Supposons que ce domaine invariant $\mathcal{Q}$ ne fasse pas partie d'un domaine singulier où les $R_n(z)$ auraient des fonctions limites non constantes. Soit D un domaine complètement intérieur à $\mathcal{Q}$, D_1 son conséquent immédiat; D et D_1 étant tous deux intérieurs à $\mathcal{Q}$, il existe un domaine Δ également intérieur à D, qui comprend D et D_1 . La chaîne des domaines conséquents $\Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_n, \dots$ forme alors un continu, Δ_n et Δ_{n+1} ayant des points intérieurs communs: les $R_n(z)$ n'ayant que des fonctions limites constantes, le diamètre de Δ_n tend vers zéro. Si les domaines Δ_n tendent vers le point α , les domaines $\Delta_{1+\alpha_p}$ tendent vers $R(\alpha)$; comme ces deux domaines, qui empiètent l'un sur l'autre, ont des

diamètres infiniment petits, Δ_{1+x_p} tend aussi vers a ; donc $a = R(a)$; a est un point double de la substitution. Supposons que les domaines $\Delta_{x_p+\beta_p}$ tendent vers b distinct de a . La chaîne des domaines conséquents de Δ dont les indices sont compris entre x_p et $x_p+\beta_p$ forme un continu C_p qui a deux points limites distincts a et b pour p infini; C_p a donc un continu limite C ; or tous les points de C sont comme a et b des points racines de l'équation $z = R(z)$, qui ne peuvent former un continu. Donc $a = b$. On voit que la démonstration est valable, pourvu que $R(z)$ soit holomorphe dans (C) et continue sur la frontière.

Les fonctions $R_n(z)$ ont donc pour limite un point double unique a . D'après ce qui précède, a ne peut pas avoir pour multiplicateur un nombre de la forme $e^{i\theta}$ qui ne soit égal à $+1$. Par conséquent, dans tout domaine invariant ayant au moins trois points frontières les fonctions itérées $R_n(z)$, si elles n'ont pas de fonctions limites non constantes, tendent vers a , point double attractif ou de multiplicateur $+1$.

R étant rationnelle, supposons que $\mathcal{F}$ divise le plan en un nombre fini de régions: nous savons que ce nombre ne peut être que 1 ou 2 et qu'il n'y a pas de fonctions limites non constantes (n° 27). S'il n'y a qu'une seule région contiguë à $\mathcal{F}$, elle constitue un domaine invariant qui est celui d'un point double attractif ou de multiplicateur $+1$. S'il y a deux régions, ces régions peuvent être permutées par la substitution et constituent alors les domaines attachés à un couple de points attractifs, ou à un point double unique de multiplicateur -1 . Ou bien encore ces deux régions sont complètement invariantes et constituent les domaines respectifs de deux points doubles attractifs ou de multiplicateur $+1$, ou encore les deux domaines distincts attachés à un point double unique de multiplicateur $+1$, mais qui compte pour deux ($R''(z) = 0$).

Ces prémisses posées, nous allons rechercher dans quels cas l'ensemble $\mathcal{F}$ peut contenir un arc isolé de courbe analytique. La section de $\mathcal{F}$ par un domaine convenablement choisi, par exemple un cercle ayant son centre en un point de cet arc et un rayon convenable se compose donc d'un seul arc régulier de courbe analytique; soit σ cet arc, $\mathcal{F}$ tout entier résulte de σ par la transformation rationnelle $Z = R_p(z)$, p étant convenablement choisi.

$\mathcal{F}$ est donc une courbe analytique continue dont certains arcs peuvent avoir des points doubles ou des points de rebroussement ou être parcourus plusieurs fois; mais on peut considérer $\mathcal{F}$ comme une courbe simple sur une surface de Riemann à d^p feuillets au plus. Si Z_0 est distinct d'un point critique de la fonction $R_p(Z)$, deux arcs de $\mathcal{F}$ ne peuvent pas se traverser sur le plan simple au point Z_0 . On a $Z_0 = R_p(z_0)$, z_0 étant un point de σ . Si l'on avait deux arcs distincts passant par Z_0 , il leur correspondrait deux arcs distincts, antécédents de rang p des premiers et passant par le point z_0 de σ . Ces deux derniers arcs appartiennent encore à $\mathcal{F}$, ce qui est contraire à l'hypothèse que σ est un arc isolé. $\mathcal{F}$ n'a donc qu'un nombre fini de points doubles et divise le plan en un nombre fini de régions qui ne peut être que 1 ou 2. Donc [en remplaçant au besoin $R(z)$ par $R_2(z)$] σ appartient, d'après ce qui précède, à la frontière d'un point double attractif ou de multiplicateur $+1$. σ étant un arc isolé de courbe analytique, cette circonstance ne peut se présenter que dans les deux cas simples considérés au n° 43.

Appelons, pour abrégé le langage, substitutions C celles qui donnent lieu à un ou deux domaines limités par un arc de circonférence ou une circonférence entière. Nous avons l'énoncé suivant :

Sauf dans le cas des substitutions C, l'ensemble $\mathcal{F}$ ne comprend aucun arc isolé de courbe analytique.

On verrait de même que $\mathcal{F}$ ne comprend aucun arc isolé de courbe de Jordan simple ayant une tangente en chaque point.

57. Il est remarquable que $\mathcal{F}$ peut comprendre néanmoins une infinité de courbes analytiques (algébriques), mais qui alors ne sont pas isolées.

Considérons la substitution

$$z_1 = cz - \frac{1}{z^3},$$

c étant réel et compris entre $+\frac{1}{2}$ et $+1$. Le point à l'infini est un point double répulsif de multiplicateur $\frac{1}{c} > 1$. Nous allons faire voir que tous les points de l'axe réel appartiennent à $\mathcal{F}$ et même

d'une manière plus précise que les conséquents d'un segment quelconque de l'axe réel finissent par le recouvrir tout entier. C'est là une discussion élémentaire analogue à celles que nous avons faites au Chapitre III à propos des substitutions à cercle fondamental.

Étudions les variations de $R(z)$ pour z réel, en remarquant que $R(z)$ est une fonction impaire. $R(z)$ est infinie pour $z = 0$, nulle pour $z = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{c}}$. Sa dérivée

$$R'(z) = c + \frac{3}{z^3}$$

est toujours positive. On a alors le Tableau suivant :

z	$-\infty$	$-\alpha$	$-\sqrt[4]{\frac{1}{c}}$	$-\sqrt[4]{\frac{1}{c+1}}$	$-\beta$	0
$R(z)$	$-\infty$	$-\sqrt[4]{\frac{1}{c}}$	0	$+\sqrt[4]{\frac{1}{c+1}}$	$+\sqrt[4]{\frac{1}{c}}$	$+\infty$
z	0	$+\beta$	$+\sqrt[4]{\frac{1}{c+1}}$	$+\sqrt[4]{\frac{1}{c}}$	$+\alpha$	$+\infty$
$R(z)$	$ -\infty$	$-\sqrt[4]{\frac{1}{c}}$	$-\sqrt[4]{\frac{1}{c+1}}$	0	$+\sqrt[4]{\frac{1}{c}}$	$+\infty$

Le point $z = 0$ est un pôle de $R(z)$, $z = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{c}}$ sont des pôles de $R_2(z)$; $z = \pm \alpha$ et $\pm \beta$ sont des pôles de $R_3(z)$.

On a ensuite

$$\frac{z_1}{z} = c - \frac{1}{z^3},$$

$$\left| \frac{z_1}{z} \right| < 1 \quad \text{pour } |z| > \sqrt[3]{\frac{1}{c+1}},$$

$$\left| \frac{z_1}{z} \right| > 1 \quad \text{pour } |z| < \sqrt[3]{\frac{1}{c+1}}.$$

Soient z un point réel distinct des antécédents du point à l'infini, et $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ la suite de ses conséquents. Cette suite a des limites d'oscillation finies et même au plus égales à $\sqrt[3]{\frac{1}{c+1}}$ en valeur absolue, car si $|z_n|$ est $> \sqrt[3]{\frac{1}{c+1}}$, $|z_{n+1}|$ est $< |z_n|$. On aura même certainement $|z^n| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{c+1}}$ pour une infinité de valeurs

de n ; en effet, les points $\pm \sqrt[4]{\frac{1}{c+1}}$ forment un couple répulsif, de multiplicateur $(4c+3)^2$; donc $|z_n|$ ne peut tendre vers $\sqrt[4]{\frac{1}{c+1}}$ que si l'on a constamment, à partir d'un certain rang, $z_n = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{c+1}}$.

Ceci posé, soient ab un segment de l'axe réel, $a_1 b_1, a_2 b_2, \dots$ ses conséquents. Je dis que $a_n b_n$ finira par comprendre le point à l'infini à son intérieur ou à l'une de ses extrémités. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; les points de $a_n b_n$ seront donc toujours distincts du point à l'infini et aussi des points $0, \pm \sqrt[4]{\frac{1}{c}}, \pm \alpha, \pm \beta$. Or on a une infinité de fois

$$|a_n| \geq \frac{1}{\sqrt[4]{c+1}}.$$

Le segment $a_n b_n$ sera donc une infinité de fois intérieur à l'un des segments $\left(0, \sqrt[4]{\frac{1}{c}}\right)$ ou $\left(0, -\sqrt[4]{\frac{1}{c}}\right)$. Comme $\beta < \frac{1}{\sqrt[4]{c+1}}$, le segment $a_n b_n$ sera alors ou bien dans le segment $\left(\beta, \sqrt[4]{\frac{1}{c}}\right)$ ou dans son symétrique, ou bien dans le segment $(0, \beta)$ ou dans son symétrique. Dans ce second cas, le segment $a_{n-1} b_{n-1}$ sera intérieur à un segment ayant une extrémité au point $\pm \sqrt[4]{\frac{1}{c}}$ et ne pourra pas dépasser $\pm \alpha$ ou $\pm \beta$. Donc, dans tous les cas, $a_n b_n$ sera une infinité de fois intérieur à l'un des segments (α, β) ou $(-\alpha, -\beta)$ c'est-à-dire à un segment borné n'ayant pas d'extrémité à l'origine des coordonnées.

Ceci posé, on a

$$\frac{z R'(z)}{R(z)} = \frac{c + \frac{3}{z^2}}{c - \frac{1}{z^2}}.$$

Pour z réel, le second membre est toujours plus grand que 1 en valeur absolue; il tend vers 1 pour z infini, mais pour $|z| < \alpha$, on aura

$$\left| \frac{z R'(z)}{R(z)} \right| > k > 1$$

ou

$$\left| \frac{R'(z)}{R(z)} \right| > \left| \frac{k}{z} \right|.$$

En intégrant dans un intervalle où $R(z)$ reste fini, on a

$$\left| \log \frac{R(a)}{R(b)} \right| > k \left| \log \frac{a}{b} \right|.$$

Nous aurons donc pour nos intervalles $a_n b_n$

$$\left| \log \frac{a_n}{b_n} \right| > \left| \log \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \right|$$

constamment, et

$$\left| \log \frac{a_n}{b_n} \right| > k \left| \log \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \right| \quad (k > 1)$$

une infinité de fois. Par suite,

$$\left| \log \frac{a_n}{b_n} \right| > k^{\varphi(n)} \left| \log \frac{a}{b} \right|,$$

$\varphi(n)$ tendant vers l'infini avec n . Donc $\frac{b_n}{a_n}$ a pour seules limites d'indétermination 0 et ∞ . Ceci est incompatible avec le fait que $a_n b_n$ est une infinité de fois intérieur au segment α_1^0 .

On doit donc admettre que $a_n b_n$ finira par comprendre le point à l'infini à son intérieur ou à l'une de ses extrémités. Mais si l'on a un segment tel que $(a_n + \infty)$, comme les points a_{n+1} , a_{n+2} , ... finissent par dépasser $\frac{1}{\sqrt{e}}$ vers la droite, on aura des segments conséquents comprenant l'origine et finalement tout l'axe réel.

On voit donc bien que tout point de l'axe réel appartient à $\mathcal{F}$, aucune suite des fonctions $R_n(z)$ ne peut converger sur un segment de cet axe. D'autre part, l'axe imaginaire appartient aussi à $\mathcal{F}$, car la substitution ne change pas si l'on remplace z par iz et $\bar{z}_1$ par $i\bar{z}_1$. Il en sera de même pour toutes les courbes antécédentes des deux axes de coordonnées qui sont des courbes algébriques en infinité dénombrable. Cherchons, par exemple, les courbes antécédentes immédiates de l'axe réel. Posons

$$z = \varrho e^{i\omega},$$

$$z_1 = c\varrho e^{i\omega} - \frac{1}{\varrho^3} e^{-3i\omega} = \left(c\varrho \cos \omega - \frac{\cos 3\omega}{\varrho^3} \right) + i \left(c\varrho \sin \omega + \frac{\sin 3\omega}{\varrho^3} \right)$$

En exprimant que z_1 est réel, il vient

$$c \varphi^2 \sin \omega + 3 \sin \omega - 4 \sin^3 \omega = 0.$$

En supprimant la solution $\sin \omega = 0$, qui donne l'axe réel, il vient

$$c \varphi^2 + 3 - 4 \sin^2 \omega = 0$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$c(x^2 + y^2)^2 + 3x^2 - y^2 = 0,$$

courbe du sixième degré ayant un point double à l'origine. Toutes ces courbes ont, du reste, des points doubles.

Ainsi $\mathcal{F}$ comprend ici des courbes algébriques. On pourra vérifier qu'il y a des points de $\mathcal{F}$ (notamment des points périodiques d'ordre 2 non situés sur les axes) qui n'appartiennent pas à ces courbes. On constate aisément qu'il y a quatre points doubles attractifs. Ce sont les points

$$z^1 = -\frac{1}{1-c},$$

placés sur les bissectrices des axes de coordonnées et dont les multiplicateurs sont la valeur $(4c-3)$. Les points critiques de la fonction $R_{-1}(z)$ sont le point à l'infini qui est en même temps un point double répulsif et les points $\frac{4c}{3}\sqrt{-\frac{3}{c}}$; ces derniers, placés sur les bissectrices, appartiennent respectivement aux domaines immédiats des quatre points doubles attractifs. Il n'y a pas d'autres fonctions limites que les constantes qui correspondent à ces quatre points⁽¹⁾. Les domaines immédiats de ces points sont simplement connexes et limités par des courbes qui n'ont de tangente en aucun point; la chose n'est douteuse que pour les antécédents du point à l'infini. Il n'est pas difficile de voir qu'il n'y a pas de tangentes en ces points. Ces quatre domaines ont des antécédents distincts d'eux-mêmes, en nombre infini et limités par des courbes

(1) On pourrait déduire de là très rapidement que l'axe réel appartient à $\mathcal{F}$. Mais la méthode directe et élémentaire employée s'applique à des cas où l'on ne connaît pas l'ensemble dérivé des conséquents des points critiques de $R_{-1}(z)$. Pour les substitutions à coefficients réels, on peut former de diverses manières des exemples très généraux où la même circonstance se produit.

de même nature. L'ensemble de toutes ces courbes ne constitue pas tout l'ensemble $\mathcal{F}$. En effet, elles n'ont en commun avec les courbes algébriques considérées plus haut qu'une infinité dénombrable de points. Je ne sais pas si $\mathcal{F}$ a d'autres points que ceux de ces deux séries de courbes. Dans tous les cas, on voit bien que les arcs de ces courbes ne sont pas isolés dans $\mathcal{F}$; car tout point de $\mathcal{F}$ est limite d'antécédents des domaines immédiats des quatre points doubles, les dimensions de ces domaines tendant vers zéro.

Ce même exemple nous conduit encore à une propriété curieuse qui mérite d'être signalée. Faisons la transformation $z_1 = t^{\frac{1}{2}}$, $z = t^{\frac{1}{2}}$; on obtient encore une substitution rationnelle

$$t_1 = t \left(c - \frac{1}{t} \right)^2.$$

Les t_n n'ont pas d'autre fonction limite que la constante $\frac{1}{c-1}$, qui représente un point double attractif correspondant aux quatre points de l'exemple précédent; les t_n convergent vers cette constante dans une infinité de régions distinctes séparées par $\mathcal{F}$. Ainsi il y a une infinité de régions de convergence des t_n , qui sont les antécédentes du domaine immédiat d'un point double attractif et ce sont là les seules régions de convergence.

Pour être complet, il nous resterait à étudier la frontière du domaine immédiat d'un point double, quand ce domaine est d'ordre de connexion infini et à étendre pour ce cas les propositions des nos 43 et 44. On y parviendrait probablement par la même méthode en ayant égard aux travaux récents relatifs à la représentation conforme des domaines à connexion multiple (Poincaré, Kebe, etc.). Mais on doit remarquer que, dans ce cas, f , s'il n'est pas partout discontinu, comprend une infinité de continus distincts; dans tous les exemples que nous avons pu étudier, aucun de ces continus n'est isolé, tous les points de f étant limites de domaines extérieurs à D , dont les dimensions tendent vers zéro. Il en est probablement toujours ainsi; mais il faudrait élucider d'abord ce point avant de rechercher si f peut renfermer une ligne analytique isolée. Il est d'ailleurs évident que si le domaine D est complètement invariant, comme cela a lieu pour le point à l'infini dans une substitution polynomiale,

f coïncide avec $\tilde{f}$ et que les résultats qui précèdent lui sont alors applicables.

CHAPITRE VII.

58. Les développements des Chapitres précédents vont nous permettre d'étudier les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles exprimant une relation entre les valeurs d'une fonction de variable complexe et celle qu'on en déduit en effectuant sur la variable une substitution rationnelle donnée. Pour être traité d'une manière complète, ce sujet exigerait de longs développements concernant la convergence des séries ou des produits infinis qu'on peut former avec les itérées d'une fraction rationnelle. Cette étude qui est facile, tant qu'on reste à l'intérieur des domaines de convergence de ces fractions itérées $R_n(z)$, devient au contraire très difficile sur les frontières de ces domaines, et pour surmonter ces difficultés quand on ne fait aucune hypothèse particulière sur la nature des frontières, il faudrait compléter sur quelques points les résultats déjà acquis. Nous étudierons d'une manière assez complète les solutions des équations fonctionnelles de Schröder et d'Abel et nous donnerons quelques indications sur les solutions d'autres équations un peu plus compliquées.

Pour qu'une équation fonctionnelle telle que

$$A\{f[R(z)], f(z), z\} = 0,$$

où A est une fonction donnée, $f(z)$ une fonction analytique inconnue, ait un sens précis, il faut que si le point z appartient au domaine d'existence de la fonction, il en soit de même du point $z_1 = R(z)$; ce domaine doit donc contenir ses conséquents. Si l'on résout l'équation fonctionnelle par rapport à $f[R(z)]$ et qu'on y remplace ensuite z par $R_{-1}(z)$, en choisissant une détermination convenable de cette fonction inverse, on définira $f(z)$ dans un domaine D_{-1} antécédent du domaine initial D et contenant D . On définira de même $f(z)$ dans $D_{-2}, D_{-3}, \dots, D_{-n}, \dots$. Le domaine limite de D_{-n} est alors un domaine invariant. Si nous supposons que ce domaine invariant soit un domaine maximum, c'est-à-dire qu'il ne soit pas contenu dans un domaine invariant plus grand, il

est alors contigu à $\tilde{\mathcal{R}}$, du moins lorsqu'il a plus de deux points frontières. Le cas où ce domaine comprend tout le plan, sauf peut-être un ou deux points, ne paraît conduire qu'à des fonctions uniformes banales quand $R(z)$ n'est pas du premier degré; il peut conduire à des fonctions multiformes intéressantes, qui peuvent être par exemple des fonctions inverses de fonctions méromorphes; nous en verrons des exemples. Si, au contraire, ce domaine invariant est contigu à $\tilde{\mathcal{R}}$, il ne peut être que ce que nous avons appelé le domaine immédiat d'un point double attractif ou de multiplicateur égal à $+1$, ce dernier cas étant, comme nous le savons, un cas limite du premier, mais dont l'étude est bien plus compliquée ⁽¹⁾.

59. Nous ne nous étendrons pas davantage sur ces indications d'ordre général qui seront précisées par des exemples et nous allons étudier maintenant les solutions uniformes de l'équation fonctionnelle de Schröder dans le domaine d'un point double attractif z de multiplicateur non nul

$$F[R(z)] = s F(z) \quad [s = R'(z), 0 < |s| < 1].$$

M. Königs a démontré que cette équation admet une solution holomorphe dans un cercle de centre z et de rayon r suffisamment petit pour qu'on ait en tout point de ce cercle

$$|R(z) - z| < k |z - z| \quad (k < 1).$$

Cette solution qui est nulle et de dérivée égale à 1 en z est la limite pour n infini de l'expression $\frac{R_n(z) - z}{s^n}$; la convergence uniforme de cette expression est d'ailleurs facile à démontrer, en l'écrivant sous la forme

$$(z - z) \prod_{p=0}^{p=n-1} \frac{R(z_p) - z}{s(z_p - z)}.$$

C'est ce que fait M. Königs dans son Mémoire bien connu.

Si $F(z)$ désigne cette solution fondamentale de l'équation de

(1) Nous laissons de côté le cas qui ne se présente probablement jamais, où il y aurait des domaines invariants singuliers dans lesquels les $R_n(z)$ auraient des fonctions limites non constantes.

Schröder, toutes les solutions holomorphes ou méromorphes en z de la même équation où l'on remplace s par une constante indéterminée sont de la forme $C[F(z)]^{\pm n}$, C constante arbitraire et n entier quelconque. On peut donc se borner à la solution fondamentale, si on laisse de côté celles qui ont en z un point critique ou un point singulier essentiel.

Si maintenant on suppose $R(z)$ rationnelle et qu'on fasse varier z dans tout le domaine immédiat D_x du point double, le produit infini qui définit $F(z)$ étant uniformément convergent dans tout domaine fermé complètement intérieur à D_x , $F(z)$ est holomorphe dans D_x et y vérifie en chaque point l'équation de Schröder.

Les zéros de cette fonction sont les antécédents de z intérieurs à D_x ; cela résulte immédiatement de l'équation fonctionnelle elle-même ou de l'équation $F(z) = \lim_{s^n} \frac{R_n(z) - z}{s^n}$. Ces zéros sont d'ailleurs en nombre infini; nous savons, en effet, que la fonction $R_{-1}(z)$ égale à z pour $z = z$ et prolongée à l'intérieur de D_x y présente au moins un point critique c , lequel est distinct de z , puisque $s = R'(z) \neq 0$; si z décrit un lacet partant de z et y revenant après avoir tourné autour de c en restant à l'intérieur de D_x , $R_{-1}(z)$ décrit un chemin qui part de z , reste dans D_x et aboutit en z_{-1} , antécédent immédiat de z distinct de z ; on conclura de là à l'existence de z_{-2} , z_{-3} , ..., intérieurs à D_x , distincts entre eux et distincts de z . Ces points à partir d'un certain rang ne sont ni point critiques, ni limites de points critiques des fonctions $R_{-n}(z)$; on pourra décrire autour de l'un d'entre eux z' un petit cercle δ intérieur à D_x dans lequel les fonctions $\bar{R}_{-n}(z)$ restreinte au domaine D_x sont uniformes et forment une famille normale à fonctions limites constantes, ces constantes ayant pour affixes la totalité des points de la frontière f de D_x . Tout cela est bien connu par les Chapitres qui précèdent. Chaque point de f est donc limite de domaines intérieurs à E_x et antécédents de δ . En vertu de l'équation fonctionnelle

$$F[R_n(z)] = s^n F(z),$$

la fonction $F(z)$ prendra dans l'un quelconque δ_n des domaines antécédents de rang n de δ , toutes les valeurs $\frac{1}{s^n} Z$, où Z désigne

une valeur quelconque de $F(z)$ dans δ ; les points Z couvrent un domaine e qui comprend l'origine puisque $F(z') = 0$; les domaines semblables $\frac{1}{s^n} e$ renferment donc à leur intérieur un point quelconque du plan autre que le point à l'infini à partir d'une certaine valeur de n puisque $\frac{1}{|s|} > 1$. D'où cette conclusion :

La solution fondamentale de l'équation fonctionnelle de Schröder est une fonction holomorphe à l'intérieur de D_α .

Elle possède à l'intérieur de ce domaine une infinité de zéros ayant pour points limites tous les points frontières du domaine; au voisinage de chacun de ces points frontières la fonction est complètement indéterminée et prend toutes les valeurs excepté l'infini.

60. Il s'ensuit évidemment que tous ces points frontières qui forment un ensemble parfait, continu ou discontinu, sont des points singuliers essentiels de $F(z)$. Le domaine d'existence de cette fonction coïncide donc avec le domaine de convergence du produit infini qui permet de la définir, ou plus exactement avec la partie de ce domaine de convergence qui est d'un seul tenant avec z . Mais supposons que ce domaine de convergence ne soit pas d'un seul tenant. C'est dire que D_α possède une infinité de domaines antécédents distincts et dans chacun d'eux la fonction rationnelle $\frac{R_n(z) - z}{s^n}$ converge uniformément vers une fonction holomorphe. Considérons par exemple un domaine D_{-1} antécédent immédiat de D_α et distinct de D_α . Nous définirons ainsi dans D_{-1} une fonction $F_1(z)$; z étant dans D_{-1} , $R(z)$ est dans D et l'on a

$$F[R(z)] = s F_1(z),$$

$$F_1(z) = \frac{1}{s} F[R(z)].$$

Mais on a aussi, lorsque z est intérieur au domaine immédiat,

$$F(z) = \frac{1}{s} F[R(z)].$$

De la comparaison de ces deux dernières équations il résulte évi-

demment que tout procédé de prolongement analytique généralisant celui de Weierstrass, et qui en aurait les propriétés essentielles, devrait donner $F_1(z)$ comme prolongement de $F(z)$ dans D_{-1} . Mais il faut remarquer que les domaines D_α et D_{-1} peuvent n'avoir aucun point frontière commun et que, tout au moins dans les cas simples, ils en ont un nombre fini. Il faudrait donc pour pouvoir appliquer un procédé analogue à celui de M. Borel, obtenir une expression donnant la même limite que $\frac{R_n(z)-z}{s^n}$ dans D_α et ses antécédents, mais convergeant uniformément sur certaines lignes sortant de ces domaines. Je n'ai pas réussi à former une pareille expression ⁽¹⁾.

Toujours est-il que si l'on se limite au point vue de Weierstrass la fonction $F_1(z)$ ne peut pas non plus être prolongée au delà de D_{-1} . L'expression de M. Königs définit alors une infinité de fonctions analytiques à domaines d'existence limités et distincts.

61. Nous allons étudier maintenant la dérivée de $F(z)$ qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$F'[R(z)] R'(z) = s F'(z).$$

et plus généralement

$$F'[R_n(z)] R'_n(z) = s^n F'(z).$$

Comme F n'est jamais infinie dans D_α , il faut et il suffit, pour que cette dérivée s'annule, qu'on ait $R'_n(z) = 0$, ce qui équivaut à

$$R'(z) R'(z_1) \dots R'(z_{n-1}) = 0.$$

Nous supposons pour éviter une discussion sans grand intérêt que le point à l'infini n'est pas intérieur à D_α . Alors $R'(z) = 0$ a toujours au moins une racine dans ce domaine, puisque la fonction $\overline{R}_{-1}(z)$ restreinte à D y possède au moins un point critique c ; l'équation $R(z) = c$ ayant ainsi une racine double β dans D'_α , on a $R'(\beta) = 0$. Les racines $R'_n(z) = 0$ sont les β et leurs antécédents jusqu'au rang $n - 1$; en faisant varier n et en ne pre-

(1) Un tel procédé devra satisfaire à la condition de définir $F(z)$ dans un domaine ou un ensemble de domaines invariant.

nant que les antécédents de ζ qui sont intérieurs à D_α , on obtient les zéros de $F'(\zeta)$ qui sont en nombre infini et ont pour points limites tous les points de la frontière f ; tout se passe comme pour les zéros de $F(\zeta)$.

Considérons plus généralement l'équation fonctionnelle

$$F[R(\zeta)] = \frac{1}{\Lambda(\zeta)} F(\zeta),$$

où $\Lambda(\zeta)$ est une fonction rationnelle donnée et cherchons les conditions pour qu'elle admette une solution holomorphe ou méromorphe en z . Si $F(\zeta)$ est de la forme $(\zeta - z)^{\pm m} \Phi(\zeta - z)$, Φ n'étant ni nul ni infini à l'origine, $F[R(\zeta)]$ sera de la même forme avec le même entier $\pm m$ puisque $R(z)$ n'est pas nul; il s'ensuit que $\Lambda(z)$ ne doit être ni nul ni infini. On obtient ensuite la condition

$$s^{\pm m} = \frac{1}{\Lambda(z)},$$

$\Lambda(z)$ doit donc avoir une valeur qui dépend de l'entier $\pm m$. Si nous prenons $m = 0$, c'est-à-dire une solution holomorphe et non nulle en z , il vient

$$\Lambda(z) = 1.$$

Cette solution existe effectivement et est représentée (en faisant abstraction d'une constante multiplicative arbitraire) par le produit infini

$$\Lambda(z) \Lambda(z_1) \dots \Lambda(z_n) \dots$$

Ce produit est absolument et uniformément convergent dans D_α puisque $\Lambda(\zeta) = 1 + a(\zeta - z) + \dots$ et que $z_n - z$ tend vers zéro comme s^n . Il y représente une fonction méromorphe ou holomorphe. On sera certain que cette fonction admet effectivement comme points singuliers tous les points frontières de ce domaine quand $\Lambda(\zeta)$ aura un zéro à l'intérieur de D_α [nous admettons pour éviter toute discussion que les zéros de $\Lambda(\zeta)$ ne sont pas des antécédents des pôles de cette même fonction]. On verra en effet, comme précédemment, que tout point de f est alors limite de zéros de la fonction.

Supposons maintenant que $F(\zeta)$ soit de la forme

$$(\zeta - z)^{\pm m} \Phi(\zeta) \quad \left[\Phi(z) \text{ et } \frac{1}{\Phi(z)} \neq 0 \right].$$

$\Phi(z)$ doit vérifier l'équation fonctionnelle

$$\Phi[R(z)] = \left[\frac{z - \alpha}{R(z) - \alpha} \right]^{-m} \frac{1}{\Lambda(z)} \Phi(z) = \frac{1}{B(z)} \Phi(z),$$

$B(z)$ n'étant ni nulle ni infinie en α ; on est ramené au cas précédent.

Enfin, on pourra faire des remarques analogues au sujet de la série

$$B(z) \Lambda(z) + B(z_1) A(z) A(z_1) + \dots + B(z_n) A(z) \Lambda(z_1) \dots \Lambda(z_n) + \dots$$

qui est uniformément convergente dans tout domaine intérieur à D_α pourvu que les fonctions rationnelles A et B vérifient les conditions $B(\alpha) = 0$ et $\Lambda(\alpha) = 1$. C'est alors une solution méromorphe dans D_α de l'équation

$$\Phi[R(z)] = \frac{1}{\Lambda(z)} \Phi(z) - B(z),$$

qui dans des cas étendus aura tous les points de f comme points singuliers.

62. Nous allons maintenant revenir à l'étude de la solution fondamentale de l'équation de Schröder, que nous appellerons plus brièvement la *fonction de Königs* et préciser ses propriétés dans le cas où il s'agit d'une substitution à cercle fondamental de première espèce. Nous supposons que le cercle fondamental est le cercle $|z| = 1$, le point double intérieur étant à l'origine. Il résulte de ce qu'on a déjà démontré que la fonction de Königs tend vers l'infini, quand on s'approche de la circonférence, pourvu que les chemins décrits ne traversent pas certains domaines en infinité dénombrable, mais extérieurs les uns aux autres qui entourent les zéros de la fonction, c'est-à-dire les antécédents de l'origine. Nous allons nous efforcer de prendre ces domaines aussi petits que possible sans que la propriété cesse d'être exacte. Soit γ une circonférence intérieure et concentrique au cercle fondamental C et comprenant à son intérieur les points critiques de $R_{-1}(z)$ dans C ; γ a pour antécédente immédiate γ_{-1} , courbe d'un seul tenant qui entoure γ , pour antécédente de rang n : γ_{-n} qui entoure γ_{-n-1} et tend vers la circonférence frontière f ; les zéros de $F(z)$ dans la

couronne (γ, f) sont ceux de la couronne (γ, γ_{-1}) et leurs antécédents. Supposons par exemple qu'il y ait un seul zéro simple de $F(z)$ dans (γ, γ_{-1}) ; nous allons l'entourer d'une série de circonférences ayant leurs centres en ce point et de longueurs respectives

$$\lambda, \quad q\lambda, \quad q^2\lambda, \quad \dots, \quad q^n\lambda, \quad \dots,$$

où q désigne un nombre < 1 , mais $> |s|$ [$s = R'(0)$]; ces petites circonférences limitent les cercles (δ) , $q(\delta)$, $q^2(\delta)$, ..., $q^n(\delta)$, ... intérieurs à (γ, γ_{-1}) . Dans la partie de (γ, γ_{-1}) extérieure à $q^n(\delta)$, on aura

$$|F(z)| < Aq^n.$$

Si j'enlève de (γ, γ_{-1}) le domaine (δ) , de $(\gamma_{-1}, \gamma_{-2})$ les domaines antécédents de rang 1 de $q(\delta)$, en général de $(\gamma_{-n}, \gamma_{-(n+1)})$ les domaines antécédents de rang n de $q^n(\delta)$, en vertu de l'équation fonctionnelle

$$F[R_n(z)] = s^n F(z),$$

j'aurai dans la couronne de rang n ainsi perforée

$$|F(z)| < \frac{Aq^n}{|s|^n},$$

quantité qui tend vers l'infini puisque $q > |s|$.

Il s'agit maintenant de montrer que la somme des longueurs des contours des domaines supprimés forme une série convergente. Les fonctions $R_{-n}(z)$ n'ont pas de points critiques dans (γ, γ_{-1}) , ni même dans une couronne plus étendue comprenant à son intérieur les circonférences γ et f ; elles sont uniformes dans cette couronne transformée par une coupure radiale en un domaine simplement connexe Δ . On peut alors leur appliquer le théorème de M. Kœbe. Dans tout domaine intérieur à Δ , notamment dans la couronne (γ, f) , on aura pour toutes les fonctions $\varphi(z) = R_{-n}(z)$

$$Q < \left| \frac{\varphi'(z)}{\varphi'(y)} \right| < \frac{1}{Q},$$

y et z étant deux points quelconques de (γ, f) ; $|\varphi'(z)|$ mesure le grandissement linéaire en un point quand on passe du domaine initial à l'un de ses antécédents; on peut dire que le rapport des grandissements linéaires en deux points quelconques est toujours

compris entre Q et $\frac{1}{Q}$; il en sera de même pour le rapport des graddissements de deux lignes quelconques de longueurs finies l et l' :

$$Q < \frac{l'_n}{l'} : \frac{l_n}{l} < \frac{1}{Q}.$$

Considérons, en particulier, les deux lignes suivantes : la circonférence f de longueur 2π et la circonférence de longueur λq^n qui limite $q^n(\hat{o})$ et soient l_n et γ_n les longueurs des lignes correspondantes dans l'un quelconque des domaines antécédents de rang n de Δ (ces domaines sont en nombre d^n , Δ étant affecté d'une coupure).

On aura ainsi

$$Q \frac{l_n}{2\pi} < \frac{\lambda_n}{\lambda q^n} < \frac{1}{Q} \frac{l_n}{2\pi}$$

et, par conséquent,

$$\sum_i \lambda_{i,n} < \frac{\lambda q^n}{Q} \frac{\sum_i l_{i,n}}{2\pi},$$

la sommation étant faite pour les lignes antécédentes (en nombre d^n) de rang déterminé n ; mais les antécédents de rang n de la circonférence f sont des arcs de cette même circonférence et dont l'ensemble recouvre f sans omission ni double emploi, de sorte que

$$\sum_i l_{i,n} = 2\pi.$$

On aura donc

$$\sum_i \lambda_{i,n} < \frac{\lambda q^n}{Q}.$$

Si maintenant on fait varier n de zéro à l'infini, on obtient comme somme des longueurs des contours qui limitent les domaines qu'on a enlevés, une quantité inférieure à

$$\frac{\lambda}{Q} \sum_0^\infty q^n = \frac{\lambda}{Q(1-q)},$$

quantité finie et qui peut être rendue aussi petite qu'on le veut pour λ suffisamment petit, Q et q étant indépendants de λ .

Si au lieu d'un seul zéro de $F(z)$ on en a plusieurs dans la couronne (γ, γ_{-1}) , on opérera pour chacun d'eux de la même manière; λ désignera alors la somme des longueurs des circonférences limitant les cercles (δ) en nombre fini. Si l'on a des zéros multiples on devra prendre $q^p > |s|$, puisqu'on aura $|F(z)| > A q^p$, dans la couronne (γ, γ_{-1}) d'où on a enlevé les (δ) .

On voit donc que les domaines enlevés sont vus de l'origine sous des angles dont la somme peut être rendue aussi petite qu'on le veut, puisqu'on peut les supposer extérieurs à un cercle de centre o et de rayon $\frac{1}{2}$ par exemple. On peut donc dire que sur un ensemble de rayons issus de l'origine et dont la mesure diffère de 2π d'aussi peu qu'on le veut, $F(z)$ tend uniformément vers l'infini quand $|z|$ tend vers l'unité. En effet, on peut déterminer un tel ensemble de rayons qui ne traversent pas les domaines enlevés de C ; pour $|z| > r$, rayon de γ , z est dans une couronne $[\gamma_{-n}, \gamma_{-(n+1)}]$ et l'on a $|F(z)| > AM^n$ ($M > 1$). Or, il est à peu près évident que si $|z|$ tend uniformément vers 1, n tend uniformément vers l'infini, car les couronnes $[\gamma_{-(n+1)}, \gamma_{-n}]$ pour $n < n'$ forment un domaine complètement intérieur à C , et par conséquent à un cercle concentrique de rayon $r' < 1$.

Il est donc démontré que sur tous les rayons issus de l'origine, sauf peut-être ceux d'un ensemble de mesure nulle, $|F(z)|$ tend vers l'infini quand $|z|$ tend vers l'unité.

63. Il n'est pas sans intérêt de préciser l'ordre de grandeur relatif de l'entier n et de $\frac{1}{1-|z|}$. Nous poserons $|z| = \rho$. Nous remarquons ensuite que $R'(z)$ étant bornée dans C et par suite inférieure en module à un nombre $H > 1$, on a aussi dans C

$$|R'_n(z)| = |R'(z) R'(z_{-1}) \dots R'(z_{n-1})| < H^n.$$

Soit toujours $[\gamma_{-n}, \gamma_{-(n+1)}]$ la couronne antécédente de rang n de (γ, γ_{-1}) ; considérons sa plus courte distance à la circonférence f ; c'est un segment σ qui a pour $n^{\text{ième}}$ conséquent un arc de courbe joignant un point de f à un point de γ_{-1} et par conséquent de longueur au moins égale à la plus courte distance $\underline{b}$ de γ_{-1} à f . Les éléments d'arc $d\sigma$ et $d\tau_n$ étant liés par la relation

$$d\tau_n = |R_n(z)| d\sigma,$$

on aura

$$\sigma > \frac{\sigma_n}{\max |R'_n(z)|} > \frac{b}{\Pi^n}.$$

D'autre part, nous avons démontré qu'on a sur f et dans une couronne environnante d'une certaine épaisseur

$$|R(z)| > K > 1.$$

inégalité qu'on peut supposer vérifiée entre γ et f . Il s'ensuit, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, que tout point de γ_{-n} peut être relié à un point de f par un arc de courbe de longueur inférieure à $\frac{b'}{K^n}$, b' étant la distance de γ à f . Donc pour tout point de la couronne $[\gamma_{-n}, \gamma_{-(n+1)}]$, on aura

$$\frac{b}{\Pi^n} < 1 - \rho < \frac{b'}{K^n}.$$

On peut remplacer cette double inégalité par la suivante :

$$G^n < \frac{1}{1 - \rho} < G'^n,$$

G et G' étant des constantes plus grandes que 1. Telle est la relation que nous voulions obtenir et qui va nous permettre d'évaluer le module maximum $\Re(\rho)$ de $|F(z)|$ pour $|z| = \rho$. Nous supposons $\rho > r$; le point $z = \rho e^{i\theta}$ pour lequel $|F(\rho e^{i\theta})|$ atteint son maximum est situé dans une couronne $[\gamma_{-n}, \gamma_{-(n+1)}]$; écrivons la relation

$$F(z) = \frac{1}{s^n} F(z_{-n}).$$

Il s'ensuit que si B est le module maximum de $F(z)$ dans $(\gamma_{-n}, \gamma_{-(n+1)})$, on a, en ce point,

$$|F(z)| = \Re(\rho) \leq B \left| \frac{1}{s} \right|^n.$$

Mais, d'après la double inégalité qui précède, on a

$$n < \frac{\log \frac{1}{1 - \rho}}{\log G};$$

on a donc

$$\Re(\rho) < B e^{\frac{\log \left| \frac{1}{s} \right|}{\log G} \log \left(\frac{1}{1 - \rho} \right)}$$

ou, en posant

$$\mu = \frac{\log \left| \frac{1}{s} \right|}{\log G},$$

$$\Re(z) < B \frac{1}{(1-\rho)^\mu}.$$

D'autre part, la circonférence $|z| = \rho$ a certainement des points extérieurs aux domaines que nous avons supprimés de G au cours de la démonstration précédente, ou même plus simplement des points extérieurs aux domaines antécédents des (δ) . Car ces domaines sont extérieurs les uns aux autres et dans chacun d'eux l'argument de z a une oscillation inférieure à 2π . On aura, en un tel point,

$$|F(z)| \geq \Lambda \left| \frac{1}{s} \right|^\mu;$$

on a donc

$$\Re(z) \geq \Lambda \left| \frac{1}{s} \right|^\mu \geq \Lambda e^{\frac{\log \left| \frac{1}{s} \right|}{\log G} \log \left(\frac{1}{1-\rho} \right)}$$

ou

$$\Re(z) \geq \frac{\Lambda}{(1-\rho)^\mu}, \quad \mu' = \frac{\log \left| \frac{1}{s} \right|}{\log G}.$$

On a finalement

$$\frac{\Lambda}{(1-\rho)^\mu} \leq \Re(z) < \frac{B}{(1-\rho)^\mu},$$

μ et μ' étant positifs. Il s'ensuit que la série de Taylor qui représente $F(z)$ est d'ordre fini sur son cercle de convergence. Nous allons voir en effet que des intégrations successives en nombre fini la transforment en une fonction bornée. Il suffit d'observer qu'on a

$$\left| \int_0^z F(z) dz \right| = \left| \int_0^\rho \int_0^{2\pi} F(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta d\rho \right|$$

$$\int_0^\rho \Re(z) d\rho \leq B \int_0^\rho \frac{d\rho}{(1-\rho)^\mu} = \frac{B}{(1-\rho)^{\mu-1}}.$$

Nous obtiendrons donc ainsi après N quadratures ($N = [\mu] + 1$), une série de Taylor continue ainsi que sa dérivée sur le cercle de convergence et qui y sera absolument convergente. Les coefficients

de la série de Taylor de $F(z)$ sont donc tels que

$$\frac{|a_n|}{n^\alpha} < k,$$

ce qui caractérise les séries de Taylor d'ordre fini. Nous ne chercherons pas à évaluer cet ordre plus exactement ⁽¹⁾. On peut toutefois remarquer qu'en vertu de la formule

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta = |a_0|^2 + |a_1|^2 \rho^2 + \dots + |a_n|^2 \rho^{2n} + \dots,$$

le premier membre tendant vers l'infini avec $\frac{1}{1-\rho}$ d'après ce qui précède la série $\sum |a_n|^2$ est nécessairement divergente; donc $n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} |a_n|$ ne tend pas vers zéro si $\varepsilon > 0$.

Il ne résulte pas nécessairement des développements qui précèdent que la fonction $F(z)$ tende vers l'infini sur des courbes concentriques tendant elles-mêmes vers f . Mais on voit facilement qu'elle tend vers l'infini sur des courbes qui tendent vers f en s'enveloppant mutuellement de manière que leurs longueurs restent bornées. C'est ce qui a lieu sur des courbes γ_{-n} .

En effet, en appliquant le théorème de M. Kœbe comme précédemment, mais cette fois aux points des deux courbes γ et f de longueurs l et 2π , on trouve de suite, en appelant l_{-n} la longueur totale de la courbe γ_{-n} ,

$$l_{-n} < \frac{l}{Q},$$

et sur ces courbes $F(z)$ tend vers l'infini puisqu'il n'y a pas de zéros de $F(z)$ sur γ .

64. Nous allons maintenant préciser quelque peu le mode de distribution des zéros de $F(z)$ autour d'un point déterminé a de f . Reprenons le raisonnement du n° 51 (Chap. VI); b étant un point de f , limite de conséquents de a , nous considérons un domaine Δ contenant b et les domaines antécédents de Δ qui tendent vers a ;

⁽¹⁾ En étudiant $F(z)$ au voisinage d'un point double répulsif, on verra que par un choix convenable des multiplicateurs on peut rendre cet ordre aussi grand qu'on le veut, $R(z)$ étant par exemple du second degré. Mais c'est l'ordre minimum qu'il faudrait trouver.

de la suite des fonctions $R_{-n}(z)$ correspondantes nous en extrayons une autre pour laquelle on a l'expression asymptotique

$$f_n(z) - a = \mu_n[\varphi(z) + \varepsilon_n(z)].$$

On a $\varphi(b) = 0$ et la fonction $z' = \varphi(z)$ fait la représentation de Δ sur un domaine Δ' ; nous sommes ici dans le cas exceptionnel où f est analytique et l'arc λ de f contenu dans Δ est représenté dans Δ' par une droite λ' passant par l'origine. Soit p un zéro de la fonction $F(z)$ contenu dans Δ auquel correspond un point p' dans Δ' . Prenons maintenant les antécédents de Δ au moyen des fonctions f_n définies par la formule qui précède; à l'arc λ de f il va correspondre un autre arc de f passant par a ; si z est un point de λ , l'argument de $f_n(z) - a$ tend donc pour n infini vers une valeur déterminée ω qui correspond à la direction de la tangente en a ; dans les mêmes conditions, l'argument de $f_n(p) - a$ tendra vers la valeur $\omega + \psi$, ψ étant l'angle de $O'p'$ avec la droite λ' dans le plan des z' ; ψ n'est pas un multiple de π ; les points $f_n(p)$, c'est-à-dire les points antécédents de p qui tendent vers a sont donc sur une courbe qui fait un angle déterminé et non nul avec la circonférence; ces points sont encore des zéros de $F(z)$. Ainsi par chaque point a de f il passe une courbe faisant un angle fini avec f et qui contient une infinité de zéros de $F(z)$ ayant a pour point limite.

Sur un tel chemin, $F(z)$ ne tend pas vers une valeur déterminée; d'une part, elle a la valeur zéro comme limite d'indétermination; d'autre part, on voit de suite que l'infini est toujours une limite d'indétermination de $F(z)$ sur un continu quelconque tendant vers f . Ainsi la fonction n'a pas les mêmes valeurs limites sur deux chemins aboutissant au même point frontière, l'un normal, l'autre oblique sur f , contrairement à ce qui se passe pour les fonctions qui ne prennent qu'une fois chaque valeur dans un domaine. Ce qui se passe ici est au contraire à rapprocher des propriétés de la fonction modulaire au voisinage de sa coupure; la fonction a d'ailleurs quelque analogie avec les fonctions automorphes, puisqu'elle prend au facteur s^n près les mêmes valeurs dans des domaines équivalents par rapport à un groupe discontinu de substitutions algébriques, ces domaines devenant infiniment petits au voisinage de la coupure.

Je ne sais pas s'il existe effectivement un ensemble de mesure nulle de rayons sur lesquels $F(z)$ ne tend pas vers l'infini. Mais soit un chemin $\mathcal{L}$ aboutissant en un point a de f et coupant f sous un angle déterminé; pour fixer les idées, nous supposons que $\mathcal{L}$ est une droite ou une circonférence. Nous allons démontrer qu'on peut remplacer $\mathcal{L}$ par un autre chemin $\mathcal{L}'$ terminé en a et faisant le même angle que $\mathcal{L}$ avec f sur lequel $f(z)$ tend vers l'infini. Nous considérons encore les domaines $[q^n(\delta)]_{-n}$ ayant exactement la même signification que précédemment et que nous désignerons plus brièvement par e_n ; $\mathcal{L}$ rencontre le contour d'un e_n , qui est une courbe algébrique, en un nombre fini de points; un segment de $\mathcal{L}$ intérieur à e_n sera remplacé par l'un des deux arcs du contour de e_n qui ont les mêmes extrémités que ce segment; décrivant $\mathcal{L}$ depuis un point intérieur à C jusqu'à a nous répétons cette opération successivement sur tous les segments analogues que nous rencontrons; mais les domaines e_n ainsi rencontrés tendent vers a puisque leurs dimensions tendent vers zéro (il en est de même d'ailleurs pour les δ_{-n} qui renferment ces e_n). La courbe $\mathcal{L}$ ainsi modifiée, soit $\mathcal{L}'$, tend donc toujours vers a . Je dis d'autre part que les contours de ces e_n sont vus de a sous des angles qui tendent vers zéro. S'il n'en est pas ainsi, considérons une suite de ces e_n pour lesquels cet angle ne tend pas vers zéro; de la suite des fonctions $R_{-n}(z)$ qui font la représentation conforme des $q_n(\delta)$ sur ces e_n , ou de δ sur ces δ_n , nous pouvons en extraire une autre qui est représentable par la formule asymptotique

$$f_n(z) - a = \mu_n [\varphi(z) + \varepsilon_n(z)].$$

$\varphi(z)$ n'est pas une constante, mais n'est pas nulle dans δ . La différence des arguments de deux valeurs de $f_n(z) - a$ ne change évidemment pas si l'on supprime la constante multiplicative μ_n du second membre. Soit z_0 le centre de δ ; la circonférence de $q^n(\delta)$ est représentable par

$$z_0 + x_n e^{i\omega},$$

ω variant de 0 à 2π et x_n étant le rayon qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Le second membre de l'égalité précédente, divisé par μ_n , devient, quand on y remplace z par cette valeur,

$$\varphi(z_0 + x_n e^{i\omega}) + \varepsilon_n(z_0 + x_n e^{i\omega}).$$

$z_n(z)$ tendant uniformément vers zéro dans δ , et $\varphi(z_0 + z_n e^{i\omega})$ tendant uniformément vers $\varphi(z_0)$ qui n'est pas nul, l'argument de cette quantité tend uniformément vers celui de $\varphi(z_0)$. Il s'ensuit que le contour e_n est vu de a sous un angle qui tend vers zéro. Le chemin ϱ' fait donc le même angle que ϱ avec f , et d'autre part on a sur ϱ' , comme on l'a vu précédemment,

$$|F(z)| > M^n \quad (M > 1),$$

et l'entier n tendant vers l'infini quand z tend vers a (1).

On pourra donc en particulier mener par tout point de f un chemin normal à f sur lequel $F(z)$ tend vers l'infini; ce chemin ne devra être distinct du rayon que pour un ensemble de points de mesure nulle. Mais on voit que deux chemins tangents entre eux et non tangents à la circonférence ne sont pas équivalents au point de vue des valeurs limites de $F(z)$ qui pourra avoir une infinité de zéros sur l'un et tendre régulièrement vers l'infini sur l'autre.

65. Nous allons considérer maintenant la fonction dérivée $F'(z)$. On peut choisir r de manière que dans la couronne comprise entre f et le cercle γ de rayon r on ait

$$|R'(z)| = K > 1.$$

L'équation fonctionnelle

$$F'[R(z)] R(z) = s F'(z)$$

montre que les zéros de $F'(z)$ dans (γ, f) sont ceux qui sont contenus dans (γ, γ_{-1}) et leurs antécédents. Nous pouvons aussi considérer la dérivée logarithmique $\frac{F'(z)}{F(z)} = \Phi(z)$ qui vérifie l'équation

$$\Phi[R(z)] = \frac{1}{R'(z)} \Phi(z).$$

Si z est un point de (γ, f) de hauteur n par rapport à (γ, γ_{-1}) , c'est-à-dire dont le $n^{\text{ième}}$ conséquent est dans cette dernière couronne, on aura

$$|\Phi(z)| > K^n |\Phi(z_n)|.$$

(1) Il est à peine utile de dire que les conclusions subsistent s'il y a plusieurs zéros de $F(z)$, c'est-à-dire plusieurs domaines (δ) dans la couronne (γ, γ_{-1}) .

On pourra donc refaire sur la fonction $\Phi(z)$ tous les raisonnements faits au sujet de $F(z)$; le nombre $\frac{1}{|s|}$ devra ici être remplacé par K , les domaines δ par les domaines δ' entourant les zéros de $F'(z)$ dans la couronne initiale; le nombre q devra être pris entre 1 et $\frac{1}{K}$. On pourra raisonner simultanément sur ces deux fonctions, en considérant à la fois δ et δ' , $q^n(\delta)$ et $q^n(\delta')$, q étant $> \frac{1}{K}$ et que $|s|$. Nous pouvons donc résumer comme il suit les propriétés des fonctions F et Φ :

Considérons une substitution à cercle fondamental de première espèce avec un point double de multiplicateur non nul au centre du cercle C. La fonction de Kœnigs holomorphe en z est holomorphe dans C et représentée par une série de Taylor qui est d'ordre fini sur la circonférence; par tout point a de la circonférence on peut mener une ligne intérieure à C, faisant un angle déterminé choisi arbitrairement avec la circonférence sur laquelle la fonction et sa dérivée logarithmique tendent vers l'infini lorsqu'on se rapproche indéfiniment de a; on peut prendre pour ces chemins les rayons mêmes du cercle, sauf peut-être pour des points a formant un ensemble de mesure nulle. Les zéros de la fonction ont pour points limites tous les points de la circonférence; il en est de même pour les zéros de la dérivée; par tout point a de la circonférence on peut mener un arc de courbe faisant avec celle-ci un angle fini et contenant une infinité de zéros de l'une quelconque de ces deux fonctions.

Ces résultats appellent les remarques suivantes. $F(z)$ devenant infinie sur certains chemins qui tendent vers la circonférence, $\frac{1}{F(z)}$ (qui a des pôles dans C) tend vers zéro dans les mêmes conditions; il en sera de même, au moins dans certains cas pour la dérivée — $\frac{F'(z)}{F^2(z)}$. En effet la fonction $\frac{F'}{F^2}$ vérifie l'équation

$$\frac{F^2[R(z)]}{F[R(z)]} = s R'(z) \frac{F^2(z)}{F'(z)}.$$

Pour qu'on puisse lui appliquer la même analyse qu'aux fonctions

F et $\frac{F'}{F}$, il suffit qu'on ait dans C

$$|s R'(z)| < k < 1.$$

Ceci peut avoir lieu. Exemple :

$$R(z) = \frac{z(1-5z)}{5-z},$$

qui admet le cercle fondamental $|z| \leq 1$. On trouve

$$R'(z) = \frac{1-50z+5z^2}{(5-z)^2}.$$

Pour $|z| \leq 1$, on a

$$|R'(z)| < \frac{1+50+5}{(5-1)^2} < 4,$$

$$|s R'(z)| = \left| \frac{1}{5} R'(z) \right| < \frac{4}{5}.$$

La fonction $\frac{F^2(z)}{R'(z)}$ tend donc vers l'infini et $\frac{-F'(z)}{F^2(z)}$ vers zéro sur les chemins qui satisfont aux conditions que nous venons d'exprimer.

D'autre part, il existe aussi une fonction de Kornigs $F_1(z)$ holomorphe à l'extérieur de C, nulle à l'infini; F et F_1 prennent des valeurs respectives imaginaires conjuguées en deux points symétriques par rapport à C. La fonction de z égale à $\frac{1}{F(z)}$ à l'intérieur de C, à $\frac{1}{F_1(z)}$ à l'extérieur n'est pas analytique sur f ; néanmoins elle est continue ainsi que sa dérivée sur une infinité de lignes traversant f en tous les points et sous tous les angles, ces fonctions étant nulles sur ces chemins en tous les points de f . Je ne sais pas si le résultat s'étend aux dérivées d'ordre supérieur.

On voit par là que l'étude de la fonction de Kornigs sur sa coupure met en évidence certaines particularités d'apparence assez paradoxale, et notablement différentes de celles qu'on a pu étudier jusqu'ici sur les fonctions présentant les lignes singulières.

66. On peut obtenir des résultats analogues, naturellement moins précis pour la fonction de Kornigs dans le cas d'une substitution rationnelle quelconque. Si l'on considère un petit cercle de centre z contenant ses conséquents, les domaines antécédents

de ce petit cercle et qui sont d'un seul tenant avec z sont contenus les uns dans les autres et s'étendent de sorte qu'on finit par en trouver un $\mathfrak{A}$ dans lequel se permutent toutes les branches de la fonction $\bar{R}_{-1}(z)$ restreinte au domaine D_x et qui contient ainsi tous les points critiques de cette fonction restreinte: soit $\mathfrak{A}_{-1}$ le domaine antécédent immédiat de $\mathfrak{A}$ qui contient $\mathfrak{A}$. Le domaine à connexion multiple $(\mathfrak{A}_{-1} \cdots \mathfrak{A})$ va jouer le rôle de la couronne (γ, γ_{-1}) dans le cas de la substitution à cercle fondamental. Ce domaine ne contient aucun point critique ou conséquent de point critique de $\bar{R}_{-1}(z)$: les fonctions $\bar{R}_n(z)$ y deviennent uniformes quand on l'a rendu simplement convexe par un système de coupures; il contient d'autre part, puisque $R'(z) \neq 0$, des antécédents de z qui sont des zéros de la fonction de Kœnigs $F(z)$ et qu'on pourra entourer de petits cercles δ ou $q^n(\delta)$, q ayant toujours la même signification. Dans le domaine Δ ou $(\mathfrak{A}_{-1} \cdots \mathfrak{A})$ ainsi affecté de coupures qui ne séparent pas les cercles δ , on peut appliquer aux fonctions $\bar{R}_n(z)$ le théorème de Kœbe et comparer ainsi non pas les longueurs mais les aires de domaines images de Δ et $q^n(\delta)$, en supposant comme il est permis de le faire que le domaine $(D_x \cdots \mathfrak{A})$ soit borné, de sorte que la somme des aires Δ_n a une valeur finie. On obtient ainsi le résultat suivant: pour que $F(z)$ tende uniformément vers l'infini quand z tend vers la frontière de D_x , il suffit d'enlever de D_x des domaines e_n dont les diamètres tendent vers zéro en même temps que leur plus courte distance à la frontière et dont la somme des aires peut être rendue aussi petite qu'on le veut. D'une manière plus précise, si n désigne la *hauteur* d'un point de D_x suffisamment voisin de la frontière par rapport à un domaine intérieur tel que $(\mathfrak{A}_{-1} \cdots \mathfrak{A})$, par σ_n et Σ_n la somme des aires des e_n d'une part et d'autre part des parties de D_x qui sont de hauteur n , le rapport $\frac{\sigma_n}{\Sigma_n}$ tend vers zéro comme q^n , et $|F(z)|$ tend vers l'infini comme $\frac{q^n}{|s|^n}$ ($q > |s|$).

Si a est un point accessible de f , ϱ un chemin intérieur à D_x aboutissant en a , on peut toujours remplacer ϱ par un autre chemin ϱ' aboutissant au même point sur lequel $F(z)$ tend vers l'infini, la ou les valeurs limites de l'argument de $z - a$ étant les mêmes sur les chemins ϱ et ϱ' . La démonstration est la même que pour le cas déjà examiné.

Les résultats relatifs aux valeurs limites de la fonction dérivée ne s'étendent que si l'on a $|R'(z)| > K > 1$ sur f , ce qui n'a pas toujours lieu.

Remarquons encore que si D_z est simplement connexe, la représentation conforme de D_z sur un cercle ramène l'étude de la fonction de Kœnigs à celle de la même fonction relative à une substitution à cercle fondamental. Car si l'on pose, comme au Chapitre VI, $z = h(t)$, $z_1 = R(z) = h(t_1)$, l'équation

$$F(z_1) = s F(z)$$

devient

$$F[h(t_1)] = s F[h(t)],$$

ou, en posant $F[h(t)] = \Phi(t)$,

$$\Phi(t_1) = s \Phi(t).$$

Nous savons que $t_1 = \gamma(t)$ désigne une substitution rationnelle à cercle fondamental; $\Phi(t)$ étant holomorphe pour $t = 0$ est précisément la fonction de Kœnigs relative à cette dernière substitution. Aux rayons du cercle correspond un faisceau des courbes analytiques passant par z , ayant pour équations (en prenant $z = 0$)

$$\arctan \frac{y}{x} + H(x, y) = \text{const.},$$

H étant la fonction associée à la fonction de Green relative au point double. On peut prendre pour mesure d'un ensemble de ces courbes celle de leurs points de rencontre avec une courbe du faisceau orthogonal. Cela étant, sur toutes les courbes précédentes, sauf sur un ensemble de mesure nulle d'entre elles, $F(z)$ tend vers l'infini quand z tend vers la frontière. D'ailleurs toutes ces courbes, sauf peut-être celles d'un ensemble de mesure nulle, aboutissent en un point frontière déterminé, puisque $h(t)$ ne prend pas dans C les valeurs correspondant au continu $f^{(1)}$.

Dans certains cas particuliers on pourra affirmer que $F(z)$ tend vers l'infini suivant les rayons issus de z , sauf sur un ensemble de mesure nulle. Si $|R'(z)| > K > 1$ sur f et dans les parties de D_z

(1) P. Écroy, *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* (Bulletin de la Société mathématique, 1913, p. 115).

suffisamment voisines de f , il suffira qu'on ait

$$q \frac{d}{K} < 1,$$

d étant le degré de $R(z)$, et q un nombre quelconque compris entre 1 et $|s|$. Comme $|K| > 1$, ceci aura lieu si $|s| \leq \frac{1}{d}$. Exemple :

$$R(z) = \frac{z + z^2}{2}.$$

67. Nous allons rechercher maintenant les fonctions absolument invariantes par une substitution rationnelle et uniforme dans le domaine invariant D_x qui contient un point double attractif de multiplicateur non nul; une telle fonction sera un invariant du groupe G de substitutions algébriques auquel nous avons déjà fait allusion et dont nous allons préciser quelque peu les propriétés. On peut décrire de x comme centre un cercle c qui d'une part contienne son conséquent c_1 et dans lequel en outre $R(z)$ ne prenne jamais deux fois la même valeur, ce qui est possible puisque $R'(z) \neq 0$; les domaines $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ limités par des courbes simples et ne se recouvrant pas eux-mêmes tendent vers x . Je dis que la couronne E comprise entre c et c_1 est un domaine fondamental du groupe G . Si z et z' sont deux points distincts de c , z_1 et z'_1 seront également distincts, de même z_2 et z'_2 , z_n et z'_n . On ne pourra pas avoir non plus

$$z_n = z'_{n+p} \quad (n \text{ et } p \geq 0),$$

si z et z' sont deux points distincts de E , car on en déduirait

$$R_n(z) = R_n(z'_p),$$

et par suite

$$z = z'_p.$$

Or z' étant dans la couronne comprise entre c et c_1 , z'_p sera dans la couronne comprise entre c_p et c_{p+1} , enveloppée par la première; si $z \neq z'$, l'égalité précédente ne pourra avoir lieu que si z est sur le contour extérieur de E et z' son conséquent situé sur le contour intérieur, ces deux contours étant naturellement équivalents par rapport à G . D'autre part, tout point intérieur à D_x a dans c un conséquent qui sera par suite à l'intérieur ou sur le contour d'un

domaine $E_p = c_{p+1} - c_p$, et dont un antécédent de rang p se trouvera ainsi dans E ou sur son contour.

Il s'ensuit que E renferme un point et un seul équivalent à un point quelconque de D_z autre que z ; E est donc bien un domaine de discontinuité du groupe G .

Soit ensuite Δ un domaine quelconque complètement intérieur à D_z ; il ne contient donc qu'un nombre limité d'antécédents de z , ces points n'ayant d'autres points limites que les points frontières de D_z ; enlevons de Δ des petits cercles ayant pour centres les points z_n qui y sont contenus. Nous obtenons un domaine Δ dans lequel le groupe G est proprement discontinu. En effet il existe un entier p tel que $p^{\text{ième}}$ conséquent Δ'_p de Δ soit intérieur au cercle c ; d'autre part Δ'_p ne contient pas z à son intérieur ni sur son contour; il n'a donc de points communs qu'avec un nombre fini de domaines conséquents de E . Δ'_p ne renfermant ainsi qu'un nombre fini de points équivalents entre eux, il en est de même pour Δ' puisqu'un point n'a qu'un nombre fini d'antécédents de rang p . D'une manière plus précise, Δ n'a de points communs qu'avec un nombre fini de domaines équivalant à E qui sont les domaines $E, E_1, \dots, E_n, \dots$ et leurs antécédents. Appelons domaines G tous les équivalents de E ; on voit qu'il y a des domaines G rassemblés autour du point z et tendant vers ce point et de même autour de chaque point antécédent de z ; les autres tendent vers la frontière sur laquelle ils s'aplatissent. Chaque domaine G renferme un nombre fini de points équivalant à un point z de D_z autre que les antécédents de z ; mais pour certains d'entre eux ce nombre est plus grand que l'unité et devient de plus en plus grand à mesure qu'on se rapproche de la frontière, à cause de la présence dans D_z des points critiques de la fonction $\bar{R}_{-1}(z)$ restreinte à ce domaine. En outre, il peut arriver que l'ordre de connexion de ces domaines aille en croissant indéfiniment. Pour obtenir des domaines simplement connexes et ne contenant pas plus d'un point équivalent à un point donné il faut y pratiquer un système de coupures de la manière suivante : joignons un point du contour extérieur de E à son conséquent situé sur le contour intérieur par une coupure intérieure à E et passant par tous les conséquents des points critiques de $\bar{R}_{-1}(z)$ qui y sont contenus (il y a en général un conséquent et un seul de chacun de ces points critiques dans E , il peut y avoir

exception si ces points critiques sont des antécédents de z); la coupure ainsi tracée λ pourra être formée d'un seul arc régulier de courbe analytique ou même algébrique; les arcs conséquents $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ tendent vers z et constituent par leur réunion un élément de courbe invariante Λ passant par z ; l'ensemble de tous les arcs antécédents de Λ , ou, ce qui revient au même, l'ensemble de tous les arcs équivalant à λ constitue dans D un réseau invariant de courbes (algébriques) qui divise les domaines G en domaines simplement connexes $\overline{G}$ dans lesquels il n'y a qu'un point équivalent à un point donné; les antécédents des points critiques sont des points de bifurcation pour ce réseau, le nombre des branches qui y passent restant d'ailleurs borné; ce sont des sommets pour les polygones $\overline{G}$. Je dis que les dimensions de ces domaines tendent vers zéro lorsqu'on se rapproche indéfiniment de la frontière; en effet ces domaines (abstraction faite des conséquents de $\overline{E}$ qui tendent vers z) sont ou bien des antécédents de $\overline{E}$, ou bien des antécédents de domaines qui sont eux-mêmes compris dans des cercles entourant les points z_{-k} , antécédents immédiats de z distincts de z ; or dans $\overline{E}$ aussi bien que dans ces derniers cercles il n'y a pas de points limites de conséquents de points critiques; par conséquent on peut déterminer un entier h tel que dans les domaines antécédents de rang h les fonctions $R_{-n}(z)$ n'aient plus de points critiques et forment une famille normale à fonctions limites constantes pourvu qu'on se borne à des domaines simplement connexes, ce qui est bien le cas ici d'après la manière dont nous avons tracé les coupures. Nous voyons par là qu'en nous rapprochant indéfiniment de f nous traverserons des polygones $\overline{G}$ dont les dimensions tendront vers zéro et de telle manière que leurs angles et le rapport des longueurs de leurs côtés oscillent entre des limites finies et non nulles, en vertu du théorème de Koebe. Il en sera de même quand on se rapprochera indéfiniment d'un point z_p .

68. Proposons-nous maintenant de trouver les fonctions univalentes dans D_z telles que l'on ait

$$I(z) = I[R(z)].$$

et par suite

$$I(z) = I(z'),$$

lorsque z et z' sont équivalents par rapport au groupe G . Il est clair par ce qui précède que le point z et ses antécédents sont des points singuliers essentiels de $I(z)$; il est bien facile de trouver les fonctions $I(z)$ n'ayant pas d'autres points singuliers essentiels dans D_z . Soit $F(z)$ la fonction de Kœnigs holomorphe en z telle que

$$F[R(z)] = s F(z), \quad [F(z) = 0, F'(z) = 1].$$

Si l'on pose $Z = F(z)$, on a inversement

$$z = f(Z), \quad R(z) = f(sZ),$$

$f(Z)$ étant holomorphe pour $Z = 0$. On aura donc

$$I(z) = H(Z),$$

$H(Z)$ étant uniforme dans un cercle de centre O avec un point singulier essentiel isolé à l'origine et vérifiant l'équation fonctionnelle

$$H(Z) = H(sZ),$$

$H(Z)$ étant uniforme pour $|Z| \leq |Z_0|$ sera uniforme pour $|Z| \leq \left| \frac{Z_0}{S^n} \right|$, quel que soit n , donc dans tout le plan et n'aura d'autres singularités essentielles que l'origine et le point à l'infini.

Posons

$$\begin{aligned} z &= e^W, \\ s &= e^{\omega}, \\ H(e^W) &= \Phi(W). \end{aligned}$$

La fonction $\Phi(W)$ est uniforme dans tout le plan, n'a d'autres singularités à distance finie que des pôles et vérifie les relations

$$\begin{aligned} \Phi(W + 2i\pi) &= \Phi(W), \\ \Phi(W + \omega) &= \Phi(W). \end{aligned}$$

Φ est donc une fonction elliptique.

Réciproquement d'une fonction elliptique $\Phi(W)$, aux périodes $2i\pi$ et ω , on déduit par la substitution $W = \log Z$ une fonction uniforme de Z ayant pour points singuliers essentiels les points 0 et ∞ , et invariante quand on y remplace Z par sZ ; en remplaçant

ensuite Z par la fonction de Königs $F(z)$, qui est holomorphe et uniforme dans D_α et admet comme zéros les antécédents de z , on obtient une fonction $I(z)$ ayant ces derniers points comme seuls points singuliers essentiels dans D_α et uniforme dans ce domaine. Si la fonction $\Phi(W)$ est d'ordre m , la fonction $I(z)$ prend en général m fois la même valeur dans le domaine fondamental E , ainsi que dans les domaines $\overline{G}$.

Il suit de là et des propriétés connues des fonctions elliptiques que deux fonctions invariantes I et I_1 sont toujours liées par une équation algébrique; ces fonctions prennent toutes les valeurs au voisinage des points α_{-n} et des points de f .

On obtiendra des résultats analogues relativement aux solutions uniformes de l'équation fonctionnelle

$$L[R(z)] = c I(z),$$

c étant une constante qui n'est pas de la forme $s^{\pm n}$. On est alors ramené aux fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

69. Faisons encore quelques remarques au sujet d'équations fonctionnelles d'un type un peu plus général, tel que

$$F[R(z)] = A[z, F(z)],$$

où $A(z, y)$ désigne une fonction rationnelle donnée des deux variables z et y . On peut, dans bien des cas, démontrer l'existence de solutions uniformes de cette équation autour d'un point double z ou même dans tout le domaine D_α , comme pour l'équation de Schröder. C'est à quoi on parvient soit par la formation directe de séries ou de produits infinis convergents qui vérifient cette équation, soit par une méthode d'approximations successives. Mais la solution obtenue étant, par exemple, uniforme dans D_α , il n'est pas toujours facile de reconnaître si tous les points frontières de ce domaine sont des points singuliers de la fonction. La question se simplifie dans le cas des substitutions à cercle fondamental de première espèce. En effet, la démonstration du n° 40 (Chap. VI) est ici applicable; la fonction A qui joue le rôle de R dans la démonstration à laquelle nous renvoyons; $R(z)$ joue le rôle de $\varphi(t)$; A dépend ici à la fois de la variable indépendante et de la fonction

inconnue; mais on verra facilement que cela ne modifie en rien les conclusions. Le cas particulier où $R(z)$ est de la forme αz^p devrait toutefois être examiné à part. Si on le laisse de côté, on peut dire que toute solution de l'équation fonctionnelle précédente, méromorphe à l'intérieur du cercle fondamental, est ou bien une fonction rationnelle, ou bien une fonction qui ne peut pas être prolongée au delà de ce cercle. Mais cette méthode ne met pas en évidence la nature des singularités sur la circonférence. Enfin, l'extension de cette démonstration, au cas où $R(z)$ est une fonction rationnelle plus générale, présente des difficultés, provenant notamment du fait que toutes les branches de la fonction $R_{-1}(z)$ ne sont pas toujours permutées entre elles à l'intérieur du domaine D_z . On trouvera facilement certaines extensions sur lesquelles nous n'insisterons pas davantage ici.

70. Nous allons considérer maintenant les solutions de l'équation fonctionnelle de Schröder au voisinage d'un point double répulsif que nous prendrons pour origine. La branche de fonction $R_{-1}(z)$, nulle à l'origine, étant holomorphe pour $|z| \leq r$ si l'on prend r assez petit pour que l'inégalité $|z| \leq r$ entraîne $|R_{-1}(z)| < k|z|$ ($k < 1$), il existe dans ce cercle une fonction holomorphe, nulle à l'origine et de dérivée égale à 1 en ce point, qui vérifie l'équation

$$\Phi[R_{-1}(z)] = \frac{1}{S} \Phi(z) \quad [S = R'(0)].$$

Cette fonction n'est pas uniforme dans tout le plan, mais on démontre facilement que la fonction inverse de l'élément de fonction analytique ainsi défini est une fonction méromorphe ou entière, dont l'existence a été établie par Poincaré dans son Mémoire sur les fonctions qui admettent un théorème de multiplication. Cette fonction $\theta(u)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\theta(Su) = R[\theta(u)],$$

et peut servir à étudier l'itération de $R(z)$ au moyen de la représentation paramétrique

$$z = \theta(u),$$

$$R_n(z) = \theta(S^n u).$$

C'est la méthode qu'a employée Lattès pour obtenir quelques-uns

des résultats que nous avons démontrés au Chapitre IV par une autre voie. En utilisant le théorème de Picard, on démontre aisément que si l'équation $z_0 = \theta(u)$ n'a pas de solutions, le point z_0 ne possède que 1 ou 2 antécédents distincts; on est alors ramené à une substitution polynomiale en effectuant une transformation homographique convenable sur les variables z et z_1 liées par la relation $z_1 = R(z)$; $R(z)$ étant alors un polynôme, $\theta(u)$ est une fonction entière qui n'a pas de valeur exceptionnelle à distance finie, sauf dans le cas banal $z_1 = az^q$, qui conduit pour $\theta(u)$ à la fonction exponentielle. Il est inutile d'insister sur ces questions qui sont faciles et se rattachent à d'autres que nous avons déjà traitées en détail.

Il est plus instructif d'étudier la fonction inverse de $\theta(u)$, c'est-à-dire précisément les solutions non uniformes de l'équation de Schröder. Nous allons d'abord rechercher les points critiques algébriques de cette fonction. On a l'identité

$$S^n \theta'(S^n u) = R'_n [\theta(u)] \theta'(u)$$

ou

$$S^n \theta'(u) = R'_n \left[\theta \left(\frac{u}{S^n} \right) \right] \theta' \left(\frac{u}{S^n} \right).$$

Si $\theta'(u_0) = 0$, on peut prendre n assez grand pour que $\theta' \left(\frac{u_0}{S^n} \right)$ ne soit pas nul, on a alors

$$R'_n \left[\theta \left(\frac{u_0}{S^n} \right) \right] = 0.$$

Posons

$$\theta(u_0) = z_0.$$

$$\theta \left(\frac{u_0}{S^n} \right) = z_{-n}.$$

On a alors

$$R'_n(z_{-n}) = 0,$$

$$z_0 = R_n(z_{-n}),$$

ce qui exprime que z_0 est un point critique de la fonction inverse de $R_n(z)$, c'est-à-dire le conséquent d'un point critique de la fonction $R_{-1}(z)$.

Réciproquement, les conséquents des points critiques de la fonction $R_{-1}(z)$ sont en général des points critiques algébriques de la fonction inverse de $\theta(u)$. S'il n'y a pas de point exceptionnel, nous pouvons admettre que le point à l'infini n'est jamais un

antécédent de rang n des points critiques de la fonction $R_n(z)$, ce qui veut dire que les fonctions $R_n(z)$ n'ont pas de pôles multiples; il suffit pour arriver à ce résultat de transformer la relation $z = R(z)$ par une transformation homographique préalable, laissant invariante l'origine, et rejetant à l'infini un point distinct des antécédents des points critiques des $R_n(z)$, ces derniers points ayant naturellement un caractère invariant. Ces points critiques c s'obtiennent alors tous en cherchant les racines finies z de l'équation $R'_n(z) = 0$ et posant $c = R_n(z)$. L'équation

$$z = \eta\left(\frac{u}{S^n}\right)$$

donne alors une valeur finie pour u . On a ensuite

$$S^n \eta'(u) = R'_n(z) \eta'\left(\frac{u}{S^n}\right).$$

Comme $R'_n(z)$ est nul et que $\eta'\left(\frac{u}{S^n}\right)$ n'est pas infini [puisque $\eta\left(\frac{u}{S^n}\right) = z$ n'est pas infini], on a

$$\begin{aligned} \eta'(u) &= 0, \\ c = R_n(z) &= \eta(u), \end{aligned}$$

ce qui montre que c est un point critique algébrique de la fonction inverse de $\eta(u)$.

S'il y a un point exceptionnel, nous supposons ce point rejeté à l'infini, de manière que $R(z)$ soit un polynôme et $\eta(u)$ une fonction entière. Les points critiques à distance finie des fonctions $R_n(z)$ sont encore des points critiques algébriques de la fonction $u(z)$; le point à l'infini, qui est un point critique pour toutes les fonctions $R_n(z)$, est un point critique transcendant de la fonction $u(z)$.

71. Nous allons montrer maintenant que les points critiques transcendants de $u(z)$ sont tous des points limites des points c , c'est-à-dire qu'ils appartiennent à l'ensemble dérivé E_c des conséquents des points critiques de $R_n(z)$. Nous devons rappeler que nous considérons comme appartenant à E_c les points où se trouvent confondus une infinité de conséquents d'un même point, c'est-

à-dire les points d'un cycle qui sont les conséquents d'un point critique. Aussi peut-il arriver qu'un point critique transcendant ne soit pas point limite de points critiques algébriques, par exemple quand $R(z)$ étant un polynome, le domaine du point à l'infini ne contient pas d'autre point critique de $R_{-1}(z)$ que ce point lui-même, qui est alors un point critique transcendant de la fonction inverse de la fonction entière $\theta(u)$, sans être point limite de points critiques algébriques.

Ces remarques faites, démontrons que la proposition que nous venons d'énoncer. Soient z' un point quelconque du plan des z qui ne soit pas un point exceptionnel, u' une racine de l'équation $\theta(u) = z'$, de sorte qu'il y ait un élément de fonction analytique $u(z)$, prenant en z' la valeur u' et holomorphe quand z décrit un cercle γ de centre z' auquel correspond un domaine élémentaire δ entourant u' ; les domaines $\frac{1}{S_n}(\delta)$ tendent uniformément vers l'origine et sont tous pour $n > p$ intérieurs à un cercle de centre O et de rayon r' aussi petit qu'on le veut; les domaines correspondants dans le plan des z , qui sont des antécédents de γ , tendent également vers l'origine et sont tous pour $n > p$ intérieurs au cercle de rayon r considéré au début de ce paragraphe. Soit maintenant z'' un autre point du plan des z , et supposons qu'on puisse joindre $z' z''$ par une ligne n'ayant aucun point commun avec l'ensemble $E_c + E'_c$; il existe un domaine Γ renfermant cette ligne et comprenant le cercle γ dans lequel les fonctions $R_{-n}(z)$ sont uniformes et forment une famille normale; il existe, d'autre part, comme on vient de le démontrer, une certaine suite de fonctions $R_{-n}(z)$ qui converge uniformément vers la constante zéro, dans γ ; cette suite converge donc uniformément vers zéro dans tout le domaine Γ . Il y a donc un domaine antécédent de Γ , soit Γ_{-n} qui est entièrement contenu dans le cercle $|z| \leq r$; à ce domaine Γ_{-n} l'élément de fonction $u = \Phi(z)$, holomorphe et nulle à l'origine, fait correspondre un domaine voisin de l'origine $\frac{1}{S_n}(\Delta)$ et qui comprend le domaine $\frac{1}{S_n}(\delta)$; quand z décrit Γ_{-n} , $Z = R_n(z)$ décrit Γ de manière que z est une fonction analytique de Z quand Z est dans ce dernier domaine; en posant $U = S^n u$, U décrit Δ quand u décrit $\frac{1}{S_n}(\Delta)$; donc, quand Z décrit Γ , U est une fonction analy-

tique de Z qui décrit Δ , et cette fonction coïncide quand z est dans γ avec l'élément de fonction analytique inverse de $\eta(u)$ prenant en z' la valeur u' . On voit donc que le prolongement analytique de cet élément peut se faire le long d'une ligne quelconque ne renfermant aucun point de $E_c + E'_c$. Si cette ligne renferme des points de E_c n'appartenant pas à E'_c , on sera ramené au premier cas en considérant une antécédente de cette ligne sur laquelle le prolongement pourra se faire par le même procédé; sur la ligne initiale, le prolongement pourra se faire au moyen d'éléments algébriques n'introduisant que des points critiques algébriques. Donc, les seuls points critiques transcendants possibles sont les points de E'_c . Mais la réciproque n'a pas lieu. Je vais montrer que certains points de E'_c peuvent être des points ordinaires de $u(z)$.

Comme l'a montré M. Hurwitz, il faut pour qu'un point z soit un point critique transcendant de l'inverse d'une fonction méromorphe $\eta(u)$ que z soit une valeur asymptotique de $\eta(u)$ sur certains chemins aboutissant au point à l'infini. Je suppose que la substitution $z_t = R(z)$ admette un point double attractif z , mais de sorte que le point double répulsif origine ne soit pas sur la frontière f de son domaine immédiat D_z . Je dis que dans ces conditions z n'est pas une valeur asymptotique. En effet, supposons que quand u décrit un chemin $\mathcal{L}$ allant de u_0 à l'infini, z décrive un chemin $\mathcal{C}$ tendant vers z , et soit $z_0 = \eta(u_0)$. On peut supposer que le chemin $\mathcal{C}$ est tout entier intérieur au domaine D_z en prenant u_0 suffisamment loin. Quand u décrit $\mathcal{L}$, le point $\frac{u}{s^p}$, p étant un entier positif, décrit le chemin $\frac{1}{s^p}(\mathcal{L})$ allant du point $\frac{s^p}{u_0}$ à l'infini; comme on a

$$\eta(u) = R_p \left[\eta \left(\frac{u}{s^p} \right) \right],$$

le point $z_{-p} = \eta \left(\frac{u}{s^p} \right)$ décrira un chemin $\mathcal{C}_{-p}$ dont tous les points resteront intérieurs soit au domaine D_z , soit à l'un de ses antécédents. Désignons par β l'une des valeurs limites de z_{-p} ; on aura

$$R_p(\beta) = z.$$

S'il y avait deux valeurs limites distinctes, il y en aurait une infinité

formant un continu, et comme il n'y a qu'un nombre fini d'antécédents de rang p de z , on voit que z_{-p} tend vers l'un de ces antécédents qui est bien déterminé. Mais comme $\eta\left(\frac{u_0}{S^p}\right)$ tend vers zéro pour p infini, et que l'origine n'est pas sur la frontière de D_z , on peut prendre p assez grand pour que le point de départ du chemin Σ_{-p} soit extérieur à D_z ; donc le chemin Σ_{-p} tout entier sera extérieur à D_z , intérieur à un domaine antécédent de D_z , et tendra vers un antécédent de z distinct de z . On peut même démontrer qu'il en est ainsi pour toute valeur positive de p . Mais ce point z_{-p} est un point critique transcendant de $u(z)$, car la réciproque du théorème de M. Hurwitz est exacte ⁽¹⁾. Or, ceci est impossible, car z est limite de conséquents de points critiques, mais z_{-p} ne l'est pas.

Prenons comme exemple la substitution (Chap. V, 36)

$$z_1 = \frac{1}{i\sqrt{2}}(z^2 + 1) + z.$$

Il y a deux points doubles attractifs à distance finie z et $\bar{z}$ séparés par l'axe réel qui appartient au domaine du point à l'infini, et de même deux points doubles répulsifs imaginaires conjugués β et $\bar{\beta}$. Si l'on suppose $\bar{\beta}$ et z séparés par l'axe réel, on aura, en ramenant l'origine en $\bar{\beta}$, une fonction entière $\eta(u)$, pour laquelle le point $z - \bar{\beta}$ sera limite de points critiques algébriques de la fonction inverse (car dans le cas actuel les conséquents de points critiques contenus dans D_z sont distincts) et en même temps point ordinaire de cette fonction inverse.

Il découle, en outre, de la démonstration précédente que l'ensemble des points critiques transcendants est un ensemble invariant contenu dans E'_c , mais que je ne sais pas en général déterminer d'une manière précise. Dans un grand nombre de cas particuliers on peut démontrer qu'il coïncide avec l'ensemble des points doubles attractifs ou de multiplicateur $+1$.

Il est, d'autre part, très facile de voir comment les propriétés de l'ensemble $\mathcal{K}$, qui s'introduit dans l'étude de l'itération de $R(z)$, se

⁽¹⁾ F. IVERSEN, *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes* (Helsingfors, 1914, p. 6-15).

réflètent dans les propriétés de la fonction $h(u)$. Pour cette question et pour l'étude des autres propriétés de $h(u)$, nous renverrons à la Thèse de M. Valiron, et à diverses Notes de Lattès et de M. Julia. (*C. R. Acad. Sc.*, 1918-19, *passim*.)

72. Nous allons étudier maintenant les équations fonctionnelles de l'itération au voisinage d'un point double de multiplicateur égal à 1. Nous ferons précéder cette étude de quelques compléments aux résultats des nos 7 et 8 (Chap. II). Nous considérons donc une substitution de la forme

$$z_1 = z + a + \psi(z) = R(z),$$

où a est réel et positif, $\psi(z)$ pouvant avoir à l'infini un point critique isolé mais satisfaisant à l'inégalité

$$|\psi(z)| < \frac{k}{|z|},$$

et $R(z)$ ne prenant jamais deux fois la même valeur à l'extérieur d'un cercle de rayon suffisamment grand. Nous avons déjà démontré qu'on peut, étant donné un angle $\alpha > 0$, aussi petit qu'on le veut, obtenir un domaine D jouissant des propriétés suivantes : D est limité par deux demi-droites issues d'un point A de Ox , et faisant avec Ox les angles $\pi - \alpha$ et $-(\pi - \alpha)$; il s'étend à l'infini vers la droite; dans D , la fonction $R(z)$ possède les propriétés énumérées plus haut, et de plus $|\psi(z)|$ reste inférieure en module à un nombre $\varepsilon < a$, d'ailleurs arbitraire; le domaine D contient ses conséquents; $R_n(z)$ tend uniformément vers l'infini dans toute partie bornée de D et même dans les parties non bornées définies par $x \geq x_0$.

Nous allons montrer que ces propriétés subsistent dans le domaine fermé D tout entier. Si nous effectuons sur la demi-droite AL la translation définie par $z_1 = z + a$, nous obtenons une demi-droite parallèle distante de la première de la quantité $a \sin \alpha$; si de chaque point de la seconde comme centre on décrit un cercle de rayon ε , on obtient une bande de largeur 2ε dans laquelle sera comprise la transformée de AL par la substitution $z_1 = R(z)$, ε étant le module maximum de $\psi(z)$ dans D ; si nous

supposons

$$z < a \sin \alpha,$$

et par suite

$$a' = a - \frac{\varepsilon}{\sin \alpha} > 0,$$

cette ligne transformée se trouvera ainsi, par rapport à l'origine, au delà de la droite déduite de AL par la translation a' parallèle à l'axe réel; pour que cette inégalité soit vérifiée, puisque

$$|\psi(z)| < \frac{k}{|z|},$$

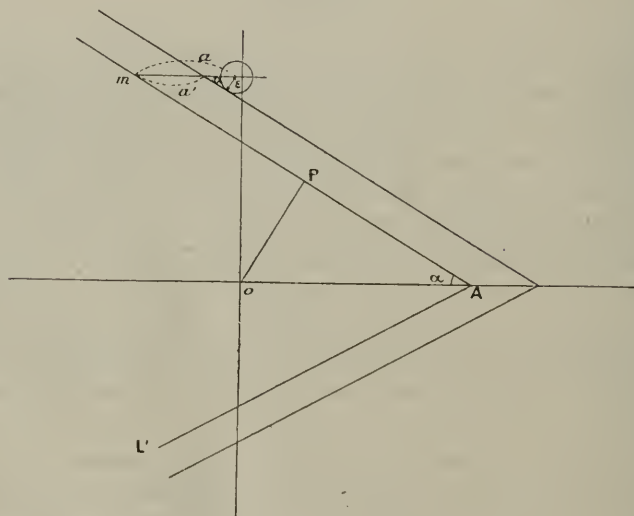
$$|z| > \frac{k}{a \sin \alpha},$$

c'est-à-dire

$$OP > \frac{k}{a \sin \alpha},$$

OP étant la distance de l'origine à AL (fig. 8). Le même raison-

Fig. 3.



nement s'applique à la droite symétrique AL'. Par conséquent, le domaine D_1 , conséquent de D, sera intérieur au domaine déduit de D par la translation a' . En itérant la substitution, on parvient à un domaine D_n intérieur à celui qu'on déduit de D par la translation na' . La plus courte distance de D_n à l'origine, c'est-à-dire le

module minimum de z_n , quand z est un point arbitraire du domaine fermé D, sera donc supérieure à

$$\frac{na'}{\sin z} + OP.$$

On aura ainsi uniformément dans D

$$|z_n| > Cn, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous devons maintenant démontrer que l'expression asymptotique obtenue pour la fonction $F(z)$ qui vérifie l'équation fonctionnelle d'Abel est encore exacte dans le domaine D ainsi défini, autrement dit qu'on aura toujours

$$F(z) = z + o(\mathcal{L}|z|).$$

Si nous nous reportons à la démonstration du n° 9 (Chap. II), nous voyons qu'elle sera encore valable pourvu d'une part que $|z_n| > Cn$, ce que nous venons de vérifier; en second lieu, nous avons admis que $|z_n|$ va en croissant avec n ; mais il suffit, pour que la conclusion subsiste, qu'on ait constamment pour $p > 0$:

$$\left| \frac{z_p}{z} \right| - q = 0.$$

Établissons cette propriété qui est déjà démontrée quand z est dans la partie de D définie par $x \leq x_0$. Elle est, d'autre part, évidemment exacte dans tout domaine borné faisant partie de D. Il suffit de l'établir pour les points du domaine LQRST couvert de hachures sur la figure 4, la droite ORS faisant l'angle z avec OX. On a évidemment

$$\left| \frac{z_p}{z} \right| = \left| \frac{y_p}{y} \right|.$$

L'argument ω de z restant compris entre z et $\pi - z$ dans le domaine considéré, on a

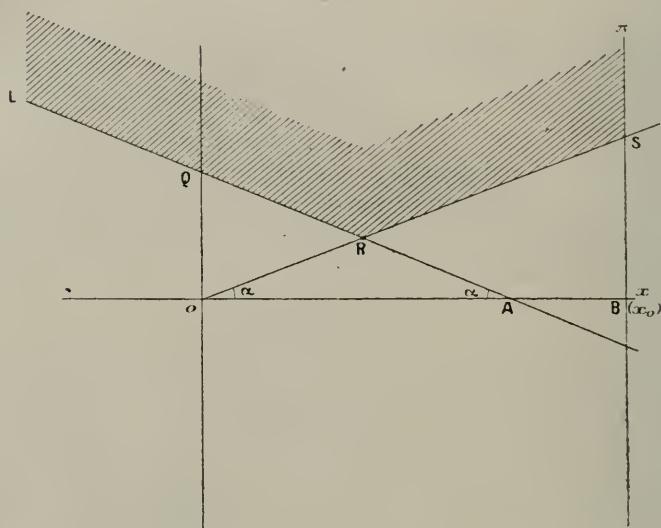
$$\frac{1}{|z|} = \left| \frac{\sin \omega}{y} \right| \leq \left| \frac{\sin z}{y} \right|.$$

Par suite,

$$\left| \frac{z_p}{z} \right| > \left| \frac{y_p}{y} \right| \sin z.$$

Il suffit donc de montrer que $\left| \frac{y_p}{y} \right|$ a une borne inférieure non nulle ; on pourra, d'autre part, ne donner à p que des valeurs

Fig. 4.



pour lesquelles la partie réelle de z_p est inférieure à x_0 , puisque ensuite les $|z_p|$ vont en croissant avec l'indice. Ceci posé, on a

$$\begin{aligned} z_n &= z_{n-1} + a + \psi(z_{n-1}), \\ z_p &= z + pa + \sum_0^{p-1} \psi(z_n), \\ |y_p - y| &< \sum_0^{p-1} |\psi(z_n)|. \end{aligned}$$

En vertu des inégalités

$$|\psi(z)| < \frac{k}{|z|}, \quad |z_n| > Cn, \quad |z| > C',$$

on déduit de ce qui précède

$$|y_p - y| < K \mathfrak{L} p.$$

On peut donc écrire

$$\frac{y_p}{y} = \frac{y \pm \theta K \mathfrak{L} p}{y},$$

η étant compris entre 0 et 1. On doit donner à p des valeurs telles que x_p ne dépasse pas la valeur x_0 . Or, on déduit de suite des inégalités écrites plus haut la suivante :

$$x_p = x + Bp \quad (B > 0),$$

en valeur algébrique. On pourra donc supposer

$$\begin{aligned} x + Bp &< x_0, \\ p &< \frac{x_0 - x}{B} + 1. \end{aligned}$$

Comme l'argument de z dans le domaine envisagé varie entre α et $\pi - \alpha$, on a

$$|x| < \frac{|y|}{\tan \alpha},$$

d'où

$$p < \frac{x_0 + \frac{|y|}{\tan \alpha}}{B} + 1,$$

ou plus simplement

$$h = M|y| + N,$$

M, N constantes positives.

D'où finalement

$$\frac{y_p}{y} = 1 \pm \frac{\theta K \mathcal{L} p}{y} = 1 \pm \frac{\theta' K \mathcal{L} (M|y| + N)}{|y|} \quad (\theta' < 1).$$

La quantité $\frac{K \mathcal{L} (M|y| + N)}{|y|}$ tend vers zéro pour $|y|$ infini et peut être supposée constamment inférieure à $\frac{1}{2}$; en faisant cette hypothèse, on néglige une partie du domaine LQRST dont les ordonnées sont bornées, qui par suite est elle-même bornée et pour laquelle la proposition n'a pas besoin d'être démontrée. Dans la partie restante, on aura

$$\left| \frac{y_p}{y} \right| > \frac{1}{2}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

L'analyse des nos 7 et 8 reste donc applicable dans les conditions actuelles. La fonction d'Abel $F(z)$ fait la représentation conforme de D sur une aire illimitée Δ du plan des Z , limitée par deux courbes analytiques qui s'étendent à l'infini de sorte que l'argument

limite de Z ait, en vertu de la relation

$$Z = z + o(\mathfrak{L}|z|),$$

la même valeur que l'argument correspondant du plan des z , c'est-à-dire $\pm(\pi - z)$. On a de plus, pour z infiniment grand,

$$\lim F'(z) = \lim \frac{dZ}{dz} = 1.$$

Les courbes qui limitent Δ ont donc les directions asymptotiques $\pm(\pi - z)$. Elles ne sont rencontrées qu'en un nombre fini de points par une droite faisant l'angle $(\pi - z')$, ou $-(\pi - z')$ avec OX , si $z' > z$. On voit donc que Δ renferme des domaines analogues à D , l'angle z étant remplacé par l'angle $2z$, pour fixer les idées. On aura d'ailleurs inversement

$$z = Z + o(\mathfrak{L}|Z|).$$

Ceci posé, quelle sera la solution générale de l'équation fonctionnelle d'Abel, en se bornant aux fonctions analytiques et uniformes dans D ? Si on l'exprime en fonction de la variable Z , on devra avoir, en appelant $\Phi(Z)$ cette solution

$$\Phi(Z + a) = a + \Phi(Z),$$

puisque remplacer z par $R(z)$ revient à remplacer Z par $Z + a$. La fonction $\Phi(Z) - Z$ a donc la période a : comme elle est holomorphe dans Δ qui comprend des bandes de largeur a parallèles à l'axe des Y et illimitées vers le haut et vers le bas, c'est nécessairement une fonction périodique entière :

$$\Phi(Z) - Z = \Omega(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{\frac{2n\pi}{a}Z} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{|A_N|} = 0 \right),$$

$$\Phi(Z) = Z + \Omega(Z).$$

En remplaçant dans cette expression Z par $F(z)$, on a l'expression générale des solutions cherchées.

Par quoi se distingue la fonction $F(z)$ parmi l'ensemble de ces solutions? Peut-être par la condition de ne prendre qu'une fois une valeur donnée dans D . Pour en être certain, il faudrait prouver que si $\Omega(Z)$ est une fonction périodique entière, la fonction

$Z + \Omega(Z)$ prend plusieurs fois certaines valeurs dans un domaine tel que Δ , à moins que Ω ne se réduise à une constante. La chose est probable, mais non démontrée.

Dans tous les cas, $F(z)$ est déterminée à une constante additive près par la condition que $F'(z)$ tend vers l'unité quand z tend vers l'infini suivant les chemins intérieurs à D sur lesquels l'argument de z tend vers zéro. En effet, posons

$$G(z) = \Phi(Z).$$

Nous aurons

$$G'(z) = \Phi'(Z) F'(z).$$

$G'(z)$ et $F'(z)$ tendant vers l'unité, il en est de même de $\Phi'(Z) = 1 + \Omega'(Z)$. $\Omega'(Z)$ tend donc vers zéro. On peut supposer que Z décrit la partie positive de l'axe réel, car cela revient à faire décrire à z un chemin de l'espèce indiquée; si Ω n'est pas une constante, $\Omega'(Z)$ reprend périodiquement les mêmes valeurs et ne tend vers aucune limite. Il y a donc contradiction.

Remarquons que $\Omega[F(z)]$ est l'expression générale des fonctions analytiques dans D et invariantes par la substitution $z_1 = R(z)$.

73. Lorsque le point double de multiplicateur $+1$ est à distance finie, il suffit de faire l'inversion $\left(t = \frac{1}{z-z}\right)$ pour pouvoir appliquer les résultats qui précèdent; le domaine D est alors remplacé par un domaine limité par deux arcs de cercle et présente au point double un angle $2\pi = 2\alpha$, qui peut être aussi voisin que l'on veut de 2π ; les domaines de convergence uniforme que nous avons désigné par Δ au n° 10 peuvent donc être remplacés par d'autres d'amplitude angulaire plus grande. On peut même démontrer qu'il y en a dont l'amplitude angulaire est égale à 2π . Dans le cas où l'on a $R''(z) = 0, \dots, R^{(q)}(z) = 0, R^{(q+1)}(z) \neq 0$, c'est-à-dire une étoile à q branches, on étend les résultats obtenus, comme au Chapitre II, par l'emploi de deux transformations conformes auxiliaires, l'une régulière au point double origine, l'autre de la forme

$$z = t^{\frac{1}{q}}.$$

Nous allons encore revenir sur l'étude des fonctions dérivées $R'_n(z)$ dans le domaine D . Nous supposons que $R(z)$ est dévelop-

pable dans D en série de la forme

$$z + a + \frac{b}{z} + \dots$$

les termes qui suivent pouvant avoir des exposants fractionnaires, mais la série étant dérivable terme à terme,

$$R'(z) = 1 - \frac{b}{z^2} \dots$$

Montrons que les fonctions $R'_n(z)$ sont bornées dans leur ensemble uniformément dans D. On a en effet

$$R'_n(z) = R'(z) R'(z_1) \dots R'(z_{n-1}),$$

$$|R'(z)| < 1 + \frac{C}{|z|^h},$$

$h \geq 2$, C constante positive. $R'_n(z)$ est donc inférieure en module au produit infini

$$\prod_n \left(1 + \frac{C}{|z_n|^h} \right),$$

qui est absolument et uniformément convergent puisque $|z_n| > Kn$, et $|z| > K'$. De plus, nous avons montré que $\left| \frac{z_n}{z} \right|$ a une limite inférieure non nulle, donc que $\left| \frac{z}{z_n} \right|$ est uniformément borné dans D. Il s'ensuit que les fonctions

$$\frac{R'_n(z) z^2}{R_n^2(z)} = \frac{d \frac{1}{z_n}}{d \frac{1}{z}}$$

sont bornées dans leur ensemble et uniformément dans D. On peut montrer qu'elles sont inférieures à 1 en module dans certaines parties illimitées de D. On a en effet

$$\frac{R'(z) z^2}{R^2(z)} = \frac{1 - \frac{b}{z^2} \dots}{\left(1 + \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \dots \right)^2} = 1 - \frac{2a}{z} + \frac{\lambda}{z^2},$$

λ étant borné. Si $z = \rho e^{i\omega}$ et $|\lambda| < A$, cette expression est infé-

rieure en module à

$$\left| 1 - \frac{2a}{\rho e^{i\omega}} \right| + \frac{A}{\rho^2} = \sqrt{1 - \frac{4a}{\rho} \cos \omega + \frac{4a^2}{\rho^2}} + \frac{A}{\rho^2},$$

ce qui est plus petit qu'une expression de la forme

$$1 - \frac{2a}{\rho} \cos \omega + \frac{B}{\rho^2}.$$

Si ω reste compris entre $+\rho$ et $-\rho$, ρ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, ceci est inférieur à

$$1 - \frac{2a}{\rho} \cos \rho + \frac{B}{\rho^2},$$

et a étant positif, cette expression demeure inférieure à l'unité pour $\rho > \rho'$. Si l'on mène par le point d'abscisse ρ' de l'axe réel deux demi-droites d'argument $\pm \rho$, on limite ainsi un domaine contenu dans D, s'étendant à l'infini vers les x positifs et qui, comme on le vérifie immédiatement, contient ses conséquents. Dans ce domaine, on aura

$$\left| \prod_{p=0}^{n-1} \frac{R'(\varepsilon_p) \varepsilon_p^2}{R^2(\varepsilon_p)} \right| = \left| \frac{R'_n(\varepsilon) \varepsilon^2}{R_n^2(\varepsilon)} \right| < 1.$$

Supposons maintenant que ε reste dans un domaine borné intérieur à D. On aura alors, puisque $|\varepsilon|$ est borné et $|\varepsilon_n| \geq kn$,

$$\left| \frac{R'_n(\varepsilon) \varepsilon^2}{R_n^2(\varepsilon)} \right| < \frac{M}{n^2},$$

ce qui est le terme général d'une série convergente. Nous allons voir dans un instant quelles sont les conséquences géométriques de ces résultats. Mais nous devons d'abord les étendre au cas où le point double donne lieu à une étoile à q branches, c'est-à-dire où l'on a

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + \frac{a}{\varepsilon^{q-1}} + \dots,$$

le second membre étant ordonné suivant les puissances descendantes entières de q . Si l'on fait d'abord une transformation conforme et régulière à l'infini, les quotients différentiels

$\frac{d\frac{1}{z_n}}{d\frac{1}{z}}$ et $\frac{d\frac{1}{w_n}}{d\frac{1}{w}}$, w étant la nouvelle variable, diffèrent par un facteur qui est infiniment voisin de 1 quand les w, w_n, z, z_n sont infiniment grands. Posons ensuite

$$w = t^{\frac{1}{q}},$$

$$w_n = t_n^{\frac{1}{q}}.$$

Il vient

$$\frac{d\frac{1}{w_n}}{d\frac{1}{w}} = \frac{d\frac{1}{t_n}}{d\frac{1}{t}} \left(\frac{t_n}{t} \right)^{1-\frac{1}{q}}.$$

Or, la relation entre t_1 et t étant maintenant de la forme

$$t_1 = t + a + \frac{b}{t} + \dots,$$

les dérivées $\frac{d\frac{1}{t_n}}{d\frac{1}{t}}$ sont bornées dans leur ensemble dans le domaine de convergence uniforme D, et dans toute partie bornée de D elles sont de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$, le quotient $\frac{t_n}{t}$ étant alors de l'ordre de n ; on a donc dans ces conditions

$$\frac{d\frac{1}{w_n}}{d\frac{1}{w}} = o\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{q}}}\right).$$

En remontant ensuite à la variable z , on voit que dans les domaines de convergence uniformes qui correspondent à D, le

quotient différentiel $\frac{d\frac{1}{z_n}}{d\frac{1}{z}}$ sera uniformément borné quel que soit n

et de l'ordre de $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{q}}}$ dans toute partie bornée de ces domaines.

Si le point double est à distance finie, on a alors le résultat géométrique suivant : *soit D un domaine élémentaire de convergence uniforme relatif aux conséquents d'un point; si AB est un arc de courbe de longueur finie contenue dans ce domaine*

et ne contenant pas le point double, la somme des longueurs des arcs conséquents forme une série convergente; en particulier, les courbes invariantes aboutissant au point double et formées d'une chaîne d'arcs conséquents $\Lambda\Lambda_1, \Lambda_1\Lambda_2, \dots$ ont une longueur finie. Si OA est un arc de longueur finie contenu dans D et terminé au point double O , les arcs conséquents de OA ont des longueurs qui tendent vers zéro; car une partie OB de OA de longueur ε a des conséquents qui sont tous de longueur inférieure à $k\varepsilon$, tandis que les conséquents de AB ont des longueurs qui finissent par devenir inférieures à ε . Ces résultats s'appliquent également à la substitution inverse, c'est-à-dire aux antécédents d'un arc dans un domaine D' analogue à D .

74. Soient $z_1 = R(z)$ une substitution rationnelle avec un point double z de multiplicateur $+1$, D_z son domaine immédiat, f la frontière de D_z ; f est l'ensemble limite des courbes antécédentes de la courbe présentant en z un point anguleux et qui limite un domaine de convergence élémentaire, en ne prenant que celles de ces courbes antécédentes qui sont intérieures à D_z , sauf aux points antécédents de z qui appartiennent à f . Il y a des cas où l'on est certain que cet ensemble limite f ne sera pas modifié si l'on supprime deux bouts de la courbe initiale terminés en z . En effet, soit λ un arc de cette courbe d'extrémité z et contenu dans un domaine de convergence élémentaire D' relatif aux antécédents d'un point, c'est-à-dire aux itérées de la fonction $R_{-1}^0(z)$, égale à z pour $z=z$. Nous savons que $R_{-1}^0(z)$ se ramifie autour de certains points critiques intérieurs à D_z ; il y a ainsi sur f des antécédents immédiats z_{-1} de z , distincts de z . Nous supposons que les fonctions $\bar{R}_{-n}(z)$ restreintes à D_z n'ont pas de points critiques autour de ces points z_{-1} . Considérons une suite d'antécédents de l'arc λ : un antécédent de rang n s'obtient en appliquant d'abord n' fois la substitution $z_{-1} = R_{-1}^0(z)$, la $(n'+1)^{\text{ème}}$ étant définie par une autre branche de $R_{-1}^0(z)$; la première série d'opérations nous fournit un arc dont la longueur reste inférieure à $k\lambda$, en désignant les longueurs des arcs par les mêmes lettres que les arcs eux-mêmes; de plus, λ_{-n} tend vers zéro si n' croît indéfiniment; la $(n+1)^{\text{ème}}$ opération nous fournit un arc terminé en un point z_{-1} , de longueur inférieure à $k'\lambda_{-n'}$ et qu'on peut supposer

intérieur à un cercle de rayon r et de centre z_{-1} où les fonctions $\bar{R}_{-n}(z)$ sont holomorphes et forment une famille normale à fonctions limites constantes et bornées (f étant supposé borné); il suffit de prendre $\lambda < \frac{r}{kk'}$; dans ce cercle, les fonctions dérivées des $\bar{R}_{-n}(z)$ sont bornées dans leur ensemble et tendent uniformément vers zéro quand l'indice d'itération croît indéfiniment; or, si n croît indéfiniment, l'un au moins des nombres n' et $n - n'$ croît indéfiniment; dans les deux cas, λ_{-n} tend vers zéro; l'ensemble limite des courbes antécédentes de la courbe considérée n'est donc pas modifiée si l'on en supprime deux bouts de part et d'autre de z ; il reste alors une courbe non fermée complètement intérieure à D_z , de manière que dans un domaine convenable contenant cette courbe les fonctions $\bar{R}_{-n}(z)$ forment une famille normale à fonctions limites constantes et que l'ensemble limite f coïncide avec l'ensemble dérivé des antécédents d'un point de la courbe; ou même d'un point arbitraire du domaine D_z , ou encore d'un point de f pourvu que ce point ne soit pas limite de points critiques des $\bar{R}_{-n}(z)$, ce qui a lieu par exemple pour les z_{-1} .

Nous voyons que, le point z étant sur f , pour pouvoir obtenir le mode de génération de la frontière qui nous a servi dans le cas d'un point double attractif, nous avons dû faire des hypothèses supplémentaires concernant la distribution des points critiques des fonctions inverses, hypothèses qui sont probablement superflues.

Remarquons que le résultat obtenu subsiste si les points z_{-1} sont critiques pour certaines fonctions $\bar{R}_{-n}(z)$, mais sans être limites de conséquents de points critiques de $\bar{R}_{-1}(z)$, de sorte que les surfaces de Riemann correspondantes ne se ramifient pas à l'infini en ces points; c'est ce qu'on voit, par exemple, en remplaçant $R(z)$ par $R_h(z)$, h étant un entier convenablement choisi.

Le résultat obtenu aux n^{os} 31-32 concernant la non-existence des tangentes à f , quand cette frontière est continue, est applicable ici moyennant les mêmes hypothèses. Si ξ est un point de E'_c situé sur f , on ne peut avoir $\xi = z_{-p} \neq z$, que s'il y a une infinité de points ξ sur f ; en effet, si z_{-p} est limite de conséquents d'un point c , z est aussi limite de conséquents de c et les c_n ont alors une infinité de points limites distincts (n^o 13); donc si les points ξ

sont en nombre fini, ils ne coïncident pas avec les z_{-p} autour desquels les fonctions $\bar{R}_{-n}(z)$ ne peuvent se ramifier indéfiniment. La discussion du n° 32 est donc applicable sans nouvelles hypothèses. La courbe frontière n'a de tangente qu'en une infinité dénombrable de points, parmi lesquels se trouvent les antécédents de z [du moins si $R''(z) \neq 0$]. Ce seront les seuls points pourvus de tangentes, si z est le seul point ξ situé sur f .

73. Considérons maintenant la fonction $F(z)$ qui vérifie l'équation fonctionnelle d'Abel et que nous avons considérée jusqu'ici dans un domaine élémentaire au voisinage de z ; cette fonction est la limite d'une suite de fractions rationnelles qui converge uniformément dans D_z . Elle est donc holomorphe dans ce domaine. Je ne peux pas affirmer d'une manière absolument générale que tous les points frontières sont des points singuliers essentiels de cette fonction; mais il en est certainement ainsi lorsque l'hypothèse faite sur les points z_{-1} est vérifiée. En effet, dans ce cas, tout point de f est limite d'antécédents de z situés eux-mêmes sur f , et même limite d'antécédents d'un domaine élémentaire de convergence δ ayant une pointe en z ; dans ce domaine δ , la fonction $F(z)$ prend des valeurs qui forment un domaine Δ décrit précédemment; Δ comprend notamment toute une région du plan des Z définie par

$$\Re(Z) \geq X_0 \quad (\Gamma z \text{ excepté}).$$

En vertu de l'équation fonctionnelle

$$F[R_p(z)] = F[R(z)] + pa,$$

la fonction $F(z)$ prendra dans le domaine δ_{-p} intérieur à D_z avec une pointe en z_{-p} , toutes les valeurs $Z = pa$, où $\Re(Z) \geq X_0$, c'est-à-dire toutes les valeurs dont la partie réelle est supérieure à $X_0 - pa$; a étant positif et des domaines δ_{-p} , p aussi grand qu'on le veut, existant dans le voisinage de tout point m de f , on voit que $F(z)$ prend toutes les valeurs, sauf l'infini au voisinage de tout point de f .

Ceci s'applique notamment aux substitutions singulières admettant un cercle fondamental et à tous les exemples que l'on sait pratiquement étudier, entre autres $R(z) = z - z^2$.

Dans les mêmes conditions, la fonction $\Omega[F(z)]$, Ω étant une fonction entière de période α , représente une fonction invariante par la substitution donnée et holomorphe dans le domaine D_z . C'est un invariant absolu du groupe G qui est proprement discontinu dans le domaine D_z et admet comme domaine fondamental, par exemple, le domaine $\delta - \delta_1$ compris entre un domaine élémentaire de convergence et son conséquent immédiat; mais ici cette fonction invariante prend nécessairement une infinité de fois la même valeur dans un domaine fondamental.

On peut former des solutions uniformes dans D_z d'autres équations fonctionnelles simples; mais il n'est pas toujours facile de prouver que tous les points frontières sont singuliers pour ces fonctions. En voici un exemple. Posons

$$R(z) = z + a + \frac{b}{z} + \dots \quad (a > 0),$$

et soit

$$\Phi(z) = \frac{1}{z^\mu} + \frac{1}{z_1^\mu} + \dots + \frac{1}{z_n^\mu} + \dots,$$

μ étant un entier ≥ 2 . Cette expression définit une fonction méromorphe dans le domaine du point double à l'infini; elle est continue dans le domaine de convergence élémentaire D , même à l'infini et cette dernière propriété la distingue des autres solutions de l'équation fonctionnelle

$$\Phi(z_1) = \Phi(z) - \frac{1}{z^\mu}.$$

Il n'y a donc pas de singularité apparente au point à l'infini pour la fonction ni pour sa dérivée :

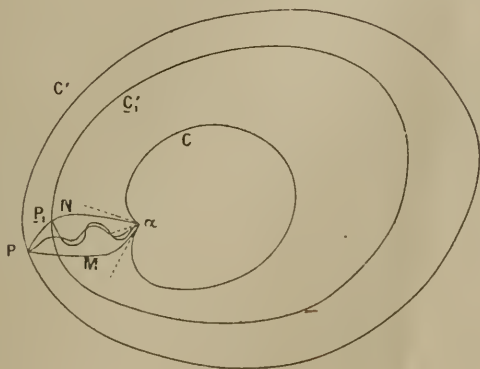
$$\Phi'(z) = -\mu \sum \frac{R'_n(z)}{z_n^{\mu+1}}.$$

Il est vraisemblable cependant que tous les points frontières sont singuliers. Il y a des cas où ce fait apparaît facilement; par exemple lorsqu'il y a un point double répulsif β sur f ; l'équation fonctionnelle montre en effet que la valeur limite de $\Phi(z)$ en ce point est infinie ou indéterminée; il en sera de même aux points antécédents de β qui, au moins dans les cas les plus simples sont denses sur f .

76. Nous allons encore, comme application de ce qui précède, compléter l'étude de cet ensemble frontière f , en montrant que

dans certains cas c'est une courbe susceptible du même mode de représentation que celui que nous avons obtenu au Chapitre III, notamment pour la substitution $Z_1 = \frac{z+z^2}{2}$. Supposons qu'il y ait outre le point double z de multiplicateur $+1$, un point double attractif β , le domaine total de chacun de ces points étant d'un seul tenant et simplement connexe. On peut alors, comme dans les cas déjà traités, enfermer f entre deux séries de courbes d'un seul tenant, antécédentes de deux courbes C et C' qui appartiennent aux domaines respectifs de z et β ; C'_{-n} est intérieure à $C'_{-(n-1)}$, C_n est extérieure à $C_{-(n-1)}$ sauf au point z qui est un point anguleux commun à toutes ces courbes. Pour pouvoir appliquer l'analyse du n° 24 il faut démontrer l'existence d'une ligne sans points doubles et invariante, terminée en z et jouant le rôle de coupure de la couronne (C, C') ⁽¹⁾. Joignons z à un point P de C par une ligne sans points doubles qui soit intérieure à cette couronne sauf en z et P ; on peut supposer que cette ligne zP ou L est tangente en z à la bissectrice de la pointe de C (fig. 5). Soit $R^{(n)}_1(z)$ la fonction

Fig. 5.



inverse égale à z pour $z = z$; les transformées de L par les itérées de cette fonction tendent vers le point z ; cela est vrai pour la partie de L suffisamment voisine de z ; c'est encore vrai pour la partie restante qui appartient à un domaine où les $R_n(z)$ sont holomorphes

(¹) Signalons ici que l'analyse présentée à la fin du n° 24 est incorrecte sur quelques points de détail; on la corrigera aisément en tenant compte de celle qui est développée ici.

et bornées dans leur ensemble, les points critiques de ces fonctions étant intérieurs à C ou extérieurs à C' ; sur ces lignes L_n l'argument de $z - z$ tend vers la limite ω , qui correspond à la bissectrice de la pointe; elles seront donc à partir d'un certain rang intérieures à un angle rectiligne Λ de sommet z et aussi petit qu'on le veut. Nous supposons donc pour faciliter l'intuition et bien que ce ne soit pas essentiel qu'on a remplacé la courbe C' par une antécédente et de même la ligne L_n de manière que L et son antécédente immédiate L_{-1} sont comprises dans un angle Λ inférieur par exemple à $\frac{\pi}{4}$; ces lignes sont tangentes entre elles en z et continues respectivement dans les couronnes (C, C') et (C, C'_{-1}) ; elles sont simples mais peuvent se traverser mutuellement; dans ce dernier cas on peut joindre z à P et à P_{-1} par deux autres lignes zMP et zNP_{-1} simples et ne se traversant pas mutuellement, comprises dans l'angle Λ et comprenant entre elles L et L_{-1} .

Ceci posé, joignons P à P_{-1} par une ligne simple intérieure à la couronne (C, C'_{-1}) et ne traversant pas zMP ; ces chemins sont de deux sortes; on en choisira un sur lequel l'argument de $z - z$ varie d'une quantité inférieure à Λ , c'est-à-dire tel que le domaine simplement connexe limité par les trois lignes zMP , zNP_{-1} et PP_{-1} ne contienne pas C . Soit δ le triangle ainsi formé à l'intérieur duquel les $R_{-n}(z)$ sont uniformes; dans ces conditions il est visible que les triangles antécédents $\delta, \delta_{-1}, \delta_{-2}, \dots, \delta_{-n}, \dots$ obtenus successivement par $z_{-1} = R_{-1}^0(z)$ ont pour côtés opposés à z les arcs $PP_{-1}, P_{-1}P_{-2}, \dots, P_{-n}P_{-(n+1)}$ formant une chaîne continue; ces arcs sont simples, ne se traversent pas mutuellement, tendent vers le point z en vertu du raisonnement fait pour les lignes L_n et constituent par leur réunion une coupure invariante de la couronne (C, C') qui est même de longueur finie et a une tangente en z .

(Ce qui précède est tout à fait intuitif, mais l'omission de certaines précautions peut conduire dans des cas analogues à des résultats erronés, par exemple dans le cas d'un point double répulsif à multiplicateur négatif; on pourra étudier par exemple ce qui se passe au voisinage du point double $z = \frac{1}{2}$ de la substitution $z_1 = 2z^2 - 1$.)

Il n'y a plus maintenant aucune difficulté pour appliquer la méthode du n° 24. On devra montrer que les longueurs des côtés

des domaines antécédents de la couronne (C, C') rendue simplement connexe par la coupure que nous venons de tracer tendent vers zéro; pour cela on décompose le domaine coupé Δ en plusieurs parties: celles qui sont contenues dans un cercle de centre z et de rayon suffisamment petit auxquelles on applique exactement le raisonnement du n° 74 et la partie restante pour laquelle la démonstration a été donnée à plusieurs reprises.

On pourra donc dans ce cas et même dans certains autres un peu plus généraux représenter la courbe f par une équation de la forme

$$z = z(t),$$

$z(t)$ étant une fonction imaginaire de la variable réelle t qui ne prend qu'une fois chaque valeur dans l'intervalle $(0, 1)$ et qui est continue. De plus, on a

$$z(d, t) = R[z(t)],$$

d étant le degré de $R(z)$. Ceci s'applique notamment à la substitution $z_1 = z - z^2$. On verra facilement que la démonstration s'applique avec des modifications insignifiantes dans le cas où il y a deux points doubles de multiplicateur $+1$.

77. Nous allons terminer cette étude en établissant certaines propriétés d'une classe de fonctions méromorphes très intéressantes qui se rattachent à l'équation fonctionnelle d'Abel et qui s'obtiennent de la même manière que la fonction de Poincaré dans le cas d'un point double répulsif.

Soient comme toujours

$$z_1 = z - \alpha + \frac{b}{z} + \dots \quad (\alpha \neq 0)$$

une substitution rationnelle avec un point double de multiplicateur $+1$ à l'infini, et

$$z_{-1} = z - \alpha - \frac{b}{z} + \dots$$

la substitution inverse à laquelle correspond, en tenant compte du changement de signe du terme constant α , un domaine élémentaire de convergence D' limité par deux demi-droites partant d'un point de l'axe réel et faisant avec Ox les angles $\pm \omega$; ω est aussi petit qu'on le veut et nous le supposerons inférieur à $\frac{\pi}{2}$; D' contient le

domaine antécédent D'_{-1} obtenu par la branche considérée ici de la fonction $R_{-1}(z)$, et dont les itérées convergent uniformément vers l'infini dans le domaine non borné D' qui comprend entre autres tous les points de l'axe réel dont l'abscisse est infinie négative; ces fonctions itérées donnent naissance à une fonction holomorphe dans D' , infinie à l'infini, et vérifiant l'équation d'Abel

$$\Phi[R_{-1}(z)] = \Phi(z) - a$$

avec les conditions asymptotiques

$$\Phi(z) = z + o(\log |z|),$$

$$\Phi'(z) = 1 + o\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Cette fonction n'est pas la même que celle déduite des itérées de $R(z)$ qui est définie dans D . $\Phi(z) = u$ ne prend qu'une fois chaque valeur dans D' et fait la représentation conforme de D' sur un domaine Δ' du plan des u , limité par deux courbes analytiques s'étendant à l'infini et ayant respectivement les directions asymptotiques $+\omega$ et $-\omega$; Δ' comprend donc tous les points du plan des u dont l'abscisse est négative et infiniment grande, et plus généralement tous les points dont l'argument est compris entre $\omega + \varepsilon$ et $2\pi - \omega - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) et le module supérieur à φ ; Δ' comprend notamment toute la région du plan définie par l'inégalité $\Re(u) < N$, au moins pour N négatif et suffisamment grand en valeur absolue.

Dans Δ' , z est inversement une fonction uniforme de u qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\theta(u - a) = R_{-1}[\theta(u)]$$

ou

$$\theta(u + a) = R[\theta(u)],$$

pourvu que u et $u + a$ appartiennent tous deux à Δ' . Mais cette équation fonctionnelle elle-même donne immédiatement le prolongement analytique de $\theta(u)$ dans tout le plan sous forme d'une fonction méromorphe. En effet, $\theta(u)$, étant bien définie et holomorphe pour $\Re(u) < N$, sera définie par l'équation fonctionnelle et méromorphe pour $\Re(u) < N + a$, et de même en général pour $\Re(u) < N + pa$, quel que soit l'entier positif p . Elle est donc méromorphe dans tout le plan, tandis que la fonction inverse $z(z)$ qui

existe dans tout le plan des z présente naturellement des points critiques (algébriques et transcendants). On voit que tout se passe ici exactement comme dans le cas d'un point double répulsif, l'équation d'Abel remplaçant celle de Schröder. Remarquons à ce propos que ces deux équations fonctionnelles, celle de Schröder et celle d'Abel, sont identiques au fond puisqu'on passe de l'une à l'autre en prenant les logarithmes des deux membres; mais quand on les étudie au point de vue de l'uniformité des solutions, il y a lieu de ne pas les confondre.

Ainsi donc, lorsqu'une substitution rationnelle présente un point double de multiplicateur $+1$, l'itération de cette substitution est susceptible d'une représentation paramétrique

$$\begin{aligned} z &= \theta(u), \\ z_n &= \theta(u - na), \end{aligned}$$

θ étant une fonction méromorphe qui, dans un domaine comprenant tout le plan sauf un secteur d'angle aussi petit qu'on le veut, est représentable par une expression de la forme

$$u + o(\log |u|),$$

pour les grandes valeurs de u . Cela résulte de ce que nous avons dit sur la structure du domaine Δ' , et du fait que la formule

$$u = z + o(\log |z|)$$

est réversible. Dans les mêmes conditions la dérivée $\theta'(u)$ est infiniment voisine de l'unité.

78. Nous allons obtenir d'autres propriétés de ces fonctions en étudiant la correspondance entre le plan des z et le plan des u tout entiers. Remarquons d'abord que les deux domaines D et D' du plan des z , limités par des demi-droites faisant les angles $\pm \omega$ et $\pm (\pi - \omega)$ avec Ox ($\omega < \frac{\pi}{2}$), ont en commun deux domaines non bornés comprenant tous les points dont l'argument est compris entre ω et $\pi - \omega$, ou entre $-\omega$ et $-(\pi - \omega)$, et le module suffisamment grand. Considérons dans Δ' un rectangle de hauteur infinie limité par deux parallèles à l'axe des Y distantes de a , et un segment d'ordonnée H parallèle à l'axe des X , H étant positif et

très grand. Il lui correspond dans D' un domaine limité par deux courbes s'étendant à l'infini dans le demi-plan supérieur avec Ox comme direction asymptotique, et par un arc borné; si H tend vers l'infini, les points du rectangle E tendent uniformément vers l'infini et leurs arguments tendent uniformément vers zéro; il en est de même pour le domaine image du plan des z ; donc si H est suffisamment grand, ce domaine image est dans la partie commune à D et à D' .

Considérons alors le demi-plan

$$J(u) \leq H,$$

nous pouvons tracer une demi-droite faisant avec Ox un angle ω' compris entre ω et $\frac{\pi}{2}$ et qui divise ce demi-plan en deux secteurs; dans le secteur de gauche $\theta(u)$ tend vers l'infini uniformément quand u tend vers l'infini sur un chemin quelconque. Je dis qu'il en est de même dans le secteur de droite; en effet, on peut le diviser par une suite infinie d'ordonnées distantes de a en trapèzes qui se déduisent par les translations

$$u_n = u + na$$

des trapèzes congruents compris dans le rectangle illimité E ; pour que u_n tende vers l'infini en restant dans ce secteur, il faut que a tende vers l'infini; les formules

$$z = \theta(u),$$

$$z_n = R_n(z) = \theta(u + na)$$

montrent alors que $\theta(u + na)$ tend vers l'infini uniformément, car u étant dans E , z est dans D et nous savons que $R_n(z)$ converge uniformément vers l'infini dans D . Le même résultat s'obtient pour le demi-plan

$$J(u) \geq H.$$

En outre, on aura

$$R'_n(z) \theta'(u) = \theta'(u + na).$$

Nous savons que, dans Δ' , $\theta'(u)$ tend uniformément vers la valeur 1 à l'infini; en outre, dans D les $R'_n(z)$ sont bornées dans leur ensemble; donc dans les demi-plans $J(u) \leq H$ ou $J(u) \geq H$, la fonction $\theta'(u)$ est bornée à l'infini.

On a donc l'énoncé suivant : *Il existe une bande de largeur*

finie parallèle à l'axe réel, telle que dans les parties du plan extérieures à cette bande, $h(u)$ tend uniformément vers l'infini et $h'(u)$ reste uniformément bornée pour les valeurs infiniment grandes de u .

On peut évidemment n'enlever du plan que la moitié de cette bande s'étendant à l'infini vers les x positifs et l'énoncé qui précède est valable dans le domaine d'un seul tenant ainsi obtenu.

79. Soit maintenant z_0 un point du plan des z : l'équation $h(u) = z_0$ a une infinité de racines sauf au plus pour deux valeurs de z_0 . Si z_0 n'est pas un point exceptionnel, au sens du n° 5, c'est-à-dire s'il a une infinité d'antécédents distincts, il y a au moins un de ces antécédents z_{-p} pour lequel l'équation

$$z_{-p} = h(u)$$

admet une infinité de racines; soit u' l'une d'elles, on aura

$$z_0 = R_p(z_{-p}) = R_p[h(u')] = h(u' + pa).$$

L'équation $z_0 = h(u)$ a donc une infinité de racines. Si z_0 n'a qu'un nombre fini d'antécédents distincts, ces antécédents sont tous confondus avec z_0 lui-même; un tel point z_0 est unique, le cas où il y en aurait deux ne peut pas se présenter ici, la substitution ayant un point double de multiplicateur $+1$; on a alors

$$Z = \frac{1}{z - z_0},$$

$$P(Z) = \frac{1}{R(z) - z_0},$$

$P(Z)$ étant un polynôme, et généralement :

$$P_n(Z) = \frac{1}{R_n(z) - z_0}.$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{h(u) - z_0} = \varphi(u),$$

il vient

$$Z = \varphi(u),$$

$$P(Z) = \varphi(u + a),$$

$\varphi(u)$ est alors une fonction entière, car étant holomorphe pour

$\Re(u) \leq X$, l'équation fonctionnelle

$$\varphi(u+a) = P[\varphi(u)]$$

montre qu'elle est holomorphe dans tout le plan. Ainsi, sauf dans le cas où la substitution se ramène à la forme polynomiale par une transformation homographique, la fonction $\theta(u)$ n'a pas de valeurs exceptionnelles.

Considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ des points du plan des Z où les fonctions $R_n(z)$ ne forment pas une suite normale; cet ensemble parfait n'est nulle part dense superficiellement, car il y a des régions où les $R_n(z)$ convergent uniformément vers le point double à l'infini. A tout point z de $\mathcal{F}$ correspondent une infinité de points u , car le point exceptionnel z_0 s'il existe n'appartient pas à $\mathcal{F}$. A l'ensemble $\mathcal{F}$ correspond ainsi un ensemble $\mathcal{Q}$ dans le plan des u ; on démontre bien facilement que $\mathcal{Q}$ est parfait; il n'y a qu'à le porter au n° 41 où la démonstration a été donnée à propos d'une représentation paramétrique analogue. $\mathcal{F}$ n'étant pas dense superficiellement, $\mathcal{Q}$ ne l'est pas non plus. Si u appartient à $\mathcal{Q}$, il en est de même de $u \pm na$; c'est la traduction du fait que $\mathcal{F}$ contient les conséquents et antécédents de tous ses points; $\mathcal{Q}$ est donc invariant par la translation $(u | u+a)$ et contient par suite le point à l'infini. Si u' appartient à $\mathcal{Q}$, la fonction $\theta(u)$ prend dans un cercle de rayon ε arbitrairement petit et de centre $u' + na$ toutes les valeurs sauf celles qui sont contenues dans un cercle de centre z_0 et de rayon quelconque r , lorsqu'il y a un point exceptionnel z_0 : cela pour toutes les valeurs de n supérieures à un entier positif convenablement choisi p . La fonction $\theta(u)$ est donc indéterminée à l'infini et prend une infinité de fois toutes les valeurs sauf une au plus dans une bande parallèle à l'axe réel, de largeur aussi petite qu'on le veut comprenant u' à son intérieur: plus précisément, dans la moitié de cette bande qui s'étend à l'infini vers la droite. Tout cela n'est que la traduction des propriétés de $\mathcal{F}$ développées au Chapitre IV. Au contraire, si u' n'appartient pas à $\mathcal{Q}$, les valeurs de $\theta(u)$, dans les cercles de centre $u' + na$ et de rayon convenablement choisi, sont bornées dans leur ensemble ou convergent uniformément vers l'infini quand n croît indéfiniment; en général les valeurs de $\theta(u)$ dans ces cercles convergent vers une valeur limite constante ou tendent périodiquement vers un nombre fini de constantes. L'ensemble $\mathcal{Q}$ est naturel-

lement compris dans la bande de largeur finie parallèle à Ox considérée plus haut.

Si $\mathcal{F}$ est partout discontinu, il en est de même de $\mathcal{Q}$; on peut en effet entourer un point z' de $\mathcal{F}$ d'une courbe simple formée d'ares de cercle ne contenant aucun point de $\mathcal{F}$, et aussi voisine qu'on le veut de z' ; il y a d'autre part correspondance continue entre un cercle du plan des u entourant un point-racine u' de l'équation $h(u) = z'$, et un élément d'aire du plan des z (ou un élément de surface de Riemann ramifiée en z'), de sorte qu'à la courbe entourant z' correspondra une courbe entourant u' , infiniment voisine de ce dernier point et ne contenant aucun point de $\mathcal{Q}$; $\mathcal{Q}$ est donc partout discontinu. Réciproquement, si $\mathcal{Q}$ est partout discontinu, il en est de même de $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ est continu, il en est de même de $\mathcal{Q}$: supposons qu'il en soit autrement et soit alors u' un point de $\mathcal{Q}$ qui n'est pas bien enchaîné dans $\mathcal{Q}$ avec le point à l'infini; l'ensemble $\mathcal{Q}'$ des points de $\mathcal{Q}$ qui sont bien enchaînés avec u' est un ensemble parfait bien enchaîné, à moins qu'il ne se réduise au seul point u' ; $\mathcal{Q}'$ ne contient pas le point à l'infini, il est donc borné; tout ensemble contenant $\mathcal{Q}'$ et contenu dans $\mathcal{Q}$ est discontinu; l'ensemble $\mathcal{Q}''$ déduit de $\mathcal{Q}'$ par la translation — pa jouit des mêmes propriétés: on peut choisir p de manière que $\mathcal{Q}''$ soit contenu dans Δ' . On peut entourer $\mathcal{Q}''$ d'une ligne simple contenue dans Δ' , ne contenant aucun point de $\mathcal{Q}$ et dont tous les points sont aussi voisins qu'on le veut d'un point de $\mathcal{Q}''$ ⁽¹⁾. A cette courbe, il correspondra dans le plan des z une courbe tout entière à distance finie, ne contenant aucun point de $\mathcal{F}$, mais limitant un domaine qui contient des points de $\mathcal{F}$; ces points sont séparés du point à l'infini par une courbe ne contenant aucun point de $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ ne serait donc pas continu.

La réciproque paraît plus difficile à établir: nous la laisserons de côté.

Prenons comme exemple le cas d'une substitution à cercle fondamental singulière et de deuxième espèce, laissant invariant le

(1) ZORETTI, *Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers* (Journal de Liouville, 1905, p. 10).

MONTEL, *Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe*, Paris, Gauthier-Villars, 1910, p. 7.

demi-plan supérieur $J(z) \geq 0$; par exemple

$$z_1 = R(z) = z + 1 - \frac{1}{z}.$$

Les fonctions $R_{-n}(z)$ étant réelles pour z réel, il en est de même de la branche de fonction $u = \Phi(z)$ dans le domaine D' ; au segment $(x_0, -\infty)$ de l'axe réel contenu dans D' correspond le segment $(N_0, -\infty)$ de l'axe réel contenu dans Δ' et réciproquement; $\mathfrak{E}$ étant un ensemble parfait et discontinu situé sur l'axe réel, $\mathfrak{Q}$ est aussi partout discontinu et sa section par Δ' n'a que des points réels; donc $\mathfrak{Q}$ tout entier n'a que des points réels. La bande du plan des u dans laquelle $\theta(u)$ ne tend pas uniformément vers l'infini en même temps que u est ici une bande aussi mince qu'on le veut comprenant l'axe réel; dans cette bande $\theta(u)$ est indéterminée à l'infini vers les x positifs et prend une infinité de fois toutes les valeurs; l'indétermination n'a lieu que dans les cercles de rayon ε ayant pour centres les points de l'ensemble discontinu $\mathfrak{Q}$. Les régions d'indétermination à l'infini ont donc une densité extrêmement faible.

Si l'on prend

$$z_1 = R(z) = z + \frac{1}{z} + 2,$$

substitution qui laisse invariante le demi-axe réel négatif et le domaine extérieur à ce demi-axe, on est conduit à une fonction $\theta(u)$ pour laquelle l'ensemble parfait $\mathfrak{Q}$ se réduit à l'axe réel.

80. Examinons maintenant le cas où il y a un point exceptionnel, c'est-à-dire où la fonction $\frac{1}{\theta(u) - c}$ est une fonction entière, $\varphi'(u)$ qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\varphi(u + a) = P[\varphi(u)],$$

où P est un polynôme; $\varphi(u)$ tend alors vers une valeur finie et $\varphi'(u)$ vers zéro quand u tend vers l'infini en restant dans les domaines précédemment décrits. Je vais montrer que $\varphi(u)$ est de genre infini. Soit

$$P(z) = A z^d + A_1 z^{d-1} + \dots + A_d.$$

Pour $|\varepsilon| \leq \varphi$, on aura

$$|P(\varepsilon)| > (|A| - \varepsilon) \varphi^d,$$

ε étant aussi petit qu'on le veut pour φ suffisamment grand. On peut donc supposer $\varepsilon < \frac{|A|}{2}$ et, par suite,

$$|P(\varepsilon)| > \frac{|A|}{2} \varphi^d.$$

Le second membre est $> \varphi$ si $\varphi > \left(\frac{2}{|A|}\right)^{\frac{1}{d-1}}$, ce que nous supposons. On trouve alors, par récurrence, l'inégalité

$$|P_n(\varepsilon)| > \left(\frac{|A|}{2}\right)^{1+d+\dots+d^{n-1}} \varphi^{d^n} = \left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{d^n-1}{d-1}} \varphi^{d^n},$$

ou en posant

$$\left(\frac{|A|}{2}\right)^{\frac{1}{d-1}} = B \quad (B > 1),$$

$$|P_n(\varepsilon)| > \frac{1}{B} (B\varphi)^{d^n}.$$

Si $B = 1$, on a

$$|P_n(\varepsilon)| > (B\varphi)^{d^n};$$

Si $B < 1$, il suffit de prendre $\varphi > 1$ pour avoir

$$|P_n(\varepsilon)| > \varphi^{d^n}.$$

Dans tous les cas on a

$$|P_n(\varepsilon)| > C^{d^n} \quad (C > 1).$$

Soient $\varepsilon_0 = \varphi e^{i\theta}$ et u_0 une solution de l'équation $\eta(u) = \varepsilon_0$. On aura

$$|\varphi(u_0 + nu)| > C^{d^n}.$$

Soient r un nombre quelconque compris entre $|u_0 + nu|$ et $|u_0 + (n+1)u|$. Le module maximum de $\varphi(u)$ pour $|u| = r$ est supérieur à C^{d^n} ; d'ailleurs, n et r tendent vers l'infini en même temps et l'on a, pour n suffisamment grand,

$$n > kr \quad \left(0 < k < \frac{1}{a}\right).$$

Donc finalement :

$$\partial R(r) > C^{d^k} = e^{\log C \cdot d^k} = e^{\log C \cdot e^{k \log d} r} = e^{\log C \cdot e^{a \log r}}.$$

en posant $m = k \log d$. Pour r suffisamment grand, on aura aussi, si $0 < c < m$,

$$\mathfrak{N}(r) > e^{er} \quad (c > 0).$$

Le module maximum de $\varphi(u)$ croît donc plus vite qu'une exponentielle itérée : la fonction $\varphi(u)$ est de genre infini.

Je vais d'ailleurs montrer qu'on aura aussi

$$\mathfrak{N}(r) < e^{er}.$$

Soit u' le point de la circonférence de centre O et de rayon r où $\varphi(u)$ atteint son module maximum ; u' est situé sur l'arc compris entre les deux droites $Y = \pm A$ et qui coupe la partie positive de l'axe réel, du moins dès que r dépasse une certaine limite, car sur le reste de la circonférence $\varphi(u)$ tend uniformément vers α , affine du point double de multiplicateur $+1$ que nous avons ramené à distance finie. En effectuant sur cet arc la translation $-na$ nous obtenons un arc compris dans le rectangle :

$$\begin{aligned} 0 &\leq X \leq \alpha, \\ -\Pi &\leq Y \leq +\Pi. \end{aligned}$$

Dans ce rectangle, $\varphi(u)$ est inférieure en module à un nombre $M \geq 1$. Soit K un nombre au moins égal à

$$|A| + |A_1| + \dots + |A_{d-1}| + |A_d|,$$

et tel que $KM^d > 1$. En posant $z = \varphi(u)$, u étant un point du rectangle, on obtient :

$$\begin{aligned} |z| &< M, \\ |z_1| &< KM^d, \\ |z_2| &< K^{1+d} M^{d^2}, \\ &\dots\dots\dots \\ |z_n| &< K^{1+d+\dots+d^{n-1}} M^{d^n} < \left(K^{\frac{1}{d-1}} M \right)^{d^n} = L^{d^n}, \\ |\varphi(u')| &= |\varphi(u+na)| < L^{d^n}, \\ r = |u+na| &> na - |u'| \geq na - \sqrt{a^2 + \Pi^2}, \\ n &= k'r \quad (k' > 0). \end{aligned}$$

On obtient finalement pour $\mathfrak{N}(r)$

$$\mathfrak{N}(r) < e^{\log L \cdot d^{k'r}},$$

d'où l'on déduit

$$\mathfrak{N}(r) < e^{er}.$$

Faisons voir maintenant que $\varphi(u)$ est non seulement de genre, mais d'ordre infini. Si z_0 est un nombre fini quelconque, et u' un point

de l'ensemble parfait $\mathfrak{Q}$, il existe des points racines de l'équation $\varphi(u) = z_0$ dans un cercle de centre $u' + pa$, et de rayon arbitraire l pourvu que l'entier p soit suffisamment grand; en effet, les valeurs de $\varphi(u)$ dans ce cercle sont représentées par un domaine du plan des z qui, pour une valeur convenable de p , couvre le cercle $\Gamma(|z| \leq \rho)$. Nous supposons ρ assez grand pour que $\rho > |z_0|$ et que d'autre part l'inégalité $|z| \geq \rho$ entraîne $|P(z)| > |z|$.

Dans le cercle de centre $u'' = u' + pa$ et de rayon l , la fonction $\varphi(u)$ prend ainsi au moins une fois la valeur z_0 . Dans le cercle de centre $u'' + a$ et de même rayon, elle prend au moins d fois la valeur z_0 ; car lorsque $z = \varphi(u)$ décrit Γ , $R(z)$ décrit un domaine multiple qui couvre d fois Γ ; de même $R_2(z)$ prend d^2 fois, $R_n(z)$ d^n fois chaque valeur de Γ ; $\varphi(u + na)$ prend ainsi $(1 + d + d_2 + \dots + d^n)$ fois la valeur z_0 dans un cercle de rayon r tel que

$$r < |u''| + na + l, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n} = a.$$

On a donc $n > kr$ pour r suffisamment grand et le nombre $N(r)$ de racines de l'équation $\eta(u) = z_0$ dont le module est inférieur à r vérifie l'inégalité

$$N(r) \geq 1 + d + \dots + d^n > d^n > d^{kr} = e^{(k \log d)r}.$$

De plus, la série $\sum_p \frac{1}{r_p^\lambda}$ étendue à ces racines est divergente quel que soit λ . Nous avons en effet d^n racines dans le cercle de centre $u'' + na$ et de rayon l , racines dont le module est inférieur à $\frac{n}{k}$ et qui donne dans la série précédente une contribution supérieure à $\left(\frac{k}{n}\right)^\lambda d^n$, quantité infinie en même temps que n .

Revenons au cas d'une fonction méromorphe sans valeurs exceptionnelles. Dans ce cas, les valeurs de cette fonction $\eta(u)$ dans la suite des cercles considérés plus haut couvrent une fois, d fois, ..., d^n fois, ... le plan des z tout entier; le même raisonnement s'applique et la série $\sum \frac{1}{r^\lambda}$, étendue aux modules des zéros ou des pôles de la fonction $\eta(u) - z_0$ est divergente quel que soit λ . Cette fonction est le quotient de deux fonctions entières qui sont toutes deux d'ordre infini ⁽¹⁾.

(1) Nous nous sommes placés dans le cas où $R''(z)$ n'est pas nul au point

81. Telles sont les propriétés les plus importantes de ces fonctions méromorphes. Nous pourrions également rechercher les points critiques des fonctions inverses; cela se fait exactement de la même manière que dans le cas de la fonction de Poincaré et il n'y a pas lieu d'y insister.

Remarquons que lorsqu'on recherche quelles propriétés de la fonction de Poincaré, vérifiant l'équation fonctionnelle $\theta(Su) = R[\theta(u)]$ où $S > 1$, correspondent à celles de l'ensemble parfait $\mathcal{F}$, on est conduit à des résultats qui, dans ce qu'ils ont d'essentiel, appartiennent à toutes les fonctions méromorphes ou entières ainsi que l'a montré M. Julia dans des recherches récentes. Les fonctions que nous venons d'étudier présentent au contraire des propriétés singulières; si l'on ramène en effet le point singulier à distance finie par le changement de la variable $w = \frac{1}{u}$, on obtient une fonction pour laquelle l'indétermination en ce point n'existe que suivant les chemins compris entre deux arcs de cercle tangents entre eux au point singulier et terminés en ce point. Des fonctions de ce genre ne seraient peut-être pas faciles à obtenir par les procédés généralement utilisés pour construire des fonctions méromorphes ou entières ayant des propriétés spéciales.

Il nous resterait à étudier les courbes analytiques invariantes par une transformation rationnelle et dont l'étude est intimement liée à celle des fonctions étudiées dans ce Chapitre. Nous espérons y revenir bientôt. Si incomplète que soit cette étude des transcendentes uniformes définies par des équations fonctionnelles itératives, nous pensons qu'elle suffit à montrer l'intérêt qui s'y attache; certaines de ces fonctions jouissant de propriétés simples et présentant des singularités d'une nature différente de celles rencontrées jusqu'ici mériteraient, semble-t-il, de prendre une place importante en Analyse, à côté des fonctions elliptiques et automorphes avec lesquelles elles ont d'ailleurs une parenté évidente.

double $z[R'(z) = +1]$. Si $R''(z) = 0$, on est ramené au premier cas par l'emploi des deux représentations conformes auxiliaires utilisées précédemment. On verra facilement que rien d'essentiel n'est changé aux résultats.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XLVIII.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*, nouvelle édition, 1916.)

	Pages.
[D2b] Appell (P.). — Sur les développements en séries suivant les inverses de polynomes donnés.....	1
[Q1aβ] Cartan (E.). — Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien (<i>suite</i>).....	132
[I5] Du Pasquier (L.-G.). — Sur la théorie des nombres hypercomplexes à coordonnées rationnelles.....	109
[H11d] Fatou (P.). — Sur les équations fonctionnelles (deuxième Mémoire).	33
[I11d] Fatou (P.). — Sur les équations fonctionnelles (troisième Mémoire).	208
[II6] Garnier (R.). — Champs vectoriels à directions asymptotiques indéterminées.....	106
[M28g] Godeaux (L.). — Sur les surfaces algébriques possédant un système simple dont les courbes contiennent une involution.....	9
[D1c] Lévy (P.). — Sur les fonctions de ligne implicites.....	13
[I10] Pétrovitch (M.). — Propriétés arithmétiques d'une classe de nombres rationnels.....	27
[D2aγ] Rémoundos (J.). — Les singularités des équations différentielles et les séries sommables.....	95

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XLVIII.

316

1

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

DE L'ANNÉE 1920.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^e,

65381 Quai des Grands-Augustins, 55.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

DE L'ANNÉE 1920.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1921

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1920 ⁽¹⁾.

	MM. ANDOYER.
	APPELL.
	DEMOULIN.
	DERUYTS.
	GOURSAT.
	HADAMARD.
	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
	HUMBERT.
Membres honoraires du Bureau....	KOENIGS.
	JORDAN.
	LECORNU.
	MITTAG-LEFFLER.
	NEUBERG.
	PAINLEVÉ.
	PICARD.
	VALLÉE POUSSIN (DE LA)
	VOLTERRA.
Président.....	MM. DRACH.
	BOULANGER.
Vice-Présidents.....	CAHEN.
	P. LÉVY.
	SERVANT.
Secrétaires.....	GALBRUN.
	MONTEL.
	THYBAUT.
Vice-Secrétaires.....	TRESSE.
Archiviste.....	FATOU.
Trésorier.....	MALUSKI.
	AURIC, 1922.
	BIOCHE, 1921.
	BOREL, 1921.
	BEICARD, 1922.
	FONTENÉ, 1921.
Membres du Conseil ⁽²⁾	FOURET, 1921.
	GRÉVY, 1923.
	LEBESGUE, 1923.
	LÉVY (A.), 1922.
	MAILLET, 1922.
	D'OCAGNE, 1923.
	VESSIOT, 1923.

⁽¹⁾ MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

⁽²⁾ La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Dans la séance du 14 janvier 1920, l'Assemblée générale de la Société mathématique de France, considérant que les relations de la Société avec ceux de ses membres qui appartiennent aux nations ennemies ont été suspendues pendant la guerre, a décidé que ces relations ne pourraient être reprises qu'à la suite d'une demande formelle des membres susvisés, demande qui serait soumise au vote du Conseil; en conséquence, les noms de ces membres ne figurent pas sur la liste ci-dessous (1) :

Date
de
l'admission.

1920. ABELIN, professeur au lycée Charlemagne, rue de Paris, 1, Versailles (Seine-et-Oise).
 1872. ACHARD, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *La Foncière*, rue de la Terrasse, 6 bis, à Paris (17°).
 1900. ADHÉMAR (vicomte Robert d'), place de Genevières, 14, à Lille (Nord).
 1920. ALBO, professeur au lycée Jules-Ferry, rue de Berne, 7, à Paris (8°).
 1919. ALMÉRAS, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, à Paris (6°).
 1896. ANDOYER, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, membre du Bureau des Longitudes, rue du Val-de-Grâce, 11, à Paris (5°).
 1894. ANDRADE, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Villars, 3, à Besançon.
 1918. ANGELESCO, professeur à l'Université de Chij (Roumanie).
 1919. ANTOINE, maître de conférences à la Faculté des Sciences, quai Zorn, 15, à Strasbourg (Bas-Rhin).
 1920. ANZENBERGER, professeur au lycée, à Besançon (Doubs).
 1879. APPELL, membre de l'Institut, recteur de l'Université de Paris, à la Sorbonne, à Paris (5°).
 1910. ARCHIBALD (C.-R.), professeur à Brown-Université, Providence, Rhode Island (États-Unis).
 1919. ARNOU, ingénieur, rue de Provence, 126, à Paris (9°).
 1920. ARVENGAS, ingénieur à la poudrerie de Sevran-Livry, rue Jadin, 14 bis, à Paris (17°).
 1920. AUBERT, professeur au lycée Henri IV, à Paris (5°).
 1900. AURIC, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue du Val-de-Grâce, 2, à Paris (5°).
 1920. AUTERBE, C^{ie} d'assurances *L'Union*, place Vendôme, à Paris (1^{re}).
 1919. BACHELIER, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Besançon (Doubs).
 1919. BAILLAUD, membre de l'Institut, directeur de l'Observatoire de Paris.
 1900. BAIRE, professeur à la Faculté des Sciences, à Dijon.
 1896. BAKER, professeur à l'Université de Toronto (Canada).
 1917. BARRAU (J.-A.), professeur à l'Université, à Groningen (Hollande).
 1905. BARRÉ, chef de bataillon du génie, docteur ès sciences mathématiques, rue Lhomond, 10, à Paris (5°).
 1918. BARRIOL (A.), directeur des Services de la comptabilité aux chemins de fer du P.-L.-M., rue Saint-Lazare, 88, à Paris (9°). S. P. (2).
 1920. BAUDET, professeur à l'Académie technique de Delft, van Bortzelaerlaan, 3, à La Haye (Hollande).
 1919. BEGUIN, professeur à l'École Navale, boulevard Gambetta, 36, à Brest (Finistère).
 1919. BÉNEZÉ, professeur au lycée, à Cahors (Lot).
 1920. BEHNHEIM, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue de Siam, 15, à Paris (16°).
 1891. BERTRAND DE FONTVOLIANT, professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, avenue de Wagram, 167, à Paris (17°). S. P.

(1) La liste qui suit donne les noms des membres de la Société à la fin de l'année 1920.

(2) Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels

Date
de
l'admission.

1910. BERTRAND (G.), astronome à l'Observatoire d'Abbadia, par Hendaye (Basses-Pyrénées).
1913. BILIMVITCH, privat-docent à l'Université de Kiew, rue Stanislas, 14, à Paris (6°).
1888. BLOCHE, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6°). S. P.
1920. BLOCH (Eug.), professeur au lycée Saint-Louis, rue Rataud, 11, à Paris (5°).
1919. BLONDEL (Ch.), professeur de philosophie à l'Université, quai des Pêcheurs, 7, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1891. BLUTEL, inspecteur général de l'Instruction publique, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14°).
1902. BOBERIL (comte Roger du), rue d'Antibes, 114, à Cannes (Alpes-Maritimes). S. P.
1907. BOITEL DE DIENVAL, ancien élève de l'École Polytechnique, au château de Valsery, à Cœuvres (Aisne). S. P.
1892. BONAPARTE (prince), membre de l'Institut, avenue d'Iéna, 10, à Paris (16°).
1920. BONCENNE, professeur au lycée Voltaire, place de la République, 4, à Levallois-Perret (Seine).
1895. BOREL (Emile), professeur à la Faculté des Sciences, rue du Bac, 32, à Paris (7°). S. P.
1913. BORTOLOTTI (E.), professeur à l'Université de Modène, via Maggiore, 18, à Bologne (Italie).
1919. BOSLER, docteur ès sciences, à l'Observatoire de Meudon (Seine).
1909. BOULAD (F.), ingénieur au service des ponts des chemins de fer de l'État égyptien, au Caire (Égypte).
1896. BOULANGER, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 30, à Paris (5°).
1913. BOULLIGAND, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Rennes (Ille-et-Vilaine).
1896. BOURGET (H.), directeur de l'Observatoire, à Marseille.
1903. BOUTIN, rue Lavieuville, 26, à Paris (18°).
1904. BOUTHOUX (P.), professeur au Collège de France, à Paris. S. P.
1920. BRANIUT, ingénieur en chef d'artillerie navale, rue Theophile-Gautier, 34, à Paris (16°).
1911. BRATU, professeur à l'Université stradela Golici, 8, à Jassy (Roumanie).
1897. BRICARD, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 108, à Paris (14°).
1919. BRILLOVIN (M.), professeur au Collège de France, boulevard Port-Royal, 31, à Paris (13°).
1920. BRILLOUIN (Léon), agrégé de Physique, rue Boissonnade, 16, à Paris (16°).
1919. BRICE, président de la Chambre syndicale des constructeurs en ciment armé, place Paul-Verlaine, 3, à Paris (13°).
1873. BROCARD, lieutenant-colonel du génie territorial, rue des Ducs-de-Bar, 75, à Bar-le-Duc. S. P.
1920. BROGLIE (de), square de Messine, 9, à Paris (8°).
1912. BROWNE, Grange Mockler, à Carriek-on-Suir (comté de Tipperary, Irlande).
1920. BRUNSWICG, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Lettres, rue Schaeffer, 53, à Paris (16°).
1901. BUII, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Coffres, 11, à Toulouse.
1894. CANEN (E.), rue Cortambert, 46, à Paris (16°).
1920. CANEN (Armand), professeur au lycée Charlemagne, rue Legendre, 151, à Paris (17°).
1920. CAMBEFORT, professeur au lycée, rue de Liège, 42, à Pau (Basses-Pyrénées).

Date
de
l'admission.

1917. CANDEZE, lieutenant-colonel, place du Square, 13, à Aurillac (Cantal).
 1885. CARON, chef honoraire des travaux graphiques à la Sorbonne, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5°).
 1892. CARONNET, docteur ès sciences mathématiques, avenue Niel, 15, à Paris (17°).
 1919. CARPENIER, membre de l'Institut, rue Guynemer, 34, à Paris (6°).
 1919. CARRUS, professeur à la Faculté des Sciences, rue Michelet, 66, à Alger.
 1896. CARTAN, professeur à la Faculté des Sciences, avenue de Montespan, 4, au Chesnay (Seine-et-Oise).
 1887. CARVALLO, directeur des études à l'École Polytechnique, rue Descartes, 21, à Paris (5°). S. P.
 1919. CASABOVNE, professeur au lycée Henry IV, rue Censier, 26, à Paris (5°).
 1920. CAUSSE, professeur au lycée, rue Saint-Antoine, 12, à Toulouse (Haute-Garonne).
 1890. CEDERCREUTZ (baronne Nanny), Unionsgatan, 4, à Helsingfors (Finlande).
 1919. CERF, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue du Nord, à Dijon (Côte-d'Or).
 1911. CHLORY, professeur au lycée Carnot, 38, rue de Vaugirard, à Paris (6°).
 1919. CHANDON (M^{me}), aide-astronome à l'Observatoire, avenue de l'Observatoire, à Paris (14°).
 1919. CHEPELON, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lille, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Morland, 2, à Paris (4°).
 1919. CHARBOIXIER, ingénieur-général d'artillerie navale, avenue Octave-Gréard, 3, à Paris (7°).
 1920. CHARPY, membre de l'Institut, place de la Poterie, 13, à Montluçon (Allier).
 1896. CHIRVE, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, villa Gambie, 23, rue Va-à-la-Mer, à Marseille.
 1911. CHATELET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Caumartin, 78, à Lille (Nord).
 1907. CHAZY, professeur à la Faculté des Sciences de Lille (Nord).
 1920. CHERONNET, ingénieur aux établissements Gaumont, rue d'Uzès, 10, à Paris (2°).
 1919. CHILOWSKY, rue du Lunain, 15, à Paris (14°).
 1913. COBLYN, capitaine du génie, rue des Vignes, 34, à Paris (16°).
 1920. COISSART, professeur au lycée Voltaire, avenue Gambetta, 17, à Paris (11°).
 1919. COLLIN, professeur au lycée Saint-Louis, rue Geoffroy-Saint-Hilaire, 51, à Paris (5°).
 1920. COMBET, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Lagarde, 5, à Paris (5°).
 1920. COMMISSAIRE, professeur au lycée Charlemagne, quai des Célestins, 2, à Paris (4°).
 1915. CONSTANTINIDÈS, professeur au Gymnase de Phodos (Grèce).
 1920. COPPEL, licencié ès sciences, avenue d'Orléans, 109, à Paris (14°).
 1896. COSSERAT (E.), directeur de l'Observatoire, à Toulouse.
 1900. COTTON (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble. S. P.
 1919. COUSIN, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux (Gironde).
 1914. CRELIER, professeur à l'Université de Berne, à Bienne (Suisse).
 1904. CURTISS, professeur à l'Université Northwestern, Stermann Avenue, 2023, à Evanston (Illinois, États-Unis).
 1919. DAIN, ingénieur, rue Alphonse-de-Neuville, 17, à Paris (17°).
 1920. DANELLE, professeur au lycée Louis-le-Grand, à Paris (5°).
 1919. DANJOY, ingénieur des constructions civiles, rue de Villersexel, 9, à Paris (7°).
 1919. DARNONIS, chargé de cours à la Faculté des Sciences de Nancy (Meurthe-et-Moselle).
 1885. DAUTHVILLE, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27 bis, à Montpellier.
 1919. DAUTHY, ingénieur en chef à la Compagnie des chemins de fer du Nord, rue Jacob, 4, à Paris (6°).

Date
de
l'admission.

1920. **BEDRON**, professeur au Prytanée militaire, à La Flèche (Sarthe).
1920. **DEFOURNEAUX**, professeur au lycée Condorcet, rue Damrémont, 72, à Paris (18°).
1920. **DELARUE**, professeur au lycée Charlemagne, quai de Béthune, 30, à Paris (4°).
1901. **DELASSUS**, professeur de mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences, rue de Brach, 92, à Bordeaux.
1895. **DELAUNAY** (N.), professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1920. **DELENS**, professeur au lycée, rue de Sainte-Adresse, 35, Le Havre (Seine-Inférieure).
1919. **DELTHEIL**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Montaudran, 48, à Toulouse (Haute-Garonne).
1913. **DELVILLE** (L.), ingénieur, rue de Tournon, 14, à Paris (6°).
1892. **DEMOULIN** (Alph.), professeur à l'Université, rue Joseph-Plateau, 10, à Gand (Belgique).
1905. **DENOY**, professeur à l'Université Stationstraat, 12 *bis*, à Utrecht (Hollande).
1883. **DERUYTS**, professeur à l'Université, rue Louvrex, 37, à Liège (Belgique).
1894. **DESAINT**, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17°).
1900. **DICKSTEIN**, Marszatkowska, 117, à Varsovie.
1914. **DONDER** (J. DE), rue Forestière, 11, à Bruxelles (Belgique).
1920. **DOLCET**, Ker Marguerite, rue Pornichet, à Saint-Nazaire (Loire-Inférieure).
1899. **DRACH**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue Geoffroy-Saint-Hilaire, 53, à Paris (5°).
1909. **DRURY**, bibliothécaire de l'Université, University Station, Urbana (Illinois, États-Unis).
1920. **DUCHOT**, gérant de la Librairie Gauthier-Villars et C^{ie}.
1920. **DUFOUR**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Monge, 21, à Paris (5°).
1907. **DULAC**, professeur à la Faculté des Sciences, quai des Brotteaux, 4, à Lyon.
1896. **DUMAS** (G.), docteur de l'Université de Paris, professeur à l'Université, Cabrières, avenue Mont-Charmant, à Béthusy-Lausanne (Suisse).
1897. **DUMONT**, professeur au lycée, avenue Bouvard, 6, à Annecy (Haute-Savoie).
1902. **EGOROFF** (Dimitry), professeur à l'Université, Povarskaja, Borissoglebsky per., n° 8, à Moscou (Russie).
1915. **ESCLANGON**, directeur de l'Observatoire de Strasbourg (Bas-Rhin).
1912. **EISENHARDT** (L.-P.), professeur à l'Université de Princeton, Alexander Street, 22, à Princeton (New-Jersey, États-Unis).
1916. **ELCUS**, banquier, rue du Colisée, 36, à Paris (8°). S. P.
1919. **EMERY**, colonel d'artillerie, président de la Commission des poudres de guerre et de la Commission d'expériences de Versailles, rue de Rémusat, 23, à Paris (16°).
1920. **ERRERA**, chaussée de Waterloo, 1039, Uccle (Belgique).
1900. **ESTANAVE**, docteur ès sciences, secrétaire de la Faculté des Sciences de Marseille.
1907. **ETZEL**, professeur de mathématiques et d'astronomie au collège de Saint-Thomas, à Saint-Paul (Minnesota, États-Unis).
1896. **EUVERTE**, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue du Pré-aux-Clercs, 18, à Paris (7°).
1888. **FABRY**, professeur à la Faculté des Sciences, traverse Magnan à Mazargues, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1906. **FARAGGI**, professeur au lycée, avenue Mirabeau, 7, à Nice (Alpes-Maritimes).
1904. **FATOU**, docteur ès sciences, astronome adjoint à l'Observatoire, boulevard du Mont-parناسse, 172, à Paris (14°).
1891. **FATQUENBERGUE**, rue de Honga, 14, à Mont-de-Marsan (Landes).
1892. **FENR** (Henri), professeur à l'Université, route de Florissant, 110, à Genève (Suisse).

Date
de
l'admission.

1920. FETTER, général commandant l'artillerie, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1885. FIELDS (J.), professeur à l'Université, Toronto (Ontario, Canada).
1919. FLAMANT, agrégé de mathématiques, rue d'Ulm, 45, à Paris (5°).
1920. FLAVIEN, professeur au lycée Henri IV, rue de la Glacière, 11, à Paris (13°).
1920. FLEUCHOT, professeur au lycée, à Dijon (Côte d'Or).
1872. FLYE SAINTE-MARIE, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Boyer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1897. FONTENÉ, inspecteur général honoraire de l'Instruction publique, rue Le Goff, 7, à Paris (5°).
1903. FORD (WALTER B.), professeur de mathématiques à l'Université de Michigan, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1919. FORGERON, actuaire de la Compagnie le Soleil, rue Maublan, 18, à Paris (15°).
1920. FORT, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Rataud, 9, à Paris (5°).
1889. FOUCHÉ, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Soufflot, 5, à Paris (5°).
1905. FOUET, professeur à l'Institut catholique, rue Le Verrier, 17, à Paris (6°).
1872. FOURRET, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17°). S. P.
1903. FRAISSÉ, inspecteur des études au Prytanée, à La Flèche (Sarthe).
1920. FRANCESCHINI, professeur au Prytanée militaire, La Flèche (Sarthe).
1911. FRÉCHET, professeur à la Faculté des Sciences, 2, quai Jacoutot, Robertsau, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1911. GALBRUN, docteur ès sciences, avenue Émile-Deschanel, 14, à Paris (7°).
1900. GALDEANO (Z.-G. DE), correspondant des Académies royales des Sciences de Madrid et de Lisbonne, professeur à l'Université, Calle del Coso, 99, à Saragosse (Espagne).
1919. GAMBIER, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes, 10, rue Oudinot, à Paris (7°).
1906. GARGAN DE MONEZTZ, licencié ès sciences, rue de Villiers, 42, à Levallois-Perret (Seine).
1872. GABRIEL, inspecteur général des ponts et chaussées en retraite, professeur honoraire à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17°).
1908. GARNIER, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
1919. GARNIER, ingénieur en chef d'artillerie navale, rue Valentin-Huÿ, 10, à Paris (15°).
1911. GAU, doyen et professeur à la Faculté des Sciences, cours Saint-André, 116, à Grenoble.
1920. GAY, professeur au lycée, à Grenoble (Isère).
1919. GEARY (R.-C.), maître ès sciences de l'Université nationale d'Irlande, rue du Renard, 37, à Paris (4°).
1890. GEBBIA, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1920. GEORGHINE, rue de l'Abbé-de-l'Épée, 6, à Paris (5°).
1906. GÉRARDIN, quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy.
1897. GERHANS, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1920. GEVREY, chargé de cours à la Faculté des Sciences, à Dijon (Côte-d'Or).
1913. GIRAUD, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand, La Terrasse-Fontmaure, à Chamalières (Puy-de-Dôme).
17. GLOBA-MIKHAÏLENKO, docteur ès sciences, avenue des Gobelins, 10 bis, à Paris (5°).
13. GODÉAUX, répétiteur à l'École Militaire de Belgique, avenue de l'Opale, 109, à Bruxelles (Belgique).

Date
de
l'admission.

1903. GODEY, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16^e).
1914. GOLOUBEFF (W.), agrégé de l'Université, rue Stanislas, 14, à Paris (6^e).
1907. GOT (Th.), docteur ès sciences, directeur technique de la Maison Nielause, rue du Dragon, 3, à Paris (6^e).
1881. GOURSAT, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Navarre, 11 bis, à Paris (5^e). S. P.
1920. GRAMONT (DE), duc DE GUICHE, docteur ès sciences, avenue Henri-Martin, 42 bis, à Paris (16^e).
1896. GRÉVY, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5^e). -
1919. GROS, ingénieur, rue Cambon, 37, à Paris (1^{re}).
1899. GUADET, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de l'Université, 69, à Paris (7^e).
1906. GUERBY, professeur au collège Stanislas, rue d'Assas, 50, à Paris (6^e). S. P.
1919. GUÉLIN, administrateur délégué de l'Électro-entreprise, rue de la Bienfaisance, 43, à Paris (8^e).
1900. GUICHARD (C.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Fontaine, 19, à Paris (16^e).
1907. GUICHARD (L.), professeur de mathématiques au collège de Barbezieux (Charente).
1919. GUILLAUME, ingénieur à la Compagnie des chemins de fer du Nord, à Valenciennes (Nord).
1920. GITTON, professeur au lycée Henri IV, rue de Bagnaux, 41, à Sceaux (Seine).
1919. HAAG, professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1896. HADANARD, membre de l'Institut, professeur au Collège de France et à l'École Polytechnique, rue Humboldt, 25, à Paris (14^e). S. P.
1894. HALSTED (G.-B.), Colorado State Teachers College, à Greeley (Colorado, États-Unis). S. P.
1920. HAMY, astronome à l'Observatoire, rue de Rennes, 108, à Paris (6^e).
1901. HANCOCK, professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).
1909. HANSEN, privat-docent à l'Université, Strandboulevarden, 66, Copenhague (Danemark).
1872. HATON DE LA GOUPIILLIÈRE, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des Mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6^e). S. P.
1905. HEDRICK, professeur à l'Université, Hicks Avenue, 304, à Columbia (Missouri, États-Unis).
1919. HELMHOLZ, docteur ès sciences, avenue Kléber, 46, à Paris (16^e).
1892. HERNANDY, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5^e).
1911. HERNHOLTZ, professeur, avenue de Belmont, 28, à Montreux (Suisse).
1911. HOLMGREN, professeur à l'Université d'Upsal, à l'Observatoire, à Upsal (Suède).
1895. HOTT (S.), professeur à l'École St-Croix de Neuilly, boulevard Pereire, 218 bis, à Paris (17^e). S. P.
1918. HUBER (M.), sous-directeur de la Statistique générale de la France au Ministère du Travail et de la Prévoyance sociale, quai d'Orsay, 97, à Paris (7^e).
1880. HUMBERT (G.), membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Bonaparte, 30, à Paris (6^e).
1918. HUMBERT (P.), maître de conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier (Hérault).
1907. HUSSON, professeur à la Faculté des Sciences, rue Isabey, 107 bis, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).

Date
de
l'admission.

1919. ILIOVICI, professeur au lycée Carnot, rue de Vaugirard, 225, à Paris (15°).
1920. ISCH-WALL, ingénieur, rue de l'Arcade, 23, à Paris (8°).
1896. JACQUET (E.), professeur au lycée Henri IV, rue Notre-Dame-des-Champs, 76, à Paris (6°).
1914. JAGER (F.), docteur ès sciences et en droit à Elvange, près Faulquemont (Moselle).
1919. JANET (M.), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue du Lycée, 5, à Grenoble (Isère).
1920. JANSSEN, docteur de l'Université d'Upsal, rue de la Sorbonne, 12, à Paris (5°).
1903. JENSEN (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des téléphones, Amicisvej, 16, à Copenhague V. (Danemark).
1872. JORDAN, membre de l'Institut, professeur honoraire à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 46, à Paris (7°). S. P.
1919. JOUGUET, ingénieur en chef des mines, répétiteur à l'École Polytechnique.
1919. JULIA, maître de conférences à la Faculté des Sciences, boulevard de Courcelles, 22, à Paris (17°).
1919. JUVET, licencié ès sciences, avenue du 1^{er}-Mars, 10, à Nenchâtel (Suisse).
1916. KAMPÉ DE FÉRIET, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lille (Nord).
1913. KASNER (E.), professeur à l'Université Columbia, à New-York (États-Unis).
1913. KIVELIOVITCH, licencié ès sciences, rue Laromignière, 6, à Paris (5°).
1880. KÖNIGS, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Faubourg-Saint-Jacques, 77, à Paris (14°).
1913. KOSTITZIN (V.), avenue Villemain, 32, à Paris.
1907. KRYLOFF, ingénieur des mines, professeur d'analyse à l'École supérieure des Mines de Petrograd, à Ouezd-Radomysl, Gitomirska Chaussée, Station Nebyltza, village Kolganovka, gouvernement de Kiew (Russie).
1919. LABROUSSE, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44, à Paris (6°).
1920. LACAZE, nouvelle école Sainte-Geneviève, rue de la Vieille-Église, à Versailles (Seine-et-Oise).
1920. LAGARDE, astronome à l'Observatoire, à Paris (14°).
1920. LAGORSSE, professeur au Prytanée militaire, La Flèche (Sarthe).
1906. LALESCO, professeur à l'Université, str. Seaune, 19, à Bucarest.
1919. LAMBERT, astronome adjoint à l'Observatoire, boulevard Arago, 99, à Paris (14°).
1893. LANCELIN, astronome adjoint à l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14°).
1919. LANGEVIN, professeur au Collège de France, rue Larrey, 11, à Paris (5°).
1919. LAPOINTE, professeur au lycée Saint-Louis, rue Sophie-Germain, 3, Paris (14°).
1896. LAROZE, ingénieur des télégraphes, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Froidevaux, 8, à Paris (14°).
1920. LAUBEUF, rue François-Ponsard, Paris (16°).
1896. LEAL, professeur à la Faculté des Sciences, rue Montesquieu, 8, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1896. LEBEL, professeur au lycée, rue Pelletier-de-Chambrun, 12, à Dijon.
1902. LEBESGUE, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, rue Saint-Sabin, 35 bis, à Paris (11°).
1903. LEBEUF, directeur de l'Observatoire, professeur d'astronomie à l'Université, à Besançon.
1919. LEDRANC (M.), membre de l'Institut, ingénieur, boulevard de Montmorency, 1, à Paris (16°).
1919. LECOINTE, inspecteur de l'Académie de Paris, boulevard Saint-Germain, 78, à Paris (6°).

Date
de
l'admission.

1920. LE CORBEILLER, ingénieur des télégraphes, rue de Grenelle, 81, à Paris (7°).
1893. LECORNU, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5°).
1919. LEFEBVRE (Ch.), ingénieur des constructions civiles, boulevard Haussmann, 157, à Paris (8°).
1920. LEFEBVRE, directeur de l'enseignement primaire de la Seine, Hôtel de Ville, place Lobau, à Paris (4°).
1918. LEFSCHETZ, ingénieur E. C. P., professeur assistant de mathématiques à l'Université de Kansas, Missouri St. 937, à Lawrence (Kansas, Etats-Unis).
1895. LÉMERAY (E.-M.), professeur libre à la Faculté des Sciences de Marseille, villa Veza, avenue Meissonier, à Antibes (Alpes-Maritimes).
1920. LERNER, professeur au lycée de Buzen (Roumanie); en congé, rue Cujas, 20, à Paris (5°).
1895. LE ROUX, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 13, à Rennes.
1898. LE ROY, membre de l'Institut, professeur au lycée Saint-Louis, rue Cassette, 27, à Paris (6°).
1920. LE VASSEUR, professeur à la Faculté des Sciences, rue Corneille, 125, à Lyon (Rhône).
1900. LEVI CIVITA (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1907. LESGOURGUES, professeur au lycée Henri IV, rue Jean-Bart, 4, à Paris (6°).
1903. LÉVY (Albert), professeur au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 86, à Paris (6°).
1907. LÉVY (Paul), ingénieur des mines, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, rue Chernoviz, 9, à Paris (16°). S. P.
1920. LIERNITTE, professeur au lycée Janson-de-Sailly, rue de Lubeck, 32, à Paris (16°).
1898. LINDELÖF (Ernst), professeur à l'Université, Sandvikskajen, 15, à Helsingfors (Finlande).
1886. LILOVILLE, ingénieur en chef des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, à Maure (Ile-et-Vilaine).
1919. LOISEAU, ingénieur à la Compagnie des chemins de fer du Nord, à Cambrai (Nord).
1912. LOVETT (E.-O.), Rice Institute, à Houston (Texas, États-Unis).
1902. LUCAS-GIRARDVILLE, à la Manufacture de l'État, à Tonneins.
1902. LUCAS DE PESLOCAN, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Rapp, 41, à Paris (7°).
1913. LESIN, professeur adjoint à l'Université de Moscou (Russie).
1895. MAILLET, ingénieur en chef des ponts et chaussées, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine). S. P.
1905. MALUSKI, proviseur du lycée Lakanal, rue Houdan, 3, à Sceaux (Seine).
1919. MARCHAUD, professeur au lycée, rue Henri-René, 3, à Montpellier (Hérault).
1906. MARCES, agrégé de l'Université, rue Frédéric-Passy, 15, à Neuilly (Seine).
1919. MARIJON, inspecteur général de l'Instruction publique, avenue Félix-Faure, 37, à Paris (15°).
1920. MARMION, chef de bataillon du génie, avenue de Suffren, 164, à Paris (7°).
1919. MAROGER, professeur au lycée de Marseille (Bouches-du-Rhône).
1904. MAHOTTE, professeur au lycée Charlemagne, rue de Renilly, 35 bis, à Paris (12°).
1884. MARTIN (Artemas), Columbia Street 1352, N. W., à Washington D. C. (États-Unis).
1920. MARTY, professeur au lycée Henri-Poincaré, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1920. MASCART, directeur de l'Observatoire de Lyon, à Saint-Genis-Laval (Rhône).
1919. MASSON (M^{lle}), docteur ès sciences, rue de la Tour, 123, à Paris (16°).
1919. MATANOVITCH, ingénieur E. C. P., rue Damrémont, 8, à Paris (18°).
1920. MAYER, secrétaire général du Bureau d'Organisation économique, rue de Provence, à Paris (9°).

Date
de
l'admission.

1889. MENDIZABAL TAMBOREL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique). S. P.
1884. MERCEHEAU, licencié ès sciences, docteur en médecine, rue de l'Université, 191, à Paris (7^e). S. P.
1919. MÉRIEUX, professeur au lycée Condorcet, rue Caumartin, à Paris (8^e).
1902. MERLIN (Émile), chargé des cours d'astronomie mathématique et de géodésie à l'Université, rue d'Ostende, 11, à Gand (Belgique).
1919. MESNAGER, membre de l'Institut, professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées, rue de Rivoli, 182, à Paris (4^e). S. P.
1919. MÉTRAL, professeur au lycée de Brest (Finistère).
1904. METZLER, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).
1919. MEYER (F.), professeur au lycée Rollin, avenue Trudaine, 16, à Paris (9^e).
1909. MICHEL (Charles), professeur au lycée Saint-Louis, rue Sarrette, 14, à Paris (14^e).
1893. MICHEL (François), ingénieur en chef des services électriques de la Compagnie du chemin de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10^e).
1920. MILHAUD, professeur au collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8^e).
1920. MINEUR, professeur au lycée Rollin, avenue Trudaine, 16, à Paris (9^e).
1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1907. MONTEL, maître de conférences à la Faculté des Sciences, répétiteur d'analyse à l'Ecole Polytechnique, boulevard de Vaugirard, 57, à Paris (15^e).
1898. MONTESSUS DE BALLORE (vicomte Robert DE), professeur à la Faculté libre des Sciences, boulevard Bigo-Danel, 15, à Lille (Nord).
1911. MOORE (Ch.-N.), professeur assistant à l'Université de Cincinnati (États-Unis).
1920. MOREL, professeur au lycée, rue Nantaise, 10, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1920. MOLTION, professeur au lycée Lakanal, rue Alphonse-Daudet, 15, à Paris (14^e).
1920. MUIR (Thomas), Elmoste Sandown Road, Rondebosch (Sud-Africain).
1919. MUXART, professeur au lycée Montaigne, rue Gay-Lussac, 68, à Paris (5^e).
1918. NÉCULCĂ, professeur à l'Université de Jassy (Roumanie).
1909. NEOVIUS, ancien professeur à l'Université d'Helsingfors, Chr. Vinthersvei 31, à Copenhague (Danemark).
1920. NEPYEU, professeur au lycée, boulevard de la Cité, 8, à Limoges (Haute-Vienne).
1885. NEUBERG, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1897. NICOLLIER, professeur, La Chataigneraie, à Saint-Clément (Vaud. Suisse).
1920. NIELSEN (Frederik Lange), rue de Ponthieu, 25, à Paris (8^e).
1919. NÖRLUND (E.), professeur à l'Université de Lund (Suède).
1920. OBRIOT, professeur au lycée Buffon, boulevard de Port-Royal, 82, à Paris (5^e).
1882. OCAGNE (M. D'), inspecteur général des ponts et chaussées, professeur à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole des Ponts et Chaussées, rue La Boétie, 30, à Paris (8^e). S. P.
1905. OUVET, professeur au lycée du Parc, à Lyon (Rhône).
1873. OVIDIO (E. D'), sénateur, professeur à l'Université, via Sebastiano Valfré, 14, à Turin (Italie).
1920. PAGÈS, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris (6^e).
1893. PAINELEVÉ, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'Ecole Polytechnique, rue Séguier, 18, à Paris (6^e).
1912. PANGE (DE), ancien élève de l'Ecole Polytechnique, rue François I^{er}, 32, à Paris (8^e). S. P.
1888. PAPELIER, professeur au lycée, rue Notre-Dame-de-Reconvrance, 29, à Orléans.

Date
de
l'admission

1920. PARENTY, directeur des Manufactures de l'État, avenue Malakoff, 11, à Paris (16°).
1919. PARODI (H.), ingénieur en chef à la Compagnie des chemins de fer d'Orléans, quai d'Orsay, 141, à Paris (15°).
1917. PASQUIER (du), professeur à l'Université, rue de la Côte, 106^A, à Neuchâtel (Suisse).
1881. PELLET, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Gergovia, 77, à Clermont-Ferrand.
1914. PÉRÈS, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue du Maréchal-Pétain, 11, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1920. PERONNET, astronome à l'Observatoire de Strasbourg (Bas-Rhin).
1881. PEROTT (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis). S. P.
1892. PERLIN (Élie), professeur de mathématiques à l'École J.-B. Say, rue de la Convention, 85, à Paris (15°).
1896. PETROVITCH, professeur à l'Université, Kasancic-Venac, 26, à Belgrade (Serbie).
1902. PETROVITCH (S.), général major, professeur ordinaire à l'Académie d'artillerie Michel, Sergevskaïa, 42, log. 10, à Petrograde (Russie).
1887. PEZZO (DEL), professeur à l'Université, piazza San Domenico Maggiore, 9, à Naples (Italie).
1905. PFEIFFER, professeur à l'Université, Szaoudl Wladimirskaïa 45, log 11, à Kiew (Russie).
1879. PICARD (Émile), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, quai Conti, 25, à Paris (6°).
1919. PICART (L.), directeur de l'Observatoire de Bordeaux, à Floirac (Gironde).
1872. PICQUET, chef de bataillon du génie en retraite, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6°).
1920. PIERRA, directeur de la Société des appareils de transmission Hale Shan, rue de Provence, à Paris (9°).
1913. PODIAGUINE (N.), rue Stanislas, 14, à Paris (6°).
1920. POMEY (J.-B.), ingénieur en chef des postes et télégraphes, boulevard Raspail, 120, à Paris (6°).
1920. POMEY (Etienne), professeur à l'École de Physique et de Chimie, boulevard Saint-Marcel, 70, à Paris (5°).
1920. POMEY (Léon), ingénieur des Manufactures de l'État, rue Rosa-Bonheur, 10, à Paris.
1918. POMPEU, professeur à l'Université de Bucarest (Roumanie).
1920. PONS, professeur au lycée, avenue Bouisson-Bertrand, à Montpellier (Hérault).
1906. POPOVICI, professeur à la Faculté des Sciences de Jassy (Roumanie).
1894. POTRON (M.), docteur ès sciences, nouvelle école Sainte-Genève, rue de la Vieille-Eglise, 2, à Versailles (Seine-et-Oise).
1920. PORTALIER, professeur au lycée Henri IV, à Paris (5°).
1914. POWALO-SCHWEIKOWSKI, licencié ès sciences, rue Gazan, 5 bis, à Paris (14°).
1919. PRADEL, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, à Paris (6°).
1919. PRÉVOST, ingénieur civil des mines, rue Huysmans, 6, à Paris (6°).
1896. QUIQUET, agent à la Compagnie la Nationale, boulevard Saint-Germain, 2, à Paris (5°).
1919. RATEAU, membre de l'Institut, avenue Elysée-Reclus, 10 bis, à Paris (7°).
1903. RÉMOINDOS, professeur d'analyse supérieure à la Faculté des Sciences, rue Spyridion-Tricoups, 54, à Athènes (Grèce).
1919. RENAUD, professeur au lycée, rue Dacier, 7, Angers (Maine-et-Loire).

Date
de
admission.

1919. RÉVEILLE, répétiteur à l'Ecole Polytechnique, à Saint-Tropez (Var).
1903. RICHARD, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, rue de Strasbourg, 100, à Châteaoux.
1919. RICHARD (E.), professeur au lycée Michelet, boulevard Lefebvre, 45, à Paris (15°).
1908. RICHARD D'ARONCOURT (DE), ancien élève de l'Ecole Polytechnique, rue Nationale, 74, à Lille.
1920. RIQUIER, professeur à la Faculté des Sciences, rue Malflâtre, 14, à Caen (Calvados).
1908. RISSER, actuaire au Ministère du Travail, rue Sedillot, 5, à Paris (7°).
1919. ROBERT, professeur au lycée de Montpellier (Hérault).
1916. ROBINSON (L.-B.), 22nd street 306 E. à Baltimore (Maryland, États-Unis).
1903. ROCHE, agrégé de l'Université, docteur ès sciences, rue d'Assas, 76, à Paris (6°).
1896. ROUGIER, professeur au Lycée et à l'Ecole des ingénieurs, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.
1906. ROUSIERS, professeur au collège Stanislas, boulevard du Montparnasse, 62, à Paris (14°).
1920. ROUYER, professeur à la Faculté des Sciences, rue Jean-Rameau, 3, à Alger.
1885. ROY, professeur à la Faculté des Sciences, rue Fizac, 9, à Toulouse (H^{te}-Garonne).
1911. RUDNICKI, licencié ès sciences, avenue Reille, 28, à Paris (14°).
1920. SAINTE LAGUE, professeur au lycée Carnot, rue Barye, 12, à Paris (7°).
1919. SAKELLARION, professeur à l'Université, rue Asklepion, 96, à Athènes (Grèce).
1900. SALTYSKOW, professeur à l'Université, à Kharkow (Russie). S. P.
1919. SARTRE, agrégé de l'Université, rue d'Ulm, 45, à Paris (5°).
1897. SCHOU (Erik), ingénieur, Thorvaldsins, 193, à Copenhague (Danemark).
1920. SCHUH, professeur à l'Académie technique de Delft, Frenckenolag, La Haye (Hollande).
1901. SÉE (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).
1896. SÉGUIER (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue du Bac, 114, à Paris (7°).
1882. SÉLIVANOFF (Démétrius), professeur à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Pétersbourg (Russie). S. P.
1920. SERGESCO, professeur au lycée de Fupnn (Roumanie); en congé, boulevard Saint-Germain, 46, à Paris (5°).
1920. SERRIER, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Bouchard, 38, à Paris (14°).
1900. SERVANT, chargé de conférences à la Sorbonne, à Bourg-la-Reine (Seine).
1908. SHAW (J.-B.), professeur à l'Université, Box 143, University Station, Urbana (Illinois, États-Unis).
1919. SIMONIN, astronome à l'Observatoire, avenue du Parc-de-Montsouris, 30, à Paris (14°).
1912. SIRE, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon (Rhône).
1916. SOULA, agrégé de l'Université, rue de la Bienfaisance, 1, Nîmes (Gard).
1900. SPARRE (comte DE), doyen de la Faculté catholique des Sciences, avenue de la Bibliothèque, 7, à Lyon. S. P.
1909. SPEISER (Andreas), membre de la Société mathématique suisse, privat-docent à l'Université, Stephansplan, 7, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1912. STECKER (H.-F.), professeur de mathématiques, à Pennsylvania State College, Miles St. 306 (Pennsylvanie, États-Unis).
1918. STOILOW (S.), docteur ès sciences, maître de conférences à l'Université de Jassy (Roumanie).
1898. STÖRMER, professeur à l'Université, Cort Adelers gade, 12, à Christiania (Norvège).

Date
de
l'admission.

1904. SUDRIA, directeur de l'École préparatoire à l'École supérieure d'Électricité, rue de Staël, 26, à Paris (14^e).
1904. SUNDMAN, professeur à l'Université, Observatoire astronomique, à Helsingfors (Finlande).
1913. TAMARKINE, répétiteur à l'École impériale des Ponts et Chaussées, rue Liteinaia, 45, App. 33, à Pétrougrade (Russie).
1920. THIRY, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue de l'Université, 36, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1919. THOISY (DE), ingénieur, rue Vineuse, 20, à Paris (16^e).
1899. THYBAUT, professeur au lycée Henri IV, boulevard St-Germain, 50, à Paris (5^e).
1910. TIMOCHENKO, professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1913. TINO (O.), via Lagrange, 2, à Turin (Italie).
1919. TISSIER, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Alger.
1912. TOUCHARD, ingénieur des Arts et Manufactures, boulevard Haussmann, 150, à Paris (8^e).
1910. TRAYNAUD, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon, à la Violette, Sommières (Gard). S. P.
1872. TRESCA, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du Général-Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1896. TRESSE, professeur au lycée Buffon, rue Mizon, 6, à Paris (15^e).
1919. TRIMBACH, ingénieur, avenue du Roule, 97, à Neuilly (Seine).
1907. TRIPIER (H.), sous-directeur des études à l'École Centrale, rue Alphonse-de-Neuville, 17, à Paris (17^e).
1920. TROUSSET, aide astronome à l'Observatoire de Floirac (Gironde).
1919. TURNEL, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, à Paris (6^e).
1911. TURRIERE, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier (Hérault).
1920. VACQUANT, professeur au lycée Janson-de-Sailly, rue de Siam, 28, à Paris (16^e).
1913. VALIROV, docteur ès sciences, professeur à la Faculté des Sciences, allée de la Robertsau, 52, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1893. VALLÉE POUSSIN (Ch.-J. DE LA), membre de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, professeur à l'Université, avenue des Alliés, 149, à Louvain (Belgique).
1904. VANDEUREN, professeur à l'École militaire, avenue Macan, 16, à Bruxelles.
1905. VAN VLECK, professeur de mathématiques, à l'Université, N. Pinckney St, 519, à Madison (Wisconsin, États-Unis).
1920. VARIOPOULOS, docteur ès sciences de l'Université d'Athènes, rue d'Ulm, 45, à Paris (5^e).
1897. VASSILAS-VITALIS (J.), professeur à l'École militaire supérieure, rue Epicure, 13, à Athènes (Grèce).
1898. VASSILIEF, membre du Conseil d'État, Vassili Ostrowlignie 12, n^o 19, à Pétrougrade (Russie).
1920. VAULOT, rue Barbet-de-Jouy, 42, à Paris (7^e).
1920. VAZULESCU, avenue Carnot, 5, à Paris (17^e).
1913. VEBLEN (O.), professeur à l'Université de Princeton (États-Unis).
1920. VERDIER, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris (6^e).
1920. VERGNE, rue Aubert, 8, à Paris (9^e).
1901. VESSOT, professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris (5^e).

Date
de
l'admission.

1920. VIEILLEFOND, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Garibaldi, 45, à Paris (15°).
1911. VILLAT, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Maréchal-Pétain, 11. Strasbourg (Bas-Rhin).
1919. VIMEUX, agrégé de mathématiques, rue d'Ulm, 45, à Paris (5°).
1920. VINTEJOUX, professeur au lycée Carnot, rue Cernuschi, 12, à Paris (17°).
1919. VOGT, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Grand-Verger, 33, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1888. VOLTERRA (Vito), professeur à l'Université, via in Lucina, 17, à Rome.
1900. VUIBERT, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5°).
1919. WAYRE, licencié ès sciences, rue Corneille, 5, à Paris (6°).
1880. WALCKENAER, inspecteur général en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7°).
1920. WEBER, professeur au lycée Buffon, boulevard Pasteur, 16, à Paris (15°).
1879. WEILL, directeur honoraire du collège Chaptal, boulevard Delessert, 23, à Paris (16°).
1919. WEILL, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, à Paris (6°).
1906. WILSON (E.-B.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1911. WINTER, avenue d'Iéna, 66, à Paris (16°).
1909. WOODS (F.-S.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1878. WORMS DE ROMILLY, inspecteur général des mines, en retraite, rue du Général-Langlois, 5, à Paris (16°).
1920. XAVIER-LÉON, directeur de la *Revue de Métaphysique et de Morale*, rue des Mathurins, 39, à Paris (8°).
1912. YOUNG (W.-H.), membre de la Société Royale de Londres, professeur à l'Université de Liverpool, villa Collonge, La Conversion, à Vaud (Suisse).
1903. ZERVOS, professeur à la Faculté des Sciences, rue Sozopoleos, 88, à Athènes (Grèce).
1898. ZIWET, professeur de mathématiques à l'Université Tappanavi, 644, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1909. ZORETTI, professeur de mécanique à la Faculté des Sciences de Caen.

Membres décédés en 1919 ou 1920 : MM. CALDARERA, FLOQUET, LAISANT, SAUVAGE, ZEUTHEN,

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS DÉCÉDÉS.

BENOIST. — BIENAYMÉ. — BISCHOFFSHEIM. — BORCHARDT. — BOULET. — CANET. —
CHASLES. — CLAUDE-LAFONTAINE. — GAUTHIER-VILLARS. — HALPHEN. — HERMITE.
HIRST. — LAFON DE LADÉBAT. — LÉAUTÉ. — MANNHEIM. — PERRIN (R.). —
POINCARÉ. — DE POLIGNAC. — RAFFY. — SYLOW. — TANNERY (PAUL). —
TCHEBICHEF. — VIELLARD.

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.	
1873	CHASLES.
1874	LAFON DE LADÉBAT.
1875	BIENAYMÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.
1877	MANNHEIM.
1878	DARBOUX.
1879	O. BONNET.
1880	JORDAN.
1881	LAGUERRE.
1882	HALPHEN.
1883	ROUCHÉ.
1884	PICARD.
1885	APPELL.
1886	POINCARÉ.
1887	FOURET.
1888	LAISANT.
1889	ANDRÉ (D.).
1890	HATON DE LA GOUTILLIÈRE.
1891	COLLIGNON.
1892	VICAIRE.
1893	HUMBERT.
1894	PICQUET.
1895	GOURSAT
1896	KÖENIGS

MM.	
1897	PICARD.
1898	LECORNU.
1899	GUYOU.
1900	POINCARÉ.
1901	D'OCAGNE.
1902	RAFFY.
1903	PAINLEVÉ.
1904	CARVALLO.
1905	BOREL.
1906	HADAMARD.
1907	BLUTEL.
1908	PERRIN (R.).
1909	RIOCHE.
1910	BRICARD.
1911	LÉVY (L.).
1912	ANDOYER.
1913	COSSERAT (F.).
1914	VESSIOT.
1915	CARTAN.
1916	FOUCHÉ.
1917	GUICHARD.
1918	MAILLET.
1919	LEBESGUE.
1920	DRACH.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques.</i>	Pays-Bas.
Bâle.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics.</i>	États-Unis.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik.</i>	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Calcutta.....	Calcutta mathematical Society.	Inde anglaise.
Cambridge.....	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.</i>	Norvège.
Coïmbre.....	<i>Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto.</i>	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik.</i>	Danemark.
Copenhague.....	<i>Det Kongelige danske videnskabernes selskabs Skrifter.</i>	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Académie technique.	Pays-Bas.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis.</i>	Belgique.
Göttingen.....	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Halifax.....	Nova Scotian Institute of Science.	N ^{lle} -Écosse (Canada)
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kansas.....	Université de Kansas.	États-Unis.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkow.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkow.....	Société mathématique de Kharkow.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen.</i>	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Archiv der Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Liège.....	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne.....	<i>Periodico di Matematica.</i>	Italie.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.

Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut grand ducal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences.</i>	France.
Mexico.....	Sociedad científica Antonio Alzate.	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York.....	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa.....	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme.....	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques.</i>	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris.....	Institut des Actnaires français.	France.
Paris.....	<i>Intermédiaire des Mathématiciens.</i>	France.
Pétrograde.....	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise.....	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Bohême.	Tchéco-Slovaquie.
Prague.....	<i>Jednota českých mathematiců a fysiků.</i>	
Prague.....	Société mathématique de Bohême.	
Princeton.....	<i>Annals of Mathematics.</i>	New-Jersey, États-Unis.
Rennes.....	<i>Travaux de l'Université.</i>	France.
Rome.....	Académie Royale des Lincei.	Italie.
Rome.....	Società italiana delle Scienze.	Italie.
Rome.....	Società per il progresso delle Scienze.	Italie.
Sophia.....	<i>Annuaire de l'Université de Sophia.</i>	Bulgarie.
Stockholm.....	<i>Acta mathematica.</i>	Suède.
Stockholm.....	<i>Archiv for Mathematik.</i>	Suède.
Stockholm.....	<i>Bibliotheca mathematica.</i>	Suède.
Tokyo.....	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences.</i>	France.
Turin.....	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Varsovie.....	Prace Matematyczno Fizyczne.	Pologne.
Venise.....	Institut Royal des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik.</i>	Autriche.
Washington.....	National Academy of Sciences.	États-Unis.
Zagreb (Agram).....	Académie Sud-Slave des Sciences et Beaux-Arts.	Yougo-Slavie.
Zurich.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 14 JANVIER 1920.

PRÉSIDENTE DE M. LEBESGUE.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement de son Bureau et d'une partie du Conseil.

Elle adopte la motion suivante : « La Société mathématique de France, considérant que les relations avec ceux de ses membres qui appartiennent aux nations ennemies ont été suspendues, décide que ces relations ne pourront être reprises qu'à la suite d'une demande formelle des membres visés, demande qui, après examen, sera soumise au vote du Conseil. »

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : MM. M. Marty, présenté par MM. Borel et Lebesgue; L. Fort, présenté par MM. Muxart et Montel; Parenty, présenté par MM. Hadamard et Lebesgue; Charpy, présenté par MM. Hadamard et Lebesgue; Delens, présenté par MM. Cartan et Lebesgue; M. Gevrey, présenté par MM. Lebesgue et Picard; Sainte-Laguë, présenté par MM. Borel et Lebesgue; Nepveu, présenté par MM. Guichard et Lebesgue; P. Mineur, présenté par MM. Lebesgue et Montel; G. Cambefort, présenté par MM. Lebesgue et Montel; Lagarde, présenté par MM. Fatou et Lebesgue; Mascart, présenté par MM. Drach et Lebesgue; Rouyer, présenté par MM. Cotton et Lebesgue; E. Boncenne, présenté par MM. Fouché et Lebesgue; Ch. Riquier, présenté par MM. Appell et Lebesgue; R. Le Vavasseur, présenté par MM. Lebesgue et Vessiot; G. Milhaud, présenté par MM. Lebesgue et Montel; E. Combet, présenté par MM. Bioche et Lesgourgues; Coissard, présenté par MM. Guichard et Vessiot; J. Lhermitte, présenté par MM. Fatou et Lebesgue; H. Vergne, présenté par MM. Appell et Picard; L. Pomey, présenté par MM. Bricard et Hadamard; G. Dufour, présenté par MM. Bioche et Lebesgue; L. Brunschwig, présenté par MM. Hadamard et Lebesgue; E. Serrier, présenté par MM. Bioche et Lesgourgues; Baudet, présenté par MM. Barrau et Bioche; Schuh, présenté par MM. Barrau et Bioche; R. Thiry, présenté par MM. Antoine et Villat; Vaulot, présenté par MM. d'Ocagne et Lebesgue; E. Bloch, présenté

par MM. Langevin et Montel; Brantut, présenté par MM. Charbonnier et Lebesgue; Delarue, présenté par MM. Grévy et Lesgourgues; Albo, présenté par MM. Labrousse et Lebesgue; P. Aubert, présenté par MM. Bioche et Lebesgue; Vintéjoux, présenté par MM. Cartan et Leau; G. Arvengas, présenté par MM. Bouligand et Montel; E. Pomey, présenté par MM. Bricard et Hadamard; J.-B. Pomey, présenté par MM. Bricard et Hadamard; Lacaze, présenté par MM. Boulanger et Fouët; Ducrot, présenté par MM. Maluski et Montel; Le Corbeiller, présenté par MM. Hadamard et J.-B. Pomey; de Broglie, présenté par MM. Lebesgue et de Pange; A. Lerner, présenté par MM. Lebesgue et Montel.

Réunie en Assemblée générale extraordinaire, la Société adopte les conclusions du rapport sur les modifications aux Statuts, présentées par une Commission de sept de ses membres ⁽¹⁾, nommés par le Conseil d'administration. Ces conclusions seront soumises à l'approbation du Conseil d'État.

SÉANCE DU 28 JANVIER 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société: MM. A. Bernheim, présenté par MM. Lebesgue et Thybaut; Cheronnet, présenté par MM. Dain et Dautry; Pierra, présenté par MM. Dain et Dautry; Mayer, présenté par MM. Dain et Dautry; Vacquant, présenté par MM. Boulanger et Maillet; Weber, présenté par MM. Lebel et Lebesgue; Lefebvre, présenté par MM. Bioche et Painlevé; Fleuchot, présenté par MM. Cerf et Lebesgue; Léon Brillouin, présenté par MM. Marcel Brillouin et Langevin; Jausson, présenté par MM. Hadamard et Lebesgue; Coppel, présenté par MM. Hadamard et Lebesgue; Danelle, présenté par MM. Bioche et Combet; Abelin, présenté par MM. Drach et Lebesgue; Pons, présenté par MM. Lebesgue et Marchaud; H. Commissaire, présenté par MM. Lebesgue et Vessiot; L. Roy, présenté par MM. Blutel et Boulanger; Guitten, présenté par MM. Jacquet et Lebesgue; Caussé, présenté par MM. Blutel et Lebesgue; Xavier-Léon, présenté par MM. Hadamard et Winter;

(¹) MM. Andoyer, Aurie, Boulanger, Cahen, Drach, Lebesgue, Vessiot.

A. Cahen, présenté par MM. Hadamard et Lebesgue; G. Ohriot, présenté par MM. Lebesgue et Leconte; Portalier, présenté par MM. Casabonne et Thybaut; Peronnet, présenté par MM. Appell et Ésclançon; Marmion, présenté par MM. Barré et Hadamard; Auterle, présenté par MM. Galbrun et Montel; Laubeuf, présenté par MM. Drach et Hadamard,

Communication :

M. Faïou : *Sur les propriétés d'une classe de fonctions uniformes analogues aux fonctions fuchsienues.*

La substitution rationnelle $z_1 = R(z)$, ayant un point double dont le multiplicateur s est compris, en module, entre zéro et un, l'équation fonctionnelle de Schröder

$$f[R(z)] = sf(z)$$

admet une solution holomorphe et uniforme dans le domaine du point double. L'étude de cette fonction au voisinage des points frontières de son domaine d'existence conduit à des propriétés curieuses, entièrement différentes de celles que possèdent les fonctions déjà connues ayant des ensembles parfaits de points singuliers.

$f(z)$ est un invariant relatif d'un certain groupe discontinu de substitutions algébriques; les invariants absolus de ce même groupe, ne prenant qu'un nombre fini de fois chaque valeur dans un domaine fondamental, s'obtiennent en posant

$$I(z) = \psi[\log f(z)],$$

en désignant par $\psi(u)$ une fonction elliptique de périodes $2i\pi$ et $\log s$. Les fonctions $I(z)$ ainsi obtenues ont une infinité dénombrable de points singuliers essentiels isolés qui sont les zéros de $f(z)$. Les fonctions inverses $z(1)$ n'ont comme singularités qu'un nombre fini de points critiques algébriques; dans certains cas particuliers, ce nombre peut être égal à 3; la fonction $I(z)$ offre alors de très grandes analogies avec les fonctions de Schwarz.

SÉANCE DU 11 FÉVRIER 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : MM. Mouthon présenté par MM. Leconte et Maluski; A. Vieillefond, présenté par

MM. Lebesgue et Montel; de Gramont de Guiche, présenté par MM. Appell et Picard; Defourneaux, présenté par MM. Appell et Lebesgue; F.-L. Nielsen, présenté par MM. Borel et Strömer.

Conférence de M. Langevin sur la théorie de la relativité ⁽¹⁾.

Communication :

M. Drach : *Sur les formes quadratiques de différentielles et les surfaces de translation.*

Soit $dS^2 = \sum_{r,s} a_{rs} dx_r dx_s$ une forme quadratique de différentielles à n variables $x_1, \dots, x_n$; il existe un symbole de variation δ bien déterminé portant à la fois sur les x et sur les dx , et permutable avec le symbole d quels que soient les dx_i et les δx_i , qui n'altère pas la forme quadratique dS^2 . Cette variation δ est définie par les équations

$$\begin{aligned} \delta dx_i + \sum_{r,s} A_{rs,i} dx_r \delta x_s &= 0, \\ A_{rs,i} &= \sum a_{rs,j} A_{j,i} = \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\}, \\ a_{rs,j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{rj}}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{sj}}{\partial x_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_j} \right) = \left[\begin{matrix} rs \\ j \end{matrix} \right], \end{aligned}$$

où $A_{j,i}$ est l'élément $\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{j,i}}$, Δ désignant le discriminant de la forme.

Au point de vue géométrique, les quatre points $x, x + dx, x + \delta x, x + dx + \delta x + \delta dx$ forment, dans l'espace E_n qui a pour carré de l'élément linéaire dS^2 , un quadrilatère dont les côtés opposés sont égaux.

Si l'on considère les équations

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial \theta} + \sum A_{rs,i} \frac{\partial x_r}{\partial t} \frac{\partial x_s}{\partial \theta} = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

elles définissent des variétés à deux dimensions entièrement déterminées par deux courbes arbitraires qui se coupent : $t = t_0, \theta = \theta_0$; les courbes $t = \text{const.}, \theta = \text{const.}$ partagent ces variétés en quadrila-

⁽¹⁾ La conférence de M. Langevin, étant parvenue trop tard, ne pourra être insérée que dans les *Comptes rendus* de 1921.

tères à côtés opposés égaux. L'ensemble de ces variétés est lié de manière invariante au dS^2 de l'espace, comme l'ensemble des géodésiques. Pour l'espace euclidien, elles se réduisent aux surfaces de translation et les quadrilatères à côtés opposés égaux sont des parallélogrammes; on les désignera sous le nom de *surfaces de translation* de E_n .

Analytiquement, la variation δ appliquée à une forme linéaire invariante $F = \Sigma X_i \delta x_i$ donne une forme bilinéaire invariante δF ; appliquée à une forme m -linéaire invariante, elle donne une forme $(m+1)$ -linéaire invariante, etc.

Des remarques équivalentes au point de vue du calcul ont été faites par Christoffel; développées systématiquement, mais sans l'introduction de la variation δ , elles constituent le calcul différentiel absolu de Ricci dont M. T. Levi-Civita a montré les avantages. Les résultats précédents font partie d'un Mémoire adressé à l'Institut en 1899, dont un résumé seul a paru [*Notice sur mes travaux scientifiques*, Privat, Toulouse 1909].

Ils prennent une importance nouvelle du fait des études récentes sur la *Relativité* : on voit en effet que dans un espace E_n quelconque, n'admettant pas de transformation en lui-même, c'est-à-dire ne permettant pas le mouvement des figures, des déplacements sont possibles pour des corps infiniment petits en négligeant seulement des déformations d'ordre supérieur. On peut choisir, à partir d'un point x , n éléments différentiels $d_1x, d_2x, \dots, d_nx$ formant un n -èdre et ensuite la direction δx de la translation infiniment petite.

Si l'on se reporte à l'espace ordinaire, l'ensemble des surfaces de translation est attaché de manière invariante à l'élément linéaire

$$dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

On est ainsi conduit à étudier de près la relation, au voisinage d'un point, entre une surface quelconque et les surfaces de translation. J'ai reconnu que l'on peut remplacer une surface quelconque, par une surface de translation, de deux manières différentes, en négligeant seulement des infiniment petits du *cinquième ordre*. Les relations établies par là entre une surface quelconque et les deux surfaces de translation sont relatives à des propriétés très cachées des surfaces. On sait d'ailleurs que les surfaces de translation sont définies par deux équations aux dérivées partielles du cinquième ordre.

SÉANCE DU 25 FÉVRIER 1920.

PRÉSIDENTE DE M. DRACH.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : MM. Gay, présenté par MM. Cotton et Got; Doucet, présenté par MM. Bouligand et Montel; Morel, présenté par MM. Bouligand et Le Roux; Anzenberger, présenté par MM. Montel et Vessiot; S. Gheorghiu, présenté par MM. Drach et Pompeiu; P. Sergesco, présenté par MM. Drach et Pompeiu; Pagès, présenté par MM. Drach et A. Lévy; L. Flavien, présenté par MM. Borel et Lebesgue; G. Troussel, présenté par MM. Andoyer et Lebesgue.

Communications :

M. A. Lévy : *Sur l'itération des polynomes.*

M. Fatou : *Remarque au sujet du théorème de M. Picard sur les fonctions entières.*

I. Soit $f(z)$ une fonction entière telle que les trois équations

$$f(z) = e_1, \quad f(z) = e_2, \quad f(z) = e_3,$$

où e_1, e_2, e_3 , désignant les constantes finies distinctes, n'aient que les racines d'ordre pair de multiplicité; e_1, e_2, e_3 sont pour $f(z)$ des valeurs *semi-exceptionnelles*, ou des valeurs exceptionnelles de poids $\frac{1}{2}$, tandis que l'infini est une valeur exceptionnelle au sens ordinaire. On peut supposer sans diminuer la généralité

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Considérons l'intégrale elliptique de première espèce

$$(1) \quad u = \int_z^Z \frac{dZ}{\sqrt{4(Z-e_1)(Z-e_2)(Z-e_3)}}.$$

Si, dans l'une des déterminations de $u(Z)$, on remplace Z par $f(z)$, on obtient une fonction analytique $\psi(z)$. Je dis que $\psi(z)$ est une fonction entière; en effet, en vertu de

$$(2) \quad \psi'(z) = \frac{f'(z)}{\sqrt{[f(z)-e_1][f(z)-e_2][f(z)-e_3]}}.$$

les seuls points singuliers possibles de $\psi'(z)$ à distance finie sont les racines ξ des équations $f(z) = e_i$. Si $2p$ est l'ordre de multiplicité d'une telle racine, on aura d'après (2) au voisinage de ξ :

$$(3) \quad \psi'(z) = \frac{(z - \xi)^{2p-1}}{(z - \xi)^p} \mathfrak{U}(z - \xi) = (z - \xi)^{p-1} \mathfrak{U}(z - \xi).$$

Comme $p - 1 \geq 0$, ξ est un point ordinaire pour $\psi'(z)$ et $\psi(z)$.

C. Q. F. D.

L'inversion de l'intégrale elliptique donne ensuite la relation

$$(4) \quad f(z) = p[f(z) | \omega_1, \omega_2],$$

p désignant la fonction elliptique de Weierstrass. $f(z)$ n'ayant pas de pôles, $\psi(z)$ ne prend jamais les valeurs congrues à zéro (mod $2\omega_1, 2\omega_2$); $\psi(z)$ est donc une constante d'après le théorème de M. Picard, et il en est de même de $f(z)$.

Le même raisonnement montre que les fonctions $f(z)$ satisfaisant aux conditions précédentes non plus dans tout le plan, mais dans un domaine où elles sont holomorphes et uniformes, y forment une famille normale.

II. Supposons ensuite que l'infini soit pour $f(z)$ une valeur semi-exceptionnelle comme e_1, e_2, e_3 , c'est-à-dire que $f(z)$ soit une fonction méromorphe n'ayant que des pôles d'ordre pair. Je dis que $\psi(z)$ définie comme précédemment est encore une fonction entière; les points racines de $f(z) = e_i$ étant des points ordinaires pour $\psi(z)$, il suffit de prouver qu'il en est de même pour les pôles de $f(z)$. Or $\frac{du}{dz}$ étant le produit de $Z^{-\frac{3}{2}}$ par une fonction de Z régulière à l'infini, on aura d'après (2) autour d'un pôle ξ d'ordre $2p$ de $f(z)$:

$$\psi'(z) = \frac{1}{(z - \xi)^{2p+1}} (z - \xi)^{3p} \mathfrak{U}(z - \xi) = (z - \xi)^{p-1} \mathfrak{U}(z - \xi)$$

avec $p - 1 \geq 0$, ce qui prouve notre assertion.

La réciproque a lieu, c'est-à-dire que toutes les fonctions méromorphes admettant les quatre valeurs semi-exceptionnelles (e_1, e_2, e_3, ∞) s'obtiennent en remplaçant dans $p(u, \omega_1, \omega_2)$ l'argument u par une fonction entière arbitraire de z .

Supposons qu'il existe une cinquième valeur semi-exceptionnelle $a \neq e_1, e_2, e_3, \infty$. L'équation $f(z) = a$ équivaut à

$$\psi(z) = \pm u_0 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

u_0 distinct de 0, $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \pmod{2\omega_1, 2\omega_2}$.

Comme $p'(+u_0)$ a une valeur finie non nulle, les valeurs considérées de z sont du même ordre (pair) de multiplicité en tant que racines de la première ou de la seconde équation. Les valeurs

$$\pm u_0 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

en nombre infini, sont donc les valeurs semi-exceptionnelles de la fonction entière $\psi(z)$, qui d'après I est, par suite, une constante; il en est de même de $f(z)$.

Le même raisonnement permet d'établir que les fonctions méromorphes dans un domaine où elles possèdent cinq valeurs semi-exceptionnelles y forment une famille normale.

III. Supposons que $Z=f(z)$ admette les deux valeurs exceptionnelles ordinaires 0 et ∞ et la valeur semi-exceptionnelle $Z=1$, et considérons l'intégrale de troisième espèce

$$(5) \quad u = \int_1^Z \frac{dZ}{2Z\sqrt{Z-1}} = \text{arc tang } \sqrt{Z-1}$$

qui admet les points critiques algébriques $Z=1$, $Z=\infty$ et le point critique logarithmique $Z=0$. En remplaçant Z par la fonction entière $f(z)$ dans $u(Z)$, on obtient encore une fonction entière $\psi(z)$ et l'on a, d'après (5),

$$(6) \quad f(z) = 1 + \tan^2 \psi(z).$$

$f(z)$ n'ayant pas de pôles, $\psi(z)$ ne prend jamais les valeurs en nombre infini de la forme $n\pi + \frac{\pi}{2}$; $\psi(z)$ est donc une constante en vertu du théorème de M. Picard; il en est de même de $f(z)$. On verra encore que les fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine, avec deux valeurs exceptionnelles et une valeur semi-exceptionnelle, y forment une famille normale.

IV. Il résulte de cette discussion que deux valeurs semi-exceptionnelles remplacent une valeur exceptionnelle dans les énoncés du théorème de M. Picard et de ses diverses généralisations. En particulier, si une fonction uniforme dans un domaine y possède au plus un point singulier essentiel, le nombre pondéré des valeurs exceptionnelles de cette fonction ne peut être égal ou supérieur à $\frac{5}{2}$ à moins qu'elle ne se réduise à une constante.

SÉANCE DU 10 MARS 1920.

PRÉSIDENTE DE M. DRACH.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : MM. Dedron, présenté par MM. Borel et Lebesgue; Franceschini, présenté par MM. Dedron et Lebesgue; Lagorsse, présenté par MM. Dedron et Lebesgue; Vazilescu, présenté par MM. Lalesco et Pompeiu.

Communications :

M. Pompeiu : *Sur les fonctions harmoniques.*

M. Lebesgue : *Sur le théorème de la moyenne et le problème de Dirichlet.*

A l'occasion de l'intéressante Communication de M. Pompeiu, on peut signaler que le théorème qui affirme que les fonctions harmoniques V sont caractérisées par le fait d'être en tout point P égal à la moyenne des valeurs qu'elles prennent dans un cercle C décrit du point P comme centre, a été considéré sous deux aspects différents.

Ordinairement, on entend par là que l'égalité

$$(1) \quad V(P) = \int \int_C \frac{V(M) dM}{\text{aire de } C}$$

est supposée vérifiée par tout cercle C de centre P . Mais on peut aussi entendre que l'égalité précédente est remplie en chaque point pour *un* certain cercle C de centre P . Sous des conditions de continuité très larges, ceci suffit encore pour que l'on puisse affirmer que $V(P)$ est harmonique; mais, jusqu'ici, ce résultat n'a été obtenu que d'une manière très indirecte : partant d'une fonction continue $\varphi(M)$ égale à $V(P)$ sur la frontière du domaine considéré que l'on substitue à $V(M)$ dans le second membre de (1), on a une fonction $V_1(P)$ qui, substituée dans le second membre, donne $V_2(P)$, etc.

Ces itérations successives définissent une fonction limite $V(P)$ satisfaisant à (1) et qui est l'unique solution possible de (1). Si donc, par ailleurs, on a démontré la possibilité de résoudre le problème de Dirichlet pour le domaine étudié, il est bien prouvé que $V(P)$ est harmonique.

Sur les polygones de Poncelet.

Lorsqu'il existe un polygone de m côtés inscrit dans une ellipse et circonscrit à une ellipse homofocale, il en existe une infinité, d'après le théorème de Poncelet, et ils ont tous même périmètre, d'après un théorème de Chasles. Cette dernière propriété ne s'étend pas facilement aux polygones inscrits et circonscrits dans deux coniques quelconques, parce que la longueur est une notion non projective; on obtient au contraire un énoncé projectif, et par suite applicable dans tous les cas, en considérant le théorème de Chasles comme un cas particulier d'un théorème plus général.

S'il existe des polygones de m côtés circonscrits à une conique C et dont les sommets décrivent m coniques $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ faisant partie avec C d'un même faisceau tangentiel F , tous ces polygones ont même longueur cayleyenne quand on prend pour absolue une conique du faisceau tangentiel F .

Corrélativement : s'il existe des polygones de m côtés inscrits dans une conique C et dont les côtés enveloppent m coniques $T_1, T_2, \dots, T_m$ faisant partie avec C d'un même faisceau ponctuel F , tous ces polygones ont une somme d'angles constante, donc sont de même aire cayleyenne, quand on prend pour absolue une conique du faisceau ponctuel F .

Il faut avoir bien soin de se rappeler que les longueurs, angles et aires ont plusieurs déterminations possibles, c'est l'une d'elles qui est constante. On peut prouver de plus que ces longueurs ou aires de polygones satisfont, quand il s'agit d'éléments réels et que $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ sont confondues, aux mêmes propriétés de maximum et de minimum que dans le cas classique envisagé par Chasles.

SÉANCE DU 24 MARS 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Communication :

M. A. Lévy : *Sur une interprétation des réduites d'une fraction continue périodique.*

SÉANCE DU 14 AVRIL 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Élection :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. Thomas Muir, présenté par MM. Drach et Galbrun.

Communications :

M. Fouché : *Sur la double génération de l'épicycloïde et le calcul de la longueur de l'arc et le calcul de l'aire.*

M. Lebesgue : *Sur les ombilics d'une quadrique.*

Se donner un ombilic d'une quadrique c'est se donner trois conditions simples; peut-on déterminer une quadrique en l'assujettissant à avoir trois points donnés pour ombilics ?

Partant des propriétés données des ombilics (les ombilics sont les intersections des plans principaux avec les génératrices isotropes de la quadrique; les quatre ombilics situés dans un même plan principal forment un rectangle de côtés parallèles à deux des axes), on voit de suite que si l'on se donne deux ombilics, qui doivent être situés dans un même plan principal, les autres ombilics ont un lieu formé de plans et de sphères. Donc si l'on se donne arbitrairement trois points A, B, C comme ombilics d'une quadrique, ces trois points devront être respectivement dans chacun des trois plans principaux. Il résulte de là que les deux génératrices qui passent par A ne peuvent pas être parallèles à celles de B, sans quoi A et B seraient diamétralement opposés; les génératrices de A et B ne peuvent pas être non plus toutes quatre de directions différentes, sans quoi les plans tangents en A et B seraient parallèles à deux plans de sections circulaires associés et AB serait parallèle à l'un des axes. Donc une et une seule génératrice de A est parallèle à une des génératrices de B; la génératrice du cône asymptote de la quadrique, qui est parallèle à ces génératrices parallèles passant par A et B, passe donc par le milieu c de AB. Et comme les génératrices dont nous parlons sont isotropes, le centre de la quadrique cherché est l'un des deux centres des sphères de rayon nul contenant le cercle des neuf points du triangle ABC. Ayant choisi le centre de la quadrique en O, dans l'une des deux positions possibles, on a Oc, puis, en menant par A et B des parallèles à Oc,

deux génératrices de la quadrique. En opérant de même avec les milieux b et a de CA et BC, on détermine la quadrique par six génératrices.

Le problème admet donc deux solutions qui s'obtiennent très simplement. Ce résultat paraît en contradiction avec la remarque suivante : une sphère quelconque passant par A, B, C répond à la question.

La contradiction n'est qu'apparente; si l'on écrivait les relations analytiques, qui expriment que A, B, C sont des ombilics, on aurait un système d'équations se décomposant et qui conduirait, d'une part à la famille des sphères, d'autre part aux deux quadriques trouvées.

Il en est de même en ce qui concerne le lieu des ombilics des quadriques, dont deux ombilics situés dans un même plan principal occupent des positions données A et B; nous avons trouvé des sphères et des plans, mais il y a, en plus, un lieu singulier provenant des sphères passant par A et B. Ce lieu comprend tout l'espace.

On est peu habitué à signaler les lieux singuliers qui embrassent tous les points de l'espace ou du plan; on les rencontre cependant fréquemment. On aura par exemple un lieu singulier comprenant tout le plan en cherchant le lieu des sommets des coniques admettant deux points donnés A et B pour sommets.

SÉANCE DU 28 AVRIL 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Election :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. C. Isch-Wall, présenté par MM. Julia et Paul Lévy.

Communication :

M. P. Lévy : *Sur les fonctions abéliennes singulières de trois variables.*

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de fonctions abéliennes de périodes

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 0, & 0, & G, & II'', & II', \\ 0, & 1, & 0, & II'', & G', & II, \\ 0, & 0, & 1, & II', & II, & G'' \end{array}$$

admette des transformations, dites *singulières*, autres que celles d'Hermite, est qu'il existe entre les périodes *un système de relations singulières*, à coefficients entiers, de la forme

$$\begin{aligned}\lambda \mathcal{G} + \lambda' \mathcal{H}'' + \lambda'' \mathcal{H}' + \gamma' G - \beta'' G' + (\beta' - \gamma'') H + \alpha' H' - \alpha'' H'' + \mu &= 0, \\ \lambda \mathcal{H}'' + \lambda' \mathcal{G}' + \lambda'' \mathcal{H} + \alpha'' G - \gamma' G'' + (\gamma'' - \alpha) H' + \beta'' H'' - \beta H + \mu' &= 0, \\ \lambda \mathcal{H}' + \lambda' \mathcal{H} + \lambda'' \mathcal{G}'' + \beta G' - \alpha' G + (\alpha - \beta') H'' + \gamma H - \gamma' H' + \mu'' &= 0.\end{aligned}$$

$\mathcal{G}, \mathcal{H}', \dots, \mathcal{G}''$ désignant les mineurs correspondant à $G, H'', \dots, G''$ dans le déterminant formé par ces quantités.

M. Humbert a découvert que ce système de relations entraîne l'existence d'un système analogue, de coefficients

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \lambda \mu - (\alpha), & \beta_1 &= \lambda \mu' - (\alpha'), & \gamma_1 &= \lambda \mu'' - (\alpha''), \\ \lambda_1 &= \lambda \alpha + \lambda' \beta + \lambda'' \gamma, & \mu_1 &= \mu \alpha + \mu' \alpha' + \mu'' \alpha'',\end{aligned}$$

les autres coefficients étant donnés par des formules analogues, obtenues par permutation. $(\alpha), (\alpha'), \dots, (\gamma'')$ désignent les mineurs correspondant à $\alpha, \alpha', \dots, \gamma''$ dans le déterminant formé par ces quantités.

Les coefficients α, β', γ'' n'intervenant que par leurs différences, un système de relations singulières peut être représenté en coordonnées homogènes par un point M d'un espace à treize dimensions. Si des périodes vérifient le système de relations représentées par ce point, elles vérifient celui représenté par le point M' qui s'en déduit par l'opération de M. Humbert, et par suite tous ceux représentés par des points de la droite MM'. Nous appellerons une telle droite *droite D*.

Il peut d'ailleurs arriver que le système obtenu par M. Humbert soit nul, ou identique au système initial. Ce système, et le point M, sont dits dans ce cas *exceptionnels*. Le lieu des points exceptionnels est une variété V à huit dimensions.

Une droite D coupe cette variété en trois points, en général distincts. Elle est bien définie par la donnée d'un point autre que ces trois points exceptionnels, et s'en déduit comme en partant du point M. Mais par chaque point exceptionnel passent une quadruple infinité de droites D.

L'ensemble des points représentant les systèmes de relations singulières vérifiés par des systèmes de périodes donnés constitue ce que nous appellerons *une variété L* (linéaire). Outre la propriété évidente d'être linéaire, on remarque qu'une telle variété est, ou un lieu de points exceptionnels, ou un lieu de droites D. Nous allons étudier les deux cas.

1^o *Plans Π , ou plans situés sur la variété V.* — Il existe des plans Π_1 , à quatre dimensions, situés sur la variété V. Ils dépendent de cinq paramètres; deux de ces plans se coupent en un point et un seul.

En dehors des droites Δ , plans Π_2 et Π_3 situés sur ces plans Π_1 , il existe sur la variété V des plans π_2 , dépendant de neuf paramètres.

Le lieu des droites Δ passant par un point peut être considéré comme décrit, soit par une triple infinité de plans π_2 , soit par une simple infinité de plans Π_1 .

2^o *Variétés L lieux de droites D.* — Sur chaque droite D sont situés trois points exceptionnels. Il y a donc trois nappes de tels points. Si n_1, n_2, n_3 et n sont les nombres de dimensions de ces nappes et de la variété L, on a

$$n_1 + n_2 + n_3 = 2n - 2.$$

Il y a trois cas à distinguer :

Premier cas : plans $\mathcal{Q}$. — Ces plans comprennent des droites D passant par un point fixe B de la variété V. Donc

$$n_1 = 0, \quad n_2 = n_3 = n - 1.$$

Le lieu des droites D passant par un même point est un plan $\mathcal{Q}_5$, à cinq dimensions. On en déduit l'existence de plans $\mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3, \mathcal{Q}_4$.

Dans un plan $\mathcal{Q}_5$, le lieu des deux points exceptionnels autres que B situés sur chaque droite D est une quadrique Q à discriminant non nul.

Si cette quadrique passe par B, ce point exceptionnel est double pour toutes les droites D passant par B, et triple sur celles qui touchent Q. Si elle ne passe pas par B, ce point est simple pour toutes les droites D passant par ce point. Le fait, pour un point exceptionnel B, de compter pour plus que 1 dans la recherche des points exceptionnels d'une droite D, ne dépend donc que de ce point et non de la droite D.

La quadrique Q contient deux séries triplement infinies de plans à deux dimensions. Ils sont des deux espèces différentes (π_2 et Π_2), définies ci-dessus.

Deuxième cas : plans $\mathcal{L}$. — Un seul des nombres n_1, n_2, n_3 a la valeur $n - 1$. Donc $n_1 + n_2 = n_3 = n - 1$. Les deux premières nappes sont des surfaces planes (donc nécessairement des plans situés sur la variété V), et telles qu'en joignant un point quelconque de l'une à un

point quelconque de l'autre on ait une droite D. On ne peut pas obtenir de telles variétés en prenant pour ces nappes des plans Π_1, Π_3 ou Π_2 . Mais les plans π_2 peuvent s'associer deux à deux de manière à vérifier cette condition. On a alors des variétés $\mathcal{L}_5$, dépendant de neuf paramètres. Dans ces variétés, la troisième nappe du lieu de points exceptionnel est un plan Π_4 , dit *plan de base de la variété* $\mathcal{L}_5$.

Il existe des variétés $\mathcal{L}_5$ (spéciales) pour lesquelles les plans π_2 et π'_2 constituant les deux premières nappes sont confondues.

De ces variétés, on déduit évidemment l'existence de variétés $\mathcal{L}_4$ et $\mathcal{L}_3$, obtenues en remplaçant un ou deux des plans π_2 et π'_2 par des droites de ces plans.

Troisième cas : plans $\mathfrak{M}$. — Ce sont ceux pour lesquels les nombres n_1, n_2, n_3 sont tous inférieurs à $n - 1$. Leur énumération complète est plus longue que pour les cas précédents. Une catégorie particulièrement intéressante est celle des variétés $\mathfrak{M}_9$, lieux des variétés $\mathcal{L}_5$ ayant un plan de base donné.

SÉANCE DU 12 MAI 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Communications :

M. A. Lévy : *Sur une généralisation des fractions continues et sur leur application à la représentation des nombres par des formes du deuxième degré.*

M. Drach : *Sur la précession dans le mouvement d'un solide pesant de révolution fixé par un point de son axe.*

Le mouvement de l'axe d'un solide homogène pesant de révolution qui a un point fixe, O, sur cet axe (cas de Lagrange) est représenté géométriquement par le déplacement du point P où cet axe Oz, dirigé vers le centre de gravité G, rencontre une sphère de centre O et de rayon 1. On sait que la courbe décrite par P est comprise entre deux parallèles, correspondant aux valeurs u_1, u_2 de $\cos \theta$ où l'on désigne par θ la *distance zénithale* (angle de Oz avec la verticale Oz₁); l'orientation du plan π_1 Oz est fixée par l'*azimut* ϖ et la *précession* est l'angle $\varpi + \frac{\pi}{2}$.

L'étude *complète* de l'arc de trajectoire compris entre les parallèles extrêmes, parcouru dans une demi-période de temps, se fait de la manière la plus simple quand on choisit comme paramètres du mouvement, avec u_1, u_2 , la constante u_0 qui, lorsqu'elle se trouve entre u_1 et u_2 , définit la position de P où la variation de l'azimut (ou de la précession) change de sens. Ayant fixé u_1 et u_2 , la variation de u_0 donnera une suite continue de trajectoires, dont les extrêmes sont des circonférences tangentes aux parallèles extrêmes, qui correspondent à des mouvements de Poincot. Les valeurs remarquables de u_0 sont les valeurs u'_1, u'_2 données par l'intersection des plans de ces circonférences avec la verticale et la demi-somme $\sigma = \frac{u'_1 + u'_2}{2}$; les conclusions dépendent du signe de $u_1 + u_2$.

On trouve, en particulier, que *la variation totale de l'azimut (ou de la précession) dans une demi-période de temps est positive* (elle s'annule pour l'un des mouvements de Poincot). On sait que cette proposition a été établie par M. Hadamard (*Bulletin des Sciences math.*, 1895) à l'aide du théorème de Cauchy pour les fonctions de variables complexes.

SÉANCE DU 26 MAI 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Communication :

M. le commandant Barré : *Sur les courbes dont les normales principales rencontrent deux droites fixes.*

1. GÉNÉRALITÉS ET MISE EN ÉQUATION DU PROBLÈME. — La seule étude qui à notre connaissance fasse mention des courbes dont les normales principales rencontrent deux droites fixes, et encore indirectement, et sans mentionner cette propriété, est le Mémoire d'Hazzidakis sur les courbes indéformables qui engendrent une surface dont elles forment une famille de géodésiques (*Journal de Crelle*, t. 93, 1883, p. 120 et suiv.) (1). Nous en avons nous-même rencontré une variété

(1) Notre camarade et confrère, M. le commandant Marmion, nous a signalé la curieuse remarque suivante : Paul SERRET dans sa *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure* (p. 96) parle bien explicitement de ces courbes, mais il y met en doute leur existence.

dans notre Mémoire *Application de la fonction cinématique à la théorie des surfaces engendrées par une courbe variable*, celle des hélices dont la normale principale rencontre une droite fixe. Ces hélices particulières avaient d'ailleurs déjà été l'objet de quelques études signalées dans le Mémoire précité.

Prenons les axes suivants : Oz perpendiculaire commune aux droites Δ et Δ' que rencontrent les normales principales, O milieu de la plus courte distance, Ox et Oy dans un plan parallèle à Δ et à Δ' et bissectrices de leurs directions. Soient $2a$ la plus courte distance de Δ et de Δ' , 2θ leur angle aigu; on traite sans aucune difficulté les deux équations différentielles du second ordre définissant ces courbes et dont immédiatement on a les intégrales premières :

$$(1) \quad x \frac{dz}{ds} - z \frac{dx}{ds} - a \cot \theta \frac{dy}{ds} = c_1, \quad y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} - a \tan \theta \frac{dx}{ds} = c_2$$

(c_1, c_2 , const.).

En combinant ces équations avec les équations du second ordre initiales et celle que l'on obtient en différentiant la relation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

on obtient

$$(2) \quad \frac{dx}{ds} = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\Delta_2}{\Delta_0}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{\Delta_3}{\Delta_0},$$

où les Δ sont des polynômes en x, y, z . On en conclut que la courbe étudiée se trouve sur la surface d'équation

$$(3) \quad \Delta_0^2 - (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2) = 0.$$

Cette équation contient de fait Δ_0 en facteur. Cette solution parasite est constituée par la surface réglée s'appuyant sur Δ, Δ' , et l'ombilicale. En l'éloignant on voit que les courbes Γ étudiées se trouvent sur une surface du quatrième degré Σ .

2. INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU PROBLÈME. — En employant une très intéressante méthode due à M. Hazzidakis, on trouve

$$(4) \quad 2 \frac{x}{a} = e^{\int_{\gamma_1}^z \theta_1 dz} - \frac{\partial_1}{a^2} e^{-\int_{\gamma_1}^z \theta_1 dz}, \quad 2 \frac{y}{a} = e^{\int_{\gamma_2}^z \theta_2 dz} - \frac{\partial_2}{a^2} e^{-\int_{\gamma_2}^z \theta_2 dz}$$

(γ_1, γ_2 , const.)

en posant

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = z^2 + a^2 \cot^2 \theta - c_1^2, \quad \delta_2 = z^2 - a^2 \tan^2 \theta - c_2^2, \\ \Delta = \sqrt{-P_4(z)}, \\ \theta_1 = \frac{1}{\Delta} \left[a \tan^2 \theta - \frac{\delta_2 z}{1 + \Delta} \right], \quad \theta_2 = \frac{1}{\Delta} \left[a \cot^2 \theta - \frac{\delta_1 z}{1 + \Delta} \right], \\ L = \frac{a}{\sin \theta \cos \theta} z - c_1 c_2, \quad P_4 = \delta_1 \delta_2 - L^2. \end{array} \right.$$

La présence de z_1 et z_2 montre que c_1 et c_2 étant données, la courbe dépend encore de deux constantes arbitraires, ce qui s'explique très bien en égard à ce que la courbe se trouve sur une surface Σ définie par c_1 et c_2 . Des relations (5) on peut d'ailleurs trouver l'équation de Σ sous la forme

$$(6) \quad \delta_1 y^2 - 2 L x y + \delta_2 x^2 + P_4(z) = 0.$$

Dans la discussion de ces courbes la réalité des racines de P_4 joue un rôle capital. Deux racines sont toujours réelles. Les quatre le sont si

$$(7) \quad \frac{a^2 c_1^2 c_2^2}{\sin^3 \theta \cos^4 \theta} - \frac{1}{3} \frac{c_1^2 c_2^2}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} (2a^2 + c_1^2 + c_2^2) \\ \times \left[4a^2 (c_1^2 \tan^2 \theta + c_2^2 \cot^2 \theta - a^2) + \frac{1}{9} (2a^2 + c_1^2 + c_2^2)^2 \right] \\ + \frac{16}{27} (c_1^2 \tan^2 \theta + c_2^2 \cot^2 \theta - a^2) \\ \times \left[a^2 \left(\frac{c_1^2}{\cos^2 \theta} + \frac{c_2^2}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{1}{4} (c_1^2 + c_2^2)^2 \right] \geq 0,$$

l'égalité correspondant à une racine double. Le premier membre contient le facteur double $\left(\frac{c_1^2}{\cos^2 \theta} - \frac{c_2^2}{\sin^2 \theta} \right)^2$ qui ne forme pas séparatrice, mais qui, lorsqu'il est nul, correspond aux cercles solutions évidentes de la question. La véritable séparatrice (S) se réduit à une sextique à quatre rebroussements, symétrique par rapport aux axes de coordonnées (axes auxiliaires c_1, c_2) et qui peut être étudiée avec précision. Bornons-nous à signaler qu'elle touche les droites du facteur double symétriques par rapport aux axes et à l'origine. A l'extérieur de la séparatrice, P_4 a deux racines réelles; à l'intérieur, quatre racines. Le théorème de Budan permet de voir que $-a$ est toujours compris entre les deux plus grandes racines. $-a$ entre les plus petites sauf dans les quatre régions très fines déterminées dans les angles de S par les droites $c_2 = \pm c_1 \tan \theta$.

3. PROPRIÉTÉS DIVERSES DES SURFACES Σ ET DES COURBES Γ :

1° Les surfaces Σ sont des quartiques contenant l'ombilicale, cas particulier des surfaces de Kummer, ayant à l'infini une droite double, la droite de jonction des points à l'infini de Δ et de Δ' . Les sections par des plans parallèles à Δ et à Δ' sont des coniques : hyperboles lorsque $P_4(z) < 0$, ellipses imaginaires lorsque $P_4(z) > 0$, droites doubles pour $P_4(z) = 0$. Ces courbes ont leur centre sur la perpendiculaire commune à Δ et à Δ' .

2° Parmi les courbes Γ il existe deux familles de cercles : elles correspondent à la relation $c_2 = \pm c_1 \tan \theta$.

3° Un plan passant par Δ (ou par Δ') et par un point de la courbe tourne toujours dans le même sens lorsque le point décrit la courbe d'une façon continue.

4° Le moment par rapport à Δ (ou à Δ') d'un segment unité porté par la tangente à la courbe est constant.

5° Sauf dans un cas particulier qui sera signalé ci après :

Les courbes Γ n'ont aucun point réel à l'infini dans une direction déterminée. Elles n'ont aucun point singulier et sont formées d'une infinité de spires de grandeur variable, dont chacune se raccorde à la précédente dans les plans parallèles à Δ et à Δ' correspondant aux racines de P_4 et que nous désignerons sous le nom de Plafonds.

4. CLASSIFICATION DES COURBES Γ . — Deux grandes classes :

1° *Courbes générales* (correspondant à un polynôme P_4 à racines distinctes). — Si P_4 a deux racines réelles, ces courbes sont tout entières entre les deux plafonds correspondants. Si P_4 a quatre racines, les quatre plafonds déterminent deux régions, comprise chacune entre un plafond externe et son voisin, dans chacune desquelles on trouve des courbes répondant à la question.

2° *Courbes spéciales* (correspondant au cas d'une racine multiple de P_4). — Les cercles appartiennent à ce groupe; il n'en sera plus question ci-après.

a. *Cas d'une racine double*. — On signale seulement que les intégrales des formules (5) sont pseudo-elliptiques : on trouve des courbes particulièrement intéressantes correspondant aux sommets (sur les axes) de la séparatrice. Aspect d'une courbe à deux plafonds.

b. *Cas d'une racine triple*. — Elles sont à deux plafonds. L'un d'eux est d'ailleurs un plan asymptote. La courbe a un aspect nettement différent des autres : Partant asymptotiquement de l'un des

plafonds arrive à toucher le second, puis continue en se dirigeant asymptotiquement vers l'autre plafond : *il n'y a plus de spires*. Ces courbes correspondent aux rebroussements de la séparatrice.

Remarque. — En se bornant aux éléments réels on ne peut avoir ni une racine quadruple, ni deux racines doubles.

SÉANCE DU 9 JUIN 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Communications :

M. A. Lévy : *Sur l'itération des polynomes et ses rapports avec les fractions continues généralisées.*

M. Drach : *Sur l'intégration par quadratures de l'équation différentielle de la balistique extérieure.*

L'équation de la balistique extérieure, dite aussi *équation de l'hodographe*

$$\frac{dV \cos \alpha}{d\alpha} = \frac{cV F(V)}{g},$$

où V désigne la vitesse du projectile, α l'angle de la tangente à la trajectoire avec l'horizon, prend, lorsque l'on pose

$$\sin \alpha = v, \quad V = u, \quad \frac{c}{g} F(V) = \varphi(u),$$

la forme

$$\frac{dv}{du} = \frac{1-v^2}{u(v+\varphi)}.$$

Elle fait donc partie des équations $\frac{dv}{du} = \frac{P_3(v)}{P_1(v)}$, où P_1 et P_3 sont des polynomes en v de degré marqué par l'indice, qui ont donné lieu à de nombreux travaux (Z. Elliot, R. Liouville, P. Appell, etc.); j'ai observé qu'elle peut être prise comme *forme canonique* de ces équations, forme qu'on obtient en transformant respectivement trois solutions particulières en 1 , -1 , ∞ et en modifiant la variable indépendante.

Un changement de variable u , immédiat, permet aussi de l'écrire

$$(1) \quad \frac{dv}{du} = \frac{1-v^2}{v-\rho}.$$

Sous cette forme, j'ai déterminé comment l'on doit choisir la fonction $\rho(u)$, pour que l'équation (1) présente un des cas de réduction indiqué par ma théorie générale d'intégration logique et permettant l'intégration de (1) *par quadratures*. Ces cas sont ceux où, pour l'équation aux dérivées partielles correspondante

$$U(z) \leftarrow \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{1-v^2}{v+\rho} \right) = 0,$$

il existe pour l'un des éléments z , $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^n$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ une expression rationnelle en v ; cette expression est unique sauf lorsque z est rationnel (cf. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 30 mars 1914).

Dans ces différents cas, les coefficients de l'invariant rationnel sont, ainsi que ρ , définis par un système d'équations dont les premiers membres sont, dans le cas le plus général, des périodes d'intégrales de la forme $\int \sqrt[n]{K} dv$, où K est rationnel en v , ou des quotients de périodes d'intégrales de la forme

$$\int M(v) e^{Nv} dv,$$

où M et N sont rationnels en v et dont les seconds membres sont des constantes. Les périodes en question peuvent être des intégrales de double contour (Jordan) relatives à deux points singuliers de la fonction à intégrer.

Il y a, bien entendu, de nombreux cas de réduction que l'on peut caractériser.

J'ai examiné en détail les différents cas d'intégrabilité de l'équation de l'odographe signalés antérieurement [cas de d'Alembert, de Legendre et ceux très nombreux indiqués par M. François Siacci (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1901)] et montré comment ils se placent dans l'ensemble des cas de réduction : on trouve ainsi les raisons du succès des calculs ingénieux de ces géomètres et de la difficulté qu'il y a à les généraliser, mais l'on possède aussi la méthode qui permet de le faire régulièrement.

SÉANCE DU 23 JUIN 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Communications :

M. Risser : *Sur le problème des tables de mortalité par âges à l'entrée des rentiers et une application de l'équation de Volterra.*

En tenant compte de ce que la formule de Makeham,

$$(1) \quad v_x = \frac{K_1}{d_1^x} g_1^{q_1^x},$$

interpole les différentes tables de mortalité avec une approximation suffisante, M. Poterin du Motel a été conduit à en faire une application aux tables des rentiers par âges à l'entrée.

Il a adopté pour valeur du taux de mortalité

$$(2) \quad t_x = a + \frac{bq^x}{c^x}$$

[voir *Usage et ajustement des tables de mortalité par âges à l'entrée* (*Bulletin des Actuaire*s, 1893)] et par suite pour $v_{(x,y)}$

$$v_{(x,y)} = \frac{K}{d^x} s^{q^{x-ny}},$$

où x est l'âge actuel, y l'âge à l'entrée.

Or, si l'on suppose que K_1 , g_1 de la formule (1) sont des fonctions de y , et si l'on veut remplacer n têtes d'âges $x_1, x_2, \dots, x_n$ par n têtes de même âge x_m , on est amené à étudier l'équation

$$nq_1^{x_m} \text{Log } g_{1,n} = \sum_1^n q_1^{x_i} \text{Log } g_{1,i}$$

et si l'on admet que toutes les têtes sont entrées ensemble, on voit que l'on est conduit à prendre

$$g_1 = s^{q_1 - y^m},$$

L'expression représentative du taux de mortalité $a + bq^{x-ny}$, que l'on déduit de la loi de survie, peut être généralisée; en effet,

l'expression

$$(3) \quad a + bq^{x-y} \left[i + \frac{x-y}{\omega} z_1 + \dots + \left(\frac{x-y}{\omega} \right)^n z_n \right] = a + bq^{x-y} \varphi(x-y)$$

[dans laquelle ω est au moins égale à la plus grande valeur que peut prendre $(x-y)$ et au plus égale à l'âge limite du groupe] jouit de la propriété classique que l'on peut substituer aux têtes $x_1, x_2, \dots, x_n$, entrées aux âges $y_1, y_2, \dots, y_n$, n têtes d'âge X , introduites à l'âge Y , à condition de prendre

$$x_i - y_i = X - Y \quad \text{avec} \quad i = (1, 2, \dots, n).$$

De là, par intégration de l'équation $-\frac{v'_x}{v_x} = a + bq^{x-y} \varphi(x-y)$, on déduit le nombre des assurés $v(x, y)$.

Deuxième méthode. — On peut écrire

$$\int_{x_0}^x v(x, y) dy = F(x),$$

où $F(x)$ est le nombre des rentiers d'âge x , quel que soit leur âge à l'entrée et x_0 l'âge limite inférieur à l'admission. $F(x)$ est finie et déterminée dans l'intervalle (x_0, x) et nulle pour $x = x_0$; sa dérivée est déterminée, car on suppose que x est inférieur à l'âge limite du groupe.

$v(x, y)$ peut être remplacée par $\frac{K}{dx} s^{q^{x-y}} f(x-y)$, où f est la fonc-

tion inconnue. Si l'on pose $x-y = z$, on est ramené à

$$\int_0^{x-x_0} \frac{K}{dx} s^{q^{x(1-p)-pz}} f(z) dz = F(x)$$

qui est une équation de Volterra de première espèce, avec noyau borné dans l'intervalle d'intégration, que l'on résout par le procédé classique de M. Volterra, ou mieux encore ici par la méthode des approximations successives de M. Picard, qui permet de calculer les éléments $f_0, f_1, \dots, f_n$, de $f(z)$.

Sur le problème de la répartition par âges dans les milieux à effectif constant et l'équation de Volterra.

Si $l(X)$ est la loi de survie, $\varphi(x)$ la loi caractéristique des entrées

à l'âge x , on est conduit à écrire l'équation

$$(1) \quad l(X) + \int_0^X \varphi(x) l(X-x) dx = 1,$$

si l'on veut exprimer que le milieu est à effectif constant, à condition de prendre

$$l(0) = 1,$$

et l'origine des âges égale à 0 au lieu de x .

De (1), on déduit les équations

$$(2) \quad l(X) + \int_0^X \varphi(X-x) l(x) dx = 1,$$

$$(3) \quad \varphi(X) + \int_0^X \varphi(x) \frac{\partial l(X-x)}{\partial X} dx = -l(X),$$

dont l'utilisation se comprend instantanément.

Il est évident que toutes les fois que l'on a pour forme de survie $\sum P_i(x) e^{\alpha_i x}$, P_i étant un polynôme de degré $(i-1)$, et α_i une racine d'ordre i d'une certaine équation caractéristique

$$\alpha_0 \gamma^n + \alpha_1 \gamma^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0,$$

on peut dire que $\sum P_i(x) e^{\alpha_i x}$ peut être considérée comme l'intégrale de l'équation différentielle

$$(4) \quad \alpha_0 \frac{d^n l}{dx^n} + \dots + \alpha_n l = 0,$$

caractéristique de la loi de survie.

Des dérivées d'ordre 1, 2, ..., n du premier membre de l'équation (1) par rapport à X , on tire en tenant compte de (4)

$$\Lambda_{n-1} \varphi(X) + \dots + \Lambda_0 \varphi^{(n-1)}(X) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$(5) \quad \varphi(X) = \frac{\alpha_n}{\Lambda_{n-1}} + \sum Q_j(x) e^{\beta_j x}.$$

On peut encore, en employant la méthode des approximations successives de M. Picard, trouver la forme de φ quand la fonction de survie

$$(6) \quad e^{A+Bx+\sum e^{\gamma_i x} f(x)}$$

est du type généralisé de M. Quiquet.

On peut remplacer cette forme généralisée par une série d'expo-

nentielles, et arrêter le développement au terme d'ordre n (n étant choisi de telle façon que la différence entre la fonction et la série soit plus petite que ε dans le champ choisi), φ est alors de la forme (5).

Si l'on fait croître n indéfiniment, et si l'on substitue à $l(X)$ une série qui soit uniformément convergente dans l'intervalle d'âges considéré, on est ramené à une équation de Volterra, qui correspond dans le cas envisagé à une équation différentielle à coefficients constants d'ordre infini pour la représentation de φ .

Si donc $l(X)$ est du type (5), la loi φ sera aussi de ce type.

SÉANCE DU 7 JUILLET 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Communications :

M. L. Bachelier : *Sur la théorie des corrélations.*

Deux quantités peuvent dépendre l'une de l'autre sans que leur liaison soit de nature fonctionnelle; la taille du fils dépend de la taille de son père, mais si l'on connaît la taille du père on ne peut en déduire que des probabilités pour la taille du fils.

Pour se faire une idée de la liaison qui existe entre deux quantités H et K , on fait ordinairement usage du coefficient de corrélation de M. Karl Pearson. On rapporte les deux quantités à leurs moyennes respectives, ce sont donc les écarts y et x relativement à cette moyenne que l'on étudie. Par exemple, ce que l'on considère comme étant les tailles y et x du père et de son fils, ce sont les écarts relativement à la taille moyenne.

Le coefficient de corrélation de Pearson est la quantité r définie par l'égalité

$$r = \frac{VM_{xy}}{\sqrt{VM_{x^2}} \sqrt{VM_{y^2}}},$$

où le signe VM désigne la valeur moyenne. Le coefficient de corrélation est toujours compris entre -1 et $+1$, il est égal à ± 1 si chaque valeur de y impose pour x une valeur proportionnelle. Si les quantités x et y sont indépendantes, le coefficient de corrélation est nul, mais il peut être nul sans qu'il y ait indépendance.

Pratiquement, pour obtenir le coefficient de corrélation, on rem-

place les valeurs moyennes théoriques par leurs valeurs observées. Par exemple, si $y_1, y_2, \dots, y_\mu$ sont les tailles des pères, et $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ les tailles de leurs fils respectifs obtenues par μ couples de mesures, on calcule le coefficient de corrélation par la formule

$$r = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_\mu y_\mu}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_\mu^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_\mu^2}}.$$

On commet ainsi une certaine erreur. M. Pearson a obtenu une formule faisant connaître la probabilité pour que cette erreur ait une valeur donnée. Cette formule, dont M. Lucien March a donné une démonstration très simplifiée, suppose que le nombre μ des observations est très grand et que la loi de distribution des valeurs de x et de y est normale, c'est-à-dire qu'elle admet que la probabilité des valeurs simultanées x et y de H et de K est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{A x^2 - 2 B x y + C y^2}{2 (A C - B^2)}}}{2 \pi \sqrt{A C - B^2}} dx dy,$$

où A, B, C sont des constantes, le coefficient de corrélation est alors $r = \frac{B}{\sqrt{A} \sqrt{C}}$.

Le cas où la loi de répartition est normale est spécialement intéressant; il s'applique, par exemple, quand les quantités x et y varient d'après l'hypothèse des causes infinitésimales; il s'appliquerait dans le cas de la taille du père et de son fils, mais il est cependant particulier et il importe d'obtenir la loi de l'erreur commise sur r dans le cas général.

Soit $\varphi(x, y) dx dy$ la probabilité des valeurs simultanées x et y des quantités H et K. La somme des probabilités de tous les cas possibles ayant pour valeur un et les valeurs moyennes de x et de y étant nulles, on a

$$\begin{aligned} \int \int \varphi(x, y) dx dy &= 1, \\ \int \int x \varphi(x, y) dx dy &= 0, \quad \int \int y \varphi(x, y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient de corrélation r est

$$r = \frac{\int \int x y \varphi(x, y) dx dy}{\left(\int \int x^2 \varphi(x, y) dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \int y^2 \varphi(x, y) dx dy \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour obtenir l'erreur commise sur r , on pose

$$\begin{aligned} A &= \iint y^2 \varphi(x, y) dx dy, \\ B &= \iint xy \varphi(x, y) dx dy, \quad C = \iint x^2 \varphi(x, y) dx dy, \\ L &= \iint x^4 \varphi(x, y) dx dy, \\ R &= \iint x^2 y^2 \varphi(x, y) dx dy, \quad Q = \iint y^4 \varphi(x, y) dx dy, \\ N &= \iint x^3 y \varphi(x, y) dx dy, \quad P = \iint x y^3 \varphi(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

La probabilité pour que la valeur obtenue pour r soit erronée de la quantité ε est alors

$$\frac{\sqrt{2} \sqrt{\mu} AC \sqrt{AC} e^{-\frac{2 \mu A^3 C^3 \varepsilon^2}{LB^2 A^2 + QB^2 C^2 + 2ACR(2AC + B^2) - 4NA^2 BC - 4PC^2 BA}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{LB^2 A^2 + QB^2 C^2 + 2ACR(2AC + B^2) - 4NA^2 BC - 4PC^2 BA}} d\varepsilon.$$

L'erreur varie en raison inverse de la racine carrée du nombre μ des observations.

La démonstration de ce résultat est assez compliquée, elle repose sur la formule donnée au n° 565 de mon *Traité du calcul des probabilités*, modifiée d'après les remarques exposées au n° 563 du même Ouvrage.

Pratiquement, les constantes se déterminent par les valeurs observées; on a, par exemple,

$$R = \frac{x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + \dots + x_\mu^2 y_\mu^2}{\mu}, \quad N = \frac{x_1^3 y_1 + x_2^3 y_2 + \dots + x_\mu^3 y_\mu}{\mu}.$$

Sur les décimales du nombre π .

Un nombre étant donné, écrit dans le système de numération de base n (c'est-à-dire de n chiffres), on peut se demander si la succession de ses chiffres présente le caractère de la fortune, si ces chiffres se suivent comme si le hasard seul en avait régi l'apparition.

Par exemple, on peut se demander si les 707 premières décimales du nombre π , calculées par Shanks, peuvent être considérées comme se suivant au hasard.

Le calcul des probabilités ne peut permettre, en aucun cas, d'affirmer la fortune, mais il peut faire connaître une sorte de critérium permettant de rejeter l'hypothèse de la fortune quand elle est inadmissible.

Si les n chiffres $A_1, A_2, \dots, A_n$ se succèdent au hasard, la probabilité de l'apparition de chacun d'eux est $\frac{1}{n}$, et la probabilité pour que, sur un grand nombre μ de chiffres, il y ait $\frac{\mu}{n} + x_1$ chiffres A_1 , $\frac{\mu}{n} + x_2$ chiffres $A_2, \dots, \frac{\mu}{n} + x_{n-1}$ chiffres A_{n-1} est donnée par la formule du n° 573 de mon *Traité du calcul des probabilités*, cette probabilité est

$$\frac{e^{-\frac{n}{\mu}[x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_1 x_2 + \dots + x_{n-2} x_{n-1}]}}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1} \left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^n} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}.$$

Les systèmes de valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ qui ont même probabilité vérifient la relation

$$(1) \quad x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_1 x_2 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} = r.$$

r étant un paramètre. En d'autres termes, les surfaces d'égale probabilité dans l'espace à $(n-1)$ dimensions sont des ellipsoïdes ayant pour équation (1).

La probabilité pour que la quantité

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_1 x_2 + \dots + x_{n-2} x_{n-1}$$

ait pour valeur ρ^2 est

$$2 \left(\frac{n}{\mu}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\rho^{n-2} e^{-\frac{n}{\mu}\rho^2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} d\rho,$$

Γ désignant l'intégrale eulérienne. La probabilité pour que ρ soit compris entre 0 et R s'obtient en intégrant l'expression précédente entre 0 et R ; des intégrations successives donnent pour cette probabilité

$$\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu}} \int_0^R e^{-\frac{n}{\mu}\rho^2} d\rho = \frac{e^{-\frac{n}{\mu}R^2}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{2^{\frac{n}{2}-1} \left(\sqrt{\frac{n}{\mu}} R\right)^{n-3}}{1.3.5\dots(n-3)} + \frac{2^{\frac{n}{2}-2} \left(\sqrt{\frac{n}{\mu}} R\right)^{n-5}}{1.3.5\dots(n-5)} + \dots + 2\sqrt{\frac{n}{\mu}} R \right]$$

quand n est pair, et

$$1 - e^{-\frac{n}{\mu} R^2} \left[\frac{\left(\sqrt{\frac{n}{\mu}} R \right)^{n-3}}{\left(\frac{n-3}{2} \right)!} + \frac{\left(\sqrt{\frac{n}{\mu}} R \right)^{n-5}}{\left(\frac{n-5}{2} \right)!} + \dots + \frac{n}{\mu} R^2 + 1 \right]$$

quand n est impair. Ces probabilités peuvent toujours se calculer avec les tables de logarithmes et les tables de la fonction Θ . La valeur moyenne quadratique de ρ est $\sqrt{\frac{\mu}{n}} \sqrt{\frac{n-1}{2}}$; la valeur la plus probable de ρ est $\sqrt{\frac{\mu}{n}} \sqrt{\frac{n-2}{2}}$; la valeur moyenne de ρ a une expression différente suivant que n est pair ou impair.

Pour reconnaître s'il est possible d'admettre que la suite des chiffres exprimant un nombre donné dans le système de base n présente le caractère de la fortuité, on calcule d'abord les écarts $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, puis la quantité

$$(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_1 x_2 + \dots + x_{n-2} x_{n-1})^{\frac{1}{2}},$$

qui est la valeur observée de ρ , soit α . Si la probabilité, donnée par les formules ci-dessus, pour que ρ soit supérieur à α est très petite ou, au contraire, très voisine de un, il faut en conclure que les chiffres ne se succèdent pas fortuitement, car il est alors inadmissible que le hasard ait produit des écarts aussi grands ou aussi petits.

Dans le cas des décimales de π , $n = 10$, $\mu = 707$; la valeur moyenne de ρ est 17,34, la moyenne quadratique est 17,84, la valeur la plus probable est 16,82 et la valeur probable est 17,5. Il n'y a pas 3 chances sur 100 pour que ρ soit inférieur à 10, ni 3 chances sur 1000 pour que ρ soit supérieur à 30. La valeur α calculée est 16. Ce résultat est très satisfaisant; autant que l'expérience permet de l'affirmer, les décimales du nombre π se succèdent au hasard.

SÉANCE DU 27 OCTOBRE 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. le général Fetter, présenté par MM. Borel et Lebesgue; MM. A. Errera, pré-

senté par MM. Lebesgue et Montel; Verdier, présenté par MM. Alméras et Grévy; Varopoulos, présenté par MM. Montel et Remoundos.

Communication :

M. A. Lévy : *L'application des fractions continues à la recherche des formes quadratiques de déterminant donné permet de trouver des substitutions linéaires qui transforment ces formes en formes équivalentes.*

SÉANCE DU 10 NOVEMBRE 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société: MM. Walsch, présenté par MM. Hadamard et Drach; Kumasuke Ogura, présenté par MM. Hadamard et Lebesgue; Rowe, présenté par MM. Drach et Hadamard; Teiji Takagi, présenté par MM. Hadamard et A. Lévy.

Communications :

M. Gambier : *Sur la déformation des surfaces et un exemple déduit de la série de Fredholm.*

M. S.-N. Bose : *The horpolhode of Poinso.*

The theorem that the horpolhode of Poinso has no point of inflexion, has been variously proved by MM. de Sparre, Mannheim, Saint-Germain, Routh, Lecornu and others.

The earlier proofs sometimes used properties of elliptic function, and often a long calculation is necessary, so that a simple direct proof is very much to be desired. Recently in *Bull. de la Soc. math. de France* (t. XXXIV), M. Lecornu has given a simple proof by, considering the motion of the normal of the horpolhode cone. The following is a simple proof of the theorem based solely on the dynamical consideration of the Poinso motion, hence I hope it will be found interesting.

Let A, B, C, be the three principal moments of inertia of a body fixed at a point O, and OI , and OI' , are the two successive positions

of the instantaneous axis at time t , and $t + dt$. The ends I, I', etc., on the invariable plane trace out the horpolhode, lengths OI, OI', etc., being proportional to the resultant angular velocity at any instant. At a point of inflexion, the horpolhode will have a stationary tangent; i. e. the total change of the vector II', will be along its own length.

Remembering that II' has components proportional to $\dot{\omega}_1 dt$, $\dot{\omega}_2 dt$, $\dot{\omega}_3 dt$, along the three principal moving axes, the condition notice above reduces analytically to

$$(1) \quad \frac{\ddot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 \dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_3 \dot{\omega}_2}{\dot{\omega}_1} = \frac{\ddot{\omega}_2 - \dot{\omega}_3 \dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_1 \dot{\omega}_3}{\dot{\omega}_2} = \frac{\ddot{\omega}_3 - \dot{\omega}_1 \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_2 \dot{\omega}_1}{\dot{\omega}_3} = \lambda,$$

we have from Euler equations

$$A \dot{\omega}_1 = (B - C) \omega_2 \omega_3,$$

$$B \dot{\omega}_2 = (C - A) \omega_3 \omega_1,$$

$$C \dot{\omega}_3 = (A - B) \omega_1 \omega_2,$$

from which

$$A \ddot{\omega}_1 = (B - C) (\dot{\omega}_2 \omega_3 + \dot{\omega}_3 \omega_2),$$

$$B \ddot{\omega}_2 = (C - A) (\dot{\omega}_3 \omega_1 + \dot{\omega}_1 \omega_3),$$

$$C \ddot{\omega}_3 = (A - B) (\dot{\omega}_1 \omega_2 + \dot{\omega}_2 \omega_1).$$

Substituting in (1) we have

$$\frac{\dot{\omega}_3}{\omega_3} (A + B - C) - \frac{\dot{\omega}_2}{\omega_2} (A + C - B) = \lambda (B - C),$$

$$\frac{\dot{\omega}_1}{\omega_1} (B + C - A) - \frac{\dot{\omega}_3}{\omega_3} (A + B - C) = \lambda (C - A),$$

$$\frac{\dot{\omega}_2}{\omega_2} (C + A - B) - \frac{\dot{\omega}_1}{\omega_1} (B + C - A) = \lambda (A - B),$$

so that

$$(2) \quad \frac{\dot{\omega}_1}{\omega_1} (B - C) (B + C - A) + \frac{\dot{\omega}_2}{\omega_2} (C - A) (C + A - B) \\ + \frac{\dot{\omega}_3}{\omega_3} (A - B) (A + B - C) = 0.$$

But remembering that

$$A \omega_1 \dot{\omega}_1 + B \omega_2 \dot{\omega}_2 + C \omega_3 \dot{\omega}_3 = 0,$$

$$A^2 \omega_1 \dot{\omega}_1 + B^2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + C^2 \omega_3 \dot{\omega}_3 = 0,$$

we have

$$\frac{\omega_1 \dot{\omega}_1}{BC(B - C)} = \frac{\omega_2 \dot{\omega}_2}{CA(C - A)} = \frac{\omega_3 \dot{\omega}_3}{AB(A - B)},$$

hence substituting in (2) we have a necessary condition for the point of inflexion.

$$\frac{BC(B-C)^2}{\omega_1^2} (B+C-A) + \frac{CA(C-A)^2}{\omega_2^2} (A+B-C) + \frac{AB(A-B)^2}{\omega_3^2} (A+B-C) = 0,$$

which is obviously impossible as $B+C-A$, $C+A-B$, $A+B-C$ are all positive, so that the left-hand side is an essentially positive quantity.

Hence there cannot be any point of inflexion on the horpolhode.

SÉANCE DU 24 NOVEMBRE 1920.

PRÉSIDENTE DE M. DRACH.

Élections :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. Lhoste, présenté par MM. Drach et Paul Lévy.

Communications :

M. Gambier : *Sur la déformation des surfaces et un cas d'impossibilité.*

Darboux a établi au Tome III de la *Théorie des surfaces*, page 279, la proposition suivante :

On peut toujours déformer la surface S de telle manière qu'une de ses courbes Γ vienne coïncider avec une courbe quelconque D de l'espace, pourvu que la courbure en chaque point de D ne soit pas égale à la courbure géodésique de Γ au point correspondant.

J'ajouterai à la proposition de Darboux la remarque suivante : Si la courbure de D est différente de la courbure géodésique de Γ , S est recouverte *de part et d'autre* de Γ par la surface S_1 obtenue par la déformation, j'entends recouverte *physiquement*.

Si donc une surface S_1 réelle, applicable sur la surface S , ne recouvre S que d'un côté de Γ , il est *nécessaire* que la courbe D satisfasse à la condition exceptionnelle; or, d'après la conservation de la courbure géodésique, D aura en chaque point son plan osculateur tangent à la surface S_1 . D'autre part, j'ai montré, au *Bul-*

letin des Sciences mathématiques, que S_1 admet D pour *arête de rebroussement* et possède une auto-application qui laisse chaque point de D invariant.

J'avais oublié de montrer qu'il résulte, précisément, de l'étude de Darboux, que, non seulement D est arête de rebroussement de S_1 , mais que, en plus, le plan tangent à S_1 en chaque point de D est osculateur à D .

Je n'ai pas encore élucidé le fait de savoir si, réciproquement, *il suffit* que le rayon de courbure de D , courbe donnée à l'avance comme homologue de Γ , soit égal au rayon de courbure géodésique de Γ , pour qu'il soit possible de déterminer la surface S_1 qui recouvrira S d'un seul côté de Γ (et en double de ce côté). Il peut se faire que D doive, en outre, satisfaire à d'autres conditions pour que la surface S_1 puisse être obtenue.

En tout cas, sur S menons en chaque point de Γ la géodésique tangente en ce point à Γ , toutes ces géodésiques pénètrent, à l'exclusion de l'autre, sur l'une des deux régions déterminées sur S par Γ : c'est cette région de S qui sera recouverte deux fois par la surface inconnue S_1 , l'autre région n'étant pas recouverte. On peut, vraisemblablement, se donner Γ arbitrairement, mais non la région limitée par Γ qui doit être recouverte.

Dans le cas des développables, ces propositions se vérifient immédiatement : la condition *nécessaire* trouvée plus haut est, alors, manifestement *suffisante*.

M. Ch. Michel. *Sur des polynômes qui généralisent, à la fois, les polynômes de Legendre et les polynômes $\cos(n \arccos x)$.*

1. On voit facilement, par identification, que l'équation différentielle

$$(1) \quad (x^2 - 1)y'' + \alpha xy' - n(n + \alpha - 1)y = 0,$$

où α est une constante positive, admet comme intégrale un polynôme V_n défini à un facteur numérique non nul arbitraire près. Ce polynôme est de degré n , et les degrés de ses termes sont tous de même parité que n .

2. Les équations $V_1 = 0$ et $V_2 = 0$ sont, respectivement,

$$x = 0, \quad x^2 - \frac{1}{\alpha + 1} = 0;$$

elles ont toutes leurs racines réelles et distinctes, comprises entre

-1 et $+1$. Cette propriété est, quel que soit $\alpha > 0$, applicable à l'équation $V_n = 0$. Pour l'établir, il suffira de raisonner par induction, en remarquant que V'_n est intégrale de l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y'' + (\alpha + 2)xy' - (n - 1)(n + \alpha)y = 0,$$

qui se déduit de l'équation (1) en remplaçant n par $n - 1$ et α par $\alpha + 2$, positif comme α .

3. D'après cela, $V_n(1)$ est différent de zéro, et, comme V_n est défini à un facteur numérique non nul arbitraire près, on peut supposer que l'on a choisi ce facteur numérique de façon que $V_n(1)$ soit égal à 1. Dans cette hypothèse, $V_n(x)$ est positif pour toute valeur de x supérieure ou égale à 1, du signe de $(-1)^n$ pour toute valeur de x inférieure ou égale à -1 . En outre, $V_n(x)$ est identique, pour $\alpha = 2$, au polynôme X_n de Legendre, et, pour $\alpha = 1$, au polynôme qui a pour expression, dans l'intervalle $(-1, +1)$, $\cos(n \arccos x)$, et, pour toute valeur de x non intérieure à cet intervalle,

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}.$$

4. Comme les polynômes V_n sont de degrés tous différents, il est immédiat que tout polynôme $f(x)$ peut être mis, d'une manière et d'une seule, sous la forme

$$AV_n + BV_p + \dots + LV_t,$$

$A, B, \dots, L$ étant des constantes non nulles, $n, p, \dots, t$ étant rangés dans l'ordre décroissant; n est le degré de $f(x)$.

On a, relativement aux polynômes V_n , et, notamment, relativement aux polynômes $\cos(n \arccos x)$, le théorème suivant, que Laguerre a énoncé et établi seulement dans le cas particulier des polynômes de Legendre (*Œuvres*, t. I, p. 144) :

Le nombre des racines réelles supérieures ou égales à 1 de l'équation $f(x) = 0$, chaque racine comptant pour un nombre égal à son ordre de multiplicité, est au plus égal au nombre des variations de la suite $A, B, \dots, L$.

La démonstration de Laguerre s'applique au cas général, toutefois, avec quelques modifications, tenant à ce que $\frac{2}{2}$ n'est pas nécessairement un nombre entier. Il faut utiliser la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'une équation dont le premier membre

est une fonction quelconque développable suivant la formule de Taylor.

On a les conséquences suivantes, énoncées par Laguerre dans le cas des polynomes de Legendre :

1° *Le nombre des racines réelles inférieures ou égales à -1 de l'équation $f(x) = 0$ est au plus égal au nombre des variations de la suite $(-1)^n A, (-1)^p B, \dots, (-1)^l L$.*

2° *Si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et non intérieures à l'intervalle $(-1, +1)$, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations de la suite $A, B, \dots, L$ et le nombre des racines négatives est égal au nombre des variations de la suite $(-1)^n A, (-1)^p B, \dots, (-1)^l L$.*

3° *Si les nombres μ et μ' de variations des deux suites précédentes ont une somme plus petite que n , l'équation $f(x) = 0$ admet des racines réelles comprises entre -1 et $+1$ ou des racines imaginaires, en nombre au moins égal à $n - (\mu + \mu')$.*

L'analogie avec la règle des signes de Descartes est évidente.

M. A. Lévy : *A tout nombre n on peut faire correspondre une infinité de nombres n' tels que $\sqrt{nn'}$ réduite en fraction continue ait une période de quatre termes.*

SÉANCE DU 3 DÉCEMBRE 1920.

PRÉSIDENTE DE M. DRACH.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : MM. Lhoste, présenté par MM. Drach et P. Lévy ; Bays, présenté par MM. Montel et Vessiot ; Sono, présenté par MM. Hadamard et Montel.

Communications :

M. Gambier : *Sur les mécanismes transformables et déformables.*

M. Wavre : *Sur les développements de Mittag-Leffler.*

Dans sa Note, insérée dans les *Leçons sur les fonctions de variables réelles* de M. Borel (p. 111), M. Painlevé pose la question suivante :

Étant donné un développement de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

existe-t-il un développement de Mittag-Leffler

$$M[f(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_{0n} a_0 + \lambda_{1n} a_1 x + \dots + \lambda_{nn} a_n x^n)$$

tel que la dérivée du développement de $f(x)$ soit identique au développement de la dérivée de $f(x)$; c'est-à-dire tel que

$$M'[f(x)] \equiv M[f'(x)]$$

et cela quel que soit $f(x)$?

On voit aisément, en identifiant les deux membres de l'identité précédente, que les coefficients λ_{pn} doivent satisfaire aux conditions

$$\lambda_{pn} = \lambda_{0(n-p)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{0n} = 1.$$

Le développement M doit donc être de la forme

$$M[f(x)] \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_{0n} a_0 + \lambda_{0(n-1)} a_1 x + \dots + \lambda_{00} a_n x^n).$$

Il est, dès lors, facile de montrer qu'un pareil développement appliqué à la fonction $\frac{1}{1-x}$ divergerait, au moins pour toute valeur de x , tel que $|x| > 1 + \frac{1}{|\lambda_{00}|}$, et ne saurait, par conséquent, être un développement M. La réponse à la question que posait M. Painlevé est donc négative.

SÉANCE DU 22 DÉCEMBRE 1920.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

Communications :

M. Fatou : *Sur un problème de la théorie générale des fonctions analytiques : en quel ensemble de points une fonction analytique devient-elle nulle sur une ligne singulière? (1).*

M. Wavre : *Sur l'équation de Fredholm* $\varphi(x) = \frac{\lambda}{2\pi i} \int_c \frac{\varphi(z)}{z - \psi(x)} dz$
et son rapport avec l'intégrale de Cauchy $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\varphi(z)}{z - x} dx$.

(1) Cette question a été traitée avec les développements qu'elle comporte au *Bulletin des Sciences mathématiques* (2^e série, t. XLV, mars 1921).

— o o o —

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
État de la Société au commencement de 1920.....	1
Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société échange son Bulletin.....	16
Comptes rendus des séances.....	18
Communications :	
MM. <i>Bachelier</i> : Sur la théorie des corrélations.....	42
— Sur les décimales du nombre π	44
<i>Barré</i> : Sur les courbes dont les normales principales rencontrent deux droites fixes.....	33
<i>Bose</i> : The horpolhode of Poinsof.....	47
<i>Drach</i> : Sur les formes quadratiques de différentielles et les surfaces de trans- lation.....	21
— Sur la précession dans le mouvement d'un solide pesant de révolu- tion fixé par un point de son axe.....	32
— Sur l'intégration par quadratures de l'équation différentielle de la Balistique extérieure.....	37
<i>Fatou</i> : Sur les propriétés d'une classe de fonctions uniformes analogues aux fonctions fuchsienues.....	20
— Remarque au sujet du theoreme de M. Picard sur les fonctions entières.....	23
<i>Gambier</i> : Sur la déformation des surfaces et un cas d'impossibilité.....	49
<i>Lebesgue</i> : Sur le theoreme de la moyenne et le problème de Dirichlet.....	26
— Sur les polygones de Poncelet.....	27
— Sur les ombilics d'une quadrique.....	28
<i>Lévy (P.)</i> : Sur les fonctions abéliennes singulières de trois variables.....	29
<i>Michel (Ch.)</i> : Sur les polynomes qui généralisent à la fois les polynomes de Legendre et les polynomes $\cos(n \arccos x)$	50
<i>Risser</i> : Sur le problème des tables de mortalité par âges à l'entrée des ren- tiers et une application de l'équation de Volterra.....	39
— Sur le problème de la répartition par âges dans les milieux à effectif constant et l'équation de Volterra.....	40
<i>Wavre</i> : Sur les développements de Mittag-Leffler.....	53
Table des matières.....	55

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

63685 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}.
Quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

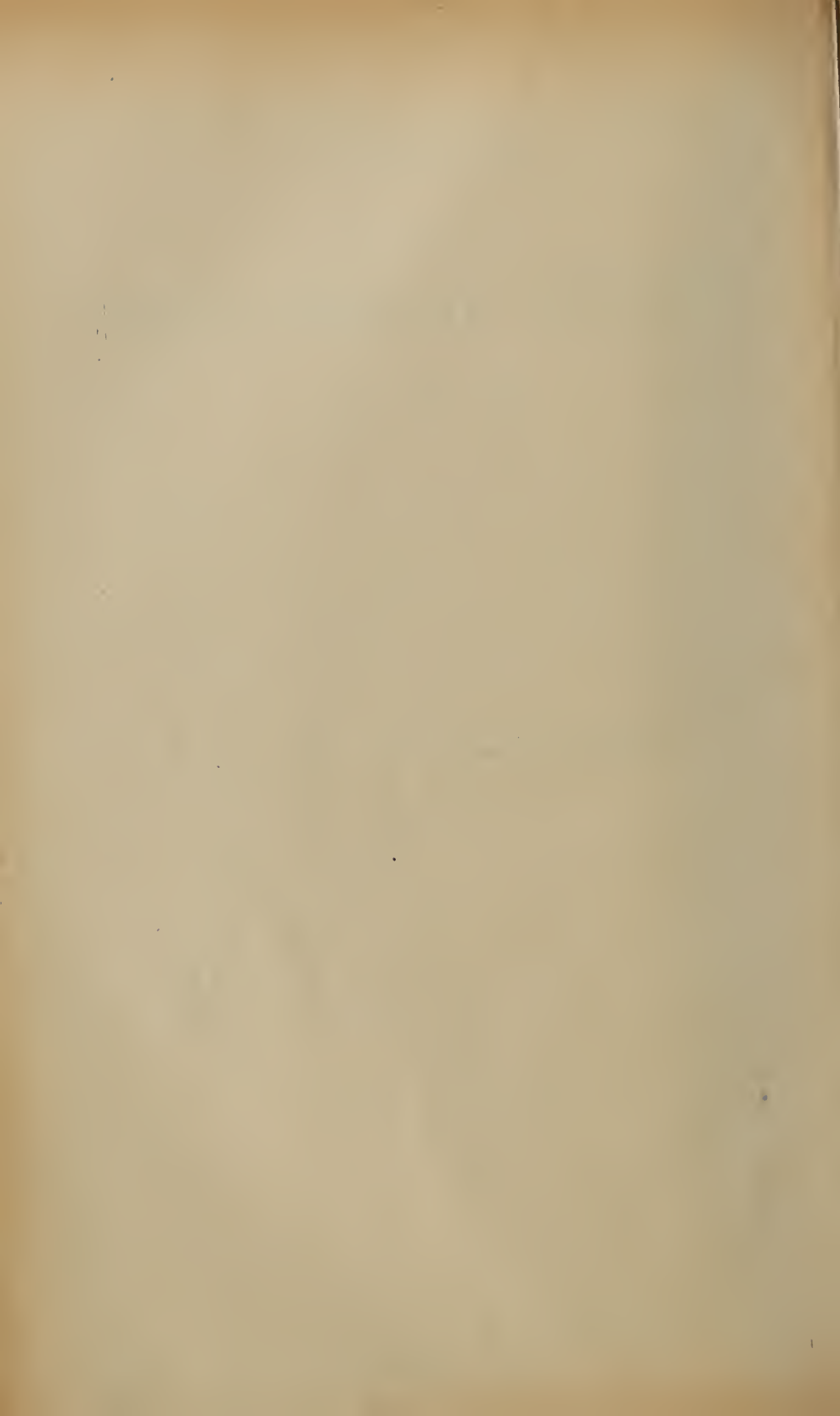
PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME QUARANTE-NEUVIÈME. — ANNÉE 1921.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ.

A LA SORBONNE.

—
1921



BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

SUR QUELQUES ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE QUI ADMETTENT UNE TRANSFORMATION DE BÄCKLUND;

PAR M. E. GOURSAT.

La recherche générale des équations aux dérivées partielles de Monge-Ampère, qui admettent une transformation de Bäcklund B_2 ou B_3 , paraît difficile. Dans le travail ci-dessous, je me suis borné à déterminer certaines équations de cette espèce qui ne renferment que la dérivée du second ordre s et qui sont bilinéaires par rapport aux dérivées du premier ordre p et q . Les résultats, quoique très particuliers, ne me semblent pas dépourvus d'intérêt, et d'autre part la méthode suivie peut certainement s'appliquer à des équations d'une forme plus générale.

I.

1. Je rappellerai d'abord quelques résultats empruntés à un Mémoire récent *Sur le problème de Bäcklund* ⁽¹⁾. Soit (S) un système de deux équations de Pfaff à six variables

$$(S) \quad \begin{cases} \omega_1 = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \dots + A_6 dx_6 = 0, \\ \omega_2 = B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + \dots + B_6 dx_6 = 0, \end{cases}$$

dont les coefficients A_i, B_i sont des fonctions quelconques des six

⁽¹⁾ *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. V, 1918.

variables $x_1, x_2, \dots, x_6$; ce système peut *en général*, par un choix convenable des variables, être ramené, de deux façons différentes et de deux façons seulement, à la forme réduite

$$(1) \quad \begin{cases} \Omega_1 = dz - p \, dx - q \, dy = 0, \\ \Omega_2 = X \, dx + Y \, dy + P \, dp + Q \, dq = 0, \end{cases}$$

X, Y, P, Q étant des fonctions de x, y, z, p, q et d'une sixième variable u . Considérons une intégrale M_2 du système (S) représentée par les quatre équations

$$z = f(x, y), \quad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad u = \varphi(x, y);$$

les deux fonctions $z = f$ et $u = \varphi$ des variables indépendantes x et y doivent satisfaire aux deux relations

$$(2) \quad X + P r + Q s = 0, \quad Y + P s + Q t = 0,$$

où

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

et l'élimination de u entre ces deux relations conduit à une équation aux dérivées partielles du second ordre E_1 , à laquelle doit satisfaire la fonction $z = f(x, y)$.

$$(3) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Cette équation E_1 dont l'intégration est équivalente à celle du système (S), je l'appelle une *résolvante de première espèce du système* (S). D'après la façon même dont cette équation (3) a été obtenue, l'équation E_1 admet une famille de caractéristiques du premier ordre, et inversement toute équation du second ordre admettant une famille de caractéristiques du premier ordre est une résolvante de première espèce pour un système de deux équations de Pfaff. Si l'équation E_1 est une équation de Monge-Ampère, ayant ses deux familles de caractéristiques distinctes, elle est une résolvante de première espèce pour deux systèmes distincts de deux équations de Pfaff à six variables, chacun de ces systèmes correspondant à une des familles de caractéristiques.

Puisque le système (S) peut en général être ramené de deux façons différentes à la forme réduite (1), ce système admet en

général deux résolvantes de première espèce (E_1) , (E_2) , qui ne sont d'ailleurs déterminées qu'à une transformation de contact près.

Dans ce qui va suivre, nous ne regarderons pas comme distinctes deux équations du second ordre qui se ramènent l'une à l'autre par une transformation de contact, ni comme distincts deux systèmes de deux équations de Pfaff qui peuvent se ramener l'un à l'autre par un changement de variables.

Les deux résolvantes de première espèce (E_1) , (E_2) d'un système de Pfaff (S) se déduisent l'une de l'autre par une transformation de Bäcklund B_1 , et inversement, deux équations du second ordre qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation de Bäcklund B_1 sont les deux résolvantes de première espèce d'un système (S) de deux équations de Pfaff à six variables. Ces propositions donnent aisément la solution des principaux problèmes que l'on peut se proposer relativement aux transformations B_1 ; je n'y reviendrai pas.

2. L'intégration du système (S) peut, dans certains cas, se ramener d'une autre façon à l'intégration d'une équation de Monge-Ampère. Prenons une équation quelconque du système (S)

$$\Omega_1 = \lambda \omega_1 + \mu \omega_2 = 0,$$

et supposons cette équation ramenée, par un choix convenable des variables, à une forme canonique

$$\Omega_1 = dz - p \, dx - q \, dy = 0,$$

les variables étant x, y, z, p, q, u . On peut former un système équivalent au système (S) en ajoutant à $\Omega_1 = 0$ une équation $\Omega_2 = 0$ ne renfermant pas dz . Si cette équation ne renferme pas du , le système (S) est ramené à la forme réduite (1); c'est le cas qui vient d'être examiné, et que nous pouvons écarter. Ce système (S) peut donc, d'une infinité de manières, être ramené à la forme

$$(4) \quad \begin{cases} \Omega_1 = dz - p \, dx - q \, dy = 0, \\ \Omega_2 = du - X \, dx - Y \, dy - P \, dp - Q \, dq = 0, \end{cases}$$

X, Y, P, Q étant des fonctions des six variables x, y, z, p, q, u , qui peuvent être quelconques. Soit M_2 une multiplicité intégrale

à deux dimensions de ce système, représentée par les quatre équations

$$z = f(x, y), \quad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad u = \varphi(x, y);$$

la fonction $u = \varphi(x, y)$ est une intégrale de l'équation aux différentielles totales

$$(5) \quad du = (X + Pr + Qs) dx + (Y + Ps + Qt) dy,$$

où

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

La condition d'intégrabilité de cette équation renferme en général la fonction u ; mais il peut se faire que, pour un choix particulier de l'équation $\Omega_1 = 0$, c'est-à-dire du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$, cette condition d'intégrabilité ne renferme pas u . C'est alors une équation de Monge-Ampère E' , à laquelle doit satisfaire la fonction $z = f(x, y)$. A toute intégrale de cette équation correspondent une infinité de fonctions $u = \varphi(x, y)$, dépendant d'une constante arbitraire, qui s'obtiennent par l'intégration d'une équation aux différentielles totales (5) complètement intégrable. Pour abréger, je dirai que E' est une *résolvante de seconde espèce du système* (S).

Un système (S) n'admet pas forcément de résolvante de seconde espèce, mais il peut aussi en admettre plusieurs ou même une infinité. Une résolvante de première espèce et une résolvante de seconde espèce d'un même système de Pfaff (S) se déduisent l'une de l'autre par une transformation de Bäcklund B_2 . Deux résolvantes de seconde espèce d'un même système de Pfaff se déduisent l'une de l'autre par une transformation de Bäcklund B_3 . Les réciproques sont vraies.

3. Étant donnée une équation de Monge-Ampère E , la recherche des équations aux dérivées partielles du second ordre que l'on peut déduire de E par une transformation de Bäcklund se décompose d'après ce qui précède en deux problèmes distincts :

1^o Trouver tous les systèmes distincts (S) de deux équations

de Pfaff à six variables qui admettent l'équation E pour résolvante de seconde espèce;

2° Trouver toutes les résolvantes de seconde espèce de chacun de ces systèmes (S).

Je ne m'occuperai dans ce Mémoire que du premier de ces problèmes, pour une équation du second ordre

$$(6) \quad s - F(x, y, z, p, q) = 0,$$

où la fonction F est bilinéaire en p et q. Quelle que soit la fonction F(x, y, z, p, q), tout système de deux équations de Pfaff dont l'équation (6) est une résolvante de seconde espèce peut être ramené à la forme

$$(7) \quad \begin{cases} dz - p dx - q dy = 0, \\ du - f(x, y, z, p, u) dx - \varphi(x, y, z, q, u) dy = 0, \end{cases}$$

et la condition d'intégrabilité de la seconde des équations (7)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right) s + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial u} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial u} f = 0$$

doit être identique à l'équation (6), ce qui exige que l'on ait

$$(8) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p} \right) F + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} p - \frac{\partial f}{\partial u} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial u} f = 0.$$

Si cette condition est satisfaite, il est évident qu'en posant

$$v = \theta(x, y, z, u)$$

et par suite

$$dv = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy + \frac{\partial \theta}{\partial z} (p dx + q dy) + \frac{\partial \theta}{\partial u} du,$$

la seconde des équations (7) est remplacée par une équation de même forme

$$(9) \quad dv = f_1(x, y, z, p, v) dx + \varphi_1(x, y, z, q, v) dy$$

dont la condition d'intégrabilité est la même que pour la première. Mais les deux systèmes de Pfaff ainsi obtenus ne sont pas distincts, puisque l'on passe de l'un à l'autre par un simple changement de variables.

Lorsque les fonctions f(x, y, z, p) et $\varphi(x, y, z, q)$ ne ren-

ferment pas la variable u , il est clair que la condition d'intégrabilité de l'équation

$$(10) \quad du = f(x, y, z, p) dx + \varphi(x, y, z, q) dy$$

ne renferme pas u , et conduit bien à une équation de la forme (6).

J'ai établi dans un Mémoire antérieur, *Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre* ⁽¹⁾, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation

$$(11) \quad Ss + R = 0,$$

où R et S ne dépendent que de x, y, z, p, q , provienne sans aucune réduction de la condition d'intégrabilité d'une équation de la forme (10). Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 S}{\partial p \partial q} = 0, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial p^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right), \quad \frac{\partial^2 R}{\partial q^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right), \quad \frac{\partial^2 R}{\partial p \partial q} = \frac{\partial S}{\partial z}, \\ \frac{d^2 S}{dx dy} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial R}{\partial p} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial R}{\partial q} \right), \\ \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{d^2}{dx dy} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dy} \right). \end{array} \right.$$

Si ces conditions sont remplies, on peut trouver en effet, d'une infinité de manières, deux fonctions $f(x, y, z, p)$ et $\varphi(x, y, z, q)$ satisfaisant aux deux équations

$$\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} = S, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} p = R.$$

Il existe évidemment une infinité de systèmes de deux fonctions $f(x, y, z, p)$, $\varphi(x, y, z, q)$, satisfaisant à la première de ces équations, puisque l'on a $\frac{\partial^2 S}{\partial p \partial q} = 0$. Si $f_1(x, y, z, p)$, $\varphi_1(x, y, z, q)$ forment un premier système de solutions, tous les autres sont de la forme

$$f = f_1 + Up - V, \quad \varphi = \varphi_1 + Uq + W,$$

U, V, W étant des fonctions de x, y, z . En portant ces expres-

⁽¹⁾ *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2^e série, t. IV, 1901, p. 299-340.

sions de f, φ dans la seconde condition, elle devient

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} \right) p + \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x} \right) q = R,$$

où l'on a posé, pour abrégé,

$$R = R - \left(\frac{df_1}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dx} \right).$$

Or les dernières conditions (12) peuvent s'écrire, on le voit facilement,

$$(12') \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 R}{\partial p^2} = 0, & \frac{\partial^2 R}{\partial q^2} = 0, & \frac{\partial^2 R}{\partial p \partial q} = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial R}{\partial p} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial R}{\partial q} \right); \end{cases}$$

R est donc une fonction linéaire de p et de q , et par suite on doit avoir

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial p}, & \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial q}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial x} &= R - p \frac{\partial R}{\partial p} - q \frac{\partial R}{\partial q}. \end{aligned}$$

La condition d'intégrabilité bien connue

$$(14) \quad \frac{\partial^2 R}{\partial p \partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial q \partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(p \frac{\partial R}{\partial p} + q \frac{\partial R}{\partial q} - R \right) = 0$$

est précisément identique à la dernière des conditions (12).

On peut donc trouver une infinité de solutions des équations (13). On peut prendre par exemple

$$U_1 = 0, \quad V_1 = \int_{z_0}^z \frac{\partial R}{\partial q} dz + \psi(x, y), \quad W_1 = - \int_{z_0}^z \frac{\partial R}{\partial p} dz + \pi(x, y),$$

les fonctions ψ et π satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \pi}{\partial x} = \left(R - p \frac{\partial R}{\partial p} - q \frac{\partial R}{\partial q} \right)_{z=z_0}.$$

Tout autre système de solutions des équations (13) est de la forme

$$U = U_1 + \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad V = V_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad W = W_1 + \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

L'équation $Ss + R = 0$ s'obtient donc comme condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$du = \left[f_1 + V_1 + \frac{\partial \theta}{\partial x} + p \left(U_1 + \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] dx \\ + \left[\varphi_1 + W_1 + \frac{\partial \theta}{\partial y} + q \left(U_1 + \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] dy;$$

quelle que soit la fonction $\theta(x, y, z)$, on voit que le système de Pfaff dont l'équation $Ss + R = 0$ est une résolvante de seconde espèce est toujours le même

$$dz = p dx + q dy, \\ du = [f_1 + V_1 + U_1 p] dx + [\varphi_1 + W_1 + U_1 q] dy.$$

Pour qu'une équation

$$(15) \quad s + F(x, y, z, p, q) = 0$$

puisse être obtenue comme condition d'intégrabilité d'une équation aux différentielles totales de la forme (10), il faut et il suffit que l'on puisse trouver un facteur $\lambda(x, y, z, p, q)$ tel qu'en posant

$$S = \lambda(x, y, z, p, q), \quad R = \lambda F,$$

les conditions (12) soient satisfaites. On a ainsi un système de cinq équations aux dérivées partielles du second ordre auxquelles doit satisfaire la fonction λ . Toute solution de ces cinq équations est un *multiplicateur* pour l'équation. D'après ce qu'on vient de rappeler, à tout multiplicateur correspond un système de Pfaff et un seul dont l'équation (15) est une résolvante de seconde espèce.

Dans le travail cité plus haut (p. 329 et suiv.), j'ai déterminé tous les multiplicateurs pour une équation complètement linéaire

$$s + ap + bq + cz = 0,$$

a, b, c ne dépendant que de x, y . Je reprends d'abord le même problème pour les équations plus générales où s est une fonction bilinéaire à coefficients quelconques des dérivées du premier ordre p, q .

II.

4. Les équations bilinéaires en p et q

$$(16) \quad s + g(x, y, z)pq + a(x, y, z)p + b(x, y, z)q + c(x, y, z) = 0$$

conservernt la même forme quand on prend pour inconnue une fonction quelconque $Z = \theta(x, y, z)$, sans changer les variables indépendantes, ou quand on prend pour variables nouvelles $x' = \varphi(x)$, $y' = \psi(y)$, les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ étant arbitraires. Dans l'équation obtenue en posant $Z = \theta(x, y, z)$, le coefficient de PQ est

$$\left(g \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \times \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^3 ;$$

on peut donc toujours faire disparaître le terme en pq , en prenant pour inconnue une intégrale $Z = \theta(x, y, z)$ de l'équation

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = e^{\int z dz}.$$

Si par exemple $g = 0$, l'équation conserve la même forme quand on prend pour inconnue une fonction linéaire quelconque de z ,

$$Z = \varphi(x, y) + z\psi(x, y).$$

Cherchons dans quels cas l'équation (16) est intégrable par la méthode de Monge. Pour que les équations différentielles

$$dx = 0, \quad dz = q dy, \quad dp + (g pq + ap + bq + c) dy = 0$$

de l'un des systèmes de caractéristiques admettent la combinaison intégrable $dF = 0$, la fonction F doit satisfaire aux deux relations

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q - \frac{\partial F}{\partial p} (g pq + ap + bq + c) = 0,$$

et par suite aux deux relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} - (ap + c) \frac{\partial F}{\partial p} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} - (g p + b) \frac{\partial F}{\partial p} &= 0. \end{aligned}$$

Or ce système ne peut admettre d'autre intégrale que l'intégrale évidente $F = x$, à moins d'être un système complet, ce qui exige que l'on ait

$$(17) \quad \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial b}{\partial y} = g c - a b = 0.$$

Si l'on a fait disparaître le terme en pq , comme il vient d'être dit, on a $g = 0$, et les conditions précédentes deviennent

$$\frac{\partial a}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial b}{\partial y} + ab.$$

Le coefficient a ne dépend donc pas de z ; on peut alors, en changeant z en $\lambda(x, y)z$, faire disparaître ce coefficient. Si $a = 0$, il reste une seule condition $\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial b}{\partial y}$, qui exprime que b et c sont les dérivées partielles d'une fonction $U(x, y, z)$ par rapport aux variables y, z , et l'équation (16) est ramenée à la forme

$$s + \frac{\partial U}{\partial z} q + \frac{\partial U}{\partial y} = 0;$$

on voit immédiatement qu'elle admet l'intégrale intermédiaire

$$p + U(x, y, z) = X.$$

On voit de même que si les équations différentielles du second système de caractéristiques admettent une combinaison intégrable autre que $dy = 0$, l'équation peut être ramenée à la forme

$$s + \frac{\partial V}{\partial z} p + \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

et admet l'intégrale intermédiaire

$$q + V(x, y, z) = Y.$$

Dans le cas particulier d'une équation de la forme $s + gpq = 0$, où $a=b=c=0$, les conditions (17) se réduisent à une seule $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$. L'équation $s + g(x, z)pq = 0$ admet en effet l'intégrale intermédiaire

$$\text{Log } p + \int g(x, z) dz = X.$$

Pour la recherche des multiplicateurs d'une équation de la forme (16), nous pouvons évidemment supposer que l'on a fait disparaître le coefficient de pq par un changement d'inconnue, et prendre l'équation sous la forme réduite

$$(18) \quad s + ap + bq + c = 0,$$

Si, pour cette équation réduite, le coefficient a est indépendant de z , on peut aussi supposer que l'on a fait disparaître ce coefficient. Remarquons aussi que, si l'équation (16) admet un multiplicateur $\mu(x, y)$, indépendant de z, p, q , c'est-à-dire si l'on peut trouver deux fonctions $f(x, y, z, p)$ et $\varphi(x, y, z, q)$ telles que l'on ait identiquement

$$\mu(x, y)(s + g p q + a p + b q + c) = \frac{df}{dy} - \frac{d\varphi}{dx} + \left(\frac{df}{dp} - \frac{d\varphi}{dq} \right) s,$$

l'équation

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + G P Q + \dots = 0$$

que l'on déduit de l'équation (16) en prenant pour inconnue $Z = \mu z$ admet pour multiplicateur l'unité.

5. Ces remarques étant faites, cherchons à déterminer les multiplicateurs $\lambda(x, y, z, p, q)$ pour l'équation réduite

$$(18) \quad s + a p + b q + c = 0.$$

On doit poser, dans les équations générales (12),

$$S = \lambda, \quad R = \lambda(a p + b q + c).$$

Les conditions obtenues sont linéaires et homogènes par rapport à la fonction inconnue λ et à ses dérivées; la somme d'un nombre quelconque de multiplicateurs est donc aussi un multiplicateur, résultat qu'il était facile de prévoir *a priori*.

La première des conditions (12), $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p \partial q} = 0$, montre que tout multiplicateur est de la forme

$$\lambda = F(x, y, z, p) + \Phi(x, y, z, q).$$

La condition

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial^2 R}{\partial p \partial q}$$

donne ensuite

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = b \frac{\partial F}{\partial p} + a \frac{\partial \Phi}{\partial q} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial z} - b \frac{\partial F}{\partial p} = a \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$

la valeur commune de ces deux expressions est forcément indépendante de p et de q . C'est donc une fonction $\mu(x, y, z)$ des

variables x, y, z que l'on peut supposer nulle; il suffit en effet de remplacer F par $F + \int_{z_0}^z \mu(x, y, z) dz$ et Φ par $\Phi - \int_{z_0}^z \mu(x, y, z) dz$, ce qui ne change pas la somme $F + \Phi = \lambda$. On peut donc toujours supposer que l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial z} - b \frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} - a \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0;$$

si nous posons

$$(19) \quad a = \frac{\partial z}{\partial \beta}, \quad b = \frac{\partial \beta}{\partial z},$$

tout multiplicateur λ est donc de la forme

$$(20) \quad \lambda = F(x, y, u) + \Phi(x, y, c),$$

où

$$u = p + \beta, \quad c = q + z.$$

Remarquons que les fonctions z et β ne sont pas complètement déterminées par les équations (19), car on peut ajouter à chacune d'elles une fonction arbitraire de x et de y , mais il vaut mieux en vue de la suite ne pas préciser davantage, au moins pour le moment.

La condition

$$\frac{\partial^2 R}{\partial p^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)$$

nous donne ensuite, en remplaçant a par $\frac{\partial z}{\partial \beta}$, et b par $\frac{\partial \beta}{\partial z}$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} p + \frac{\partial \beta}{\partial z} q + c \right) + 2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial \beta}{\partial z} q - \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial \beta}{\partial y},$$

ce qu'on peut écrire, en remplaçant p par $u - \beta$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} u + c - \frac{\partial \beta}{\partial y} - \beta \frac{\partial z}{\partial \beta} \right) + 2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y},$$

ou encore

$$(21) \quad \frac{\partial z}{\partial \beta} \left(u \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial u} \right) + \left(c - \frac{\partial \beta}{\partial y} - \beta \frac{\partial z}{\partial \beta} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y}.$$

Nous avons plusieurs cas à examiner.

1^o Pour que les coefficients des dérivées de F soient indépendants de z , il faut que l'on ait

$$\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial y \partial z} - \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial \beta}{\partial z} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial a}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial y} - ab = 0.$$

L'équation (18) admet alors, comme on l'a vu au paragraphe précédent, une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire. Ce cas sera examiné plus loin.

2^o Supposons

$$\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial y \partial z} - \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial \beta}{\partial z} \neq 0;$$

en différentiant les deux membres de l'équation (21) par rapport à z , et tenant compte de la condition $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, on voit que l'on doit avoir $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0$, de sorte que F doit être une fonction linéaire de u

$$F = \rho u + \varphi.$$

L'équation (21) devient alors

$$2a\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

et l'équation (21) admet une infinité d'intégrales qui ne dépendent que de x, y, u

$$(22) \quad F = Xue^{2\int_{y_0}^y a dy} + \mu(x, y),$$

X étant une fonction arbitraire de x , $\mu(x, y)$ une fonction arbitraire des variables x et y .

3^o Supposons

$$\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} = \frac{\partial a}{\partial z} = 0.$$

En différentiant les deux membres de l'équation (21) par rapport à z , il vient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} \left(u \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial y} - ab - \beta \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0.$$

Si le rapport des coefficients de $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$ et de $u \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial u}$ n'est pas indépendant de z , il faudra que l'on ait

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0, \quad u \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

et par suite $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$. L'équation (21) n'admet donc que la solution $F = \mu(x, y)$, qui soit indépendante de z . Pour qu'il y ait d'autres solutions, il faut donc que le rapport

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z} \left(c - \frac{\partial \beta}{\partial y} - \beta \frac{\partial x}{\partial z} \right)}{\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}}$$

soit égal à une fonction $H(x, y)$ indépendante de z . On a donc

$$c - \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial z} (\beta + H) + K(x, y).$$

Comme on peut augmenter β d'une fonction quelconque des variables x, y sans changer l'équation (16), on peut supposer que l'on a $H = 0$, et la relation précédente devient

$$c - \frac{\partial \beta}{\partial y} - \beta \frac{\partial x}{\partial z} = K(x, y)$$

et la relation (21) se décompose en deux équations distinctes, puisque $\frac{\partial x}{\partial z}$ dépend de z ,

$$u \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

$$K(x, y) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y}.$$

La première montre que $\frac{\partial F}{\partial u}$ est de la forme $\frac{\varphi(x, y)}{u^2}$, et la dernière devient

$$-\frac{2K(x, y)}{u^3} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

il faut donc que l'on ait $K(x, y) = 0, \varphi = \mathbb{N}$. On en conclut que

l'équation (21) admet une solution de la forme

$$F = \frac{X}{u} + \mu(x, y),$$

si les deux équations

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = b, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = c - a\beta$$

admettent une solution commune en β . Elles ne peuvent former un système complètement intégrable, car la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z} \beta - ab$$

ne peut être vérifiée identiquement que si l'on a

$$\frac{\partial a}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial z} - ab;$$

c'est le cas que nous avons réservé, où l'équation (16) admet une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire.

En résumé, lorsque les équations différentielles du système de caractéristiques,

$$dx = 0, \quad dz = q dy, \quad dp + (ap + bq + c) dy = 0$$

n'admettent pas d'autre combinaison intégrable que $dx = 0$, la fonction

$$F(x, y, u) = F[x, y, p + \beta(x, y, z)]$$

a l'une des formes suivantes :

$$(A) \quad F = \mu(x, y),$$

$$(B) \quad F = Xue^{\int_y^{y_0} 2a dy} + \mu(x, y),$$

$$(C) \quad F = \frac{X}{u} + \mu(x, y);$$

la première convient au cas général où les coefficients a , b , c et leurs dérivées ne vérifient aucune condition particulière d'égalité.

La forme (B) convient au cas où $\frac{\partial a}{\partial z} = 0$, et la forme (C) au cas

où, $\frac{\partial a}{\partial z}$ n'étant pas nul, les deux équations

$$(23) \quad \frac{\partial \beta}{\partial z} = b, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = c - a \beta$$

admettent une solution commune en β .

On verrait de même que, lorsque les équations différentielles du second système de caractéristiques n'admettent pas d'autre combinaison intégrable que $dy = 0$, la fonction

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(x, y, q + z)$$

a l'une des formes suivantes :

$$(A') \quad \Phi = \mu(x, y),$$

$$(B') \quad \Phi = Y e^{\int_{x_0}^{xy} 2b \, dx} + \mu(x, y),$$

$$(C') \quad \Phi = \frac{Y}{c} + \mu(x, y).$$

La forme (A') convient au cas général, la forme (B') au cas où $\frac{\partial b}{\partial z}$ est nul, et la forme (C') au cas où, $\frac{\partial b}{\partial z}$ n'étant pas nul, les deux équations

$$(23') \quad \frac{\partial z}{\partial z} = a, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = c - b z$$

admettent une solution commune en z .

Il nous reste à associer de toutes les manières possibles les diverses formes des fonctions Γ et Φ , en tenant compte de la dernière équation de condition (12), dont on ne s'est pas servi jusqu'ici.

6. Nous allons d'abord chercher dans quels cas l'équation (16) admet un multiplicateur de la forme

$$(1) \quad \lambda = \frac{X}{p + \beta} + \frac{Y}{q + z} + \mu(x, y), \quad XY = 0;$$

il faut pour cela que le système (23) admette une solution en β , et le système (23') une solution en z . Il est facile de voir quelle est la signification de ces conditions. Des équations (23) on tire

$$b = \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad c = \frac{\partial \beta}{\partial y} + a \beta,$$

et l'équation (18) devient

$$(24) \quad s + \frac{\partial \beta}{\partial z} q + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \alpha(p + \beta) = 0;$$

elle admet donc toutes les intégrales de l'équation du premier ordre

$$(25) \quad p + \beta(x, y, z) = 0.$$

Réciproquement, si l'équation (18) admet toutes les intégrales de l'équation du premier ordre (25), elle doit être vérifiée identiquement quand on y remplace p par $-\beta(x, y, z)$ et s par $-\frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} q$; cette équation est donc de la forme (24).

Si les équations (23') sont également compatibles en z , l'équation (18) admet aussi toutes les intégrales de l'équation du premier ordre

$$(25') \quad q + \alpha(x, y, z) = 0.$$

Cela posé, des relations (23) et (23') on déduit la nouvelle relation

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{\partial \beta}{\partial y} + \beta \frac{\partial z}{\partial z},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\partial(-\alpha)}{\partial x} + (-\beta) \frac{\partial(-\alpha)}{\partial z} = \frac{\partial(-\beta)}{\partial y} + (-\alpha) \frac{\partial(-\beta)}{\partial z},$$

et qui montre que l'équation

$$dz + \alpha dy + \beta dx = 0$$

est complètement intégrable. On a donc pour α et β des expressions de la forme

$$\alpha = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \beta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z},$$

et l'équation (18) admet toutes les intégrales des deux équations du premier ordre

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} q = 0,$$

c'est-à-dire toutes les fonctions $z(x, y)$ qui satisfont à l'une des relations

$$U(x, y, z) = \psi(x), \quad U(x, y, z) = \pi(y),$$

les fonctions ψ et π étant arbitraires. Si l'on prend pour inconnue la fonction $U(x, y, z)$ elle-même, l'équation obtenue doit être vérifiée pourvu que l'une des dérivées du premier ordre de la fonction inconnue soit nulle. Cette équation sera donc de la forme

$$(26) \quad s + g(x, y, z)pq = 0,$$

et par conséquent toute équation (18) qui admet un multiplicateur de la forme (1) peut être ramenée, par un changement d'inconnue, à la forme réduite (26).

Il est facile de trouver directement les multiplicateurs pour une équation de cette forme. On a en effet dans ce cas

$$S = F(x, y, z, p) + \Phi(x, y, z, q), \quad R = g(F + \Phi)pq.$$

La condition $\frac{\partial^2 R}{\partial p^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)$ est ici

$$gq \left(p \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial p} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial p} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial p} q;$$

F ne contenant pas q , il faut que l'on ait $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial p} = 0$, c'est-à-dire que $\frac{\partial F}{\partial p}$ ne contienne pas y . Il en est de même de $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial p}$, et la relation

$$g \left(p \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial p} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial p}$$

donnera pour g une valeur indépendante de y , à moins que l'on ait à la fois

$$p \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial p} = 0.$$

La première hypothèse est à rejeter, car l'équation (26) serait alors intégrable par la méthode de Monge (n° 4). Il s'ensuit que F est de la forme

$$F = \frac{X}{p} + f_1(x, y, z);$$

on verrait de même que Φ est de la forme

$$\Phi = \frac{Y}{q} + \varphi_1(x, y, z),$$

et par suite un multiplicateur de l'équation (26) est de la forme

$$(1') \quad \lambda = \frac{X}{p} + \frac{Y}{q} + \varphi(x, y, z).$$

On a donc

$$R = X g q + Y g p + \varphi g p q$$

et la condition $\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial^2 R}{\partial p \partial q}$ donne ensuite

$$(27) \quad \varphi g = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Enfin la dernière des conditions (12) se réduit, tous calculs faits, à la forme simple

$$(28) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = X \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial y \partial z} + Y \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x \partial z}.$$

Il suffira donc, pour obtenir une équation (26) ayant un multiplicateur de la forme voulue, de prendre pour φ une intégrale de l'équation (28), X et Y étant des fonctions données de x et de y respectivement, puis de prendre pour g la dérivée logarithmique

$$g = \frac{\partial \log \varphi}{\partial z}.$$

Il est facile de vérifier ce résultat. Considérons en effet l'équation aux différentielles totales

$$(29) \quad du = [X \log p + \varphi(x, y, z)p + \varphi_1] dx + (Y \log q + \varphi_2) dy$$

dont la condition d'intégrabilité est

$$X \frac{s}{p} + \varphi s + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} q \right) p + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} q + Y \frac{s}{q} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} p = 0.$$

Pour que cette condition soit identique à l'équation (26), il faut que l'on ait

$$\varphi g = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + Y g = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + X g = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0.$$

On en tire

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = Y \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} = - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z} = - X \frac{\partial g}{\partial y}$$

et enfin

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = Y \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x \partial z} - X \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial y \partial z}.$$

On détermine ensuite φ_1 et φ_2 au moyen des équations compatibles

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = Y g - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = X g, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}.$$

Remarque. — En prenant pour variables indépendantes

$$x' = \int X dx \quad \text{et} \quad y' = \int Y dy,$$

l'équation (28) prend la forme

$$(28') \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial y'} = \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial y' \partial z} + \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x' \partial z}.$$

On obtient des intégrales ne dépendant que de z et de $x + y = t$, en intégrant l'équation à deux variables

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial t \partial z},$$

qui admet l'intégrale intermédiaire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2 \frac{\partial \log \varphi}{\partial z} = Z.$$

7. Pour que l'équation (18) admette un multiplicateur de la forme

$$(II) \quad \lambda = \frac{X}{p + \beta} + Y(q + \alpha) e^{2 \int_{x_0}^x b dx} + \mu(x, y), \quad XY = 0,$$

il faut d'abord que b soit indépendant de z , et de plus que l'équation (18) admette toutes les intégrales de l'équation du premier ordre $p + \beta(x, y, z) = 0$. Si b est indépendant de z , on peut d'abord, en changeant z en $K(x, y)z$, remplacer l'équation (18) par une autre équation admettant un multiplicateur de la même

forme, pour laquelle on aura $b = 0$. Cette transformation étant effectuée, on a $\frac{\partial \beta}{\partial z} = 0$, et l'équation est de la forme

$$s + \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial y} + a[p + \beta(x, y)] = 0;$$

enfin, si l'on prend pour inconnue $z + \int \beta(x, y) dx$ au lieu de z , on voit que toute équation (18) admettant un multiplicateur de la forme (II) peut être ramenée à la forme réduite

$$(30) \quad s + ap = 0.$$

D'après l'étude qui vient d'être faite, tout multiplicateur de cette équation est de la forme

$$\lambda = \frac{X}{p} + Y(q + z) + \mu(x, y), \quad \frac{dz}{dz} = a.$$

Il reste à déterminer la fonction $\mu(x, y)$ de façon à satisfaire à la dernière des conditions (12). Nous emploierons pour cela la méthode appelée à la fin du n° 3. Nous avons, dans le cas actuel,

$$S = \frac{X}{p} + Y(q + z) + \mu, \quad R = Xa + Yap(q + z) + \mu ap;$$

nous pouvons poser

$$f_1 = X \log p + \mu p, \quad \varphi_1 = -Y \frac{q^2}{2} - Yzq,$$

et il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= R - \frac{df_1}{dy} + \frac{d\varphi_1}{dx} = Xa + \left(Yaz + \mu a - \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) p - \frac{Y}{\partial x} \frac{dz}{dx} q, \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p} &= Yaz + \mu a - \frac{\partial \mu}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} = -Y \frac{dz}{dx}, \quad \mathcal{R} - p \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p} - q \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} = Xa, \end{aligned}$$

et la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial y \partial q} + \frac{\partial}{\partial z} \left(p \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p} + q \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q} - \mathcal{R} \right) = 0,$$

qui est identique à la dernière des conditions (12), devient

$$(31) \quad -\frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} + \frac{\partial(\mu a)}{\partial x} + Y \frac{\partial(az)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(Y \frac{dz}{dx} \right) - X \frac{da}{dz} = 0,$$

$$\text{ou } a = \frac{dz}{dz}.$$

Si la fonction $\mu(x, y)$ satisfait à cette condition, on peut, d'une infinité de manières, déterminer deux fonctions $\mu_1(x, y, z)$ et $\mu_2(x, y, z)$ telles que la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$du = [X \log p + \mu p + \mu_1(x, y, z)] dx + \left[Y \frac{q^2}{2} + \gamma x q + \mu_2(x, y, z) \right] dy$$

soit identique à l'équation (30). Il faut et il suffit pour cela que μ_1 et μ_2 vérifient les relations

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial z} = -\frac{\partial \mu}{\partial y} + a\mu + aYx, \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial z} = -Y\frac{\partial x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial y} + \frac{\partial \mu_2}{\partial x} = aX,$$

qui sont compatibles d'après l'équation (31).

Il est évident que si le coefficient a est une fonction quelconque des variables x, y, z , l'équation (31) n'admet pas en général d'intégrale $\mu(x, y)$ indépendante de z . Pour obtenir des équations (30) admettant un multiplicateur de la forme voulue, on pourra se donner arbitrairement les fonctions $X, Y, \mu(x, y)$ et prendre pour z une intégrale de l'équation (31), dépendant de la variable z .

En échangeant le rôle des variables x et y , on déterminerait de même les équations qui admettent un multiplicateur de la forme

$$\lambda = \frac{Y}{q + z} + X(p + \beta) e^{2 \int_{x_0}^x a dy} + \mu(x, y);$$

ces équations peuvent, par un changement linéaire d'inconnue, être ramenées à la forme réduite

$$(30') \quad s + b(x, y, z)q = 0.$$

8. Toute équation (18), qui admet un multiplicateur de la forme

$$(III) \quad \lambda = \frac{X}{p + \beta} + \mu(x, y), \quad X \neq 0,$$

admet aussi (n° 6) toutes les intégrales de l'équation $p + \beta = 0$. Soit $z = f(x, y, \gamma)$ l'intégrale générale de cette équation du premier ordre; l'équation du second ordre obtenue en posant

$$z = f(x, y, Z)$$

doit admettre toutes les intégrales de l'équation $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$. Nous

pouvons donc supposer l'équation (18) ramenée à la forme

$$(32) \quad s + g p q + a p = 0,$$

et l'on voit aisément que le multiplicateur de la nouvelle équation doit être de la forme

$$\lambda = \frac{\Lambda}{p} + \varphi(x, y, z).$$

On a donc, dans ce cas,

$$S = \frac{\Lambda}{p} + \varphi, \quad R = \Lambda g q - \Lambda a + g \varphi p q + a \varphi p,$$

et l'on peut poser

$$f_1 = \Lambda \log p + \varphi p, \quad \varphi_1 = 0, \\ \mathfrak{R} = R - \frac{df_1}{dy} = \Lambda g q + \Lambda a + g \varphi p q + a \varphi p - \frac{d\Lambda}{dy} \log p - p \frac{d\varphi}{dy}.$$

Pour que $\mathfrak{R}$ soit une fonction linéaire de p, q , on doit avoir

$$\frac{d\Lambda}{dy} = 0 \quad \text{ou} \quad \Lambda = X, \quad g \varphi - \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

et il reste

$$\mathfrak{R} = \left(-\frac{d\varphi}{dy} + a \varphi \right) p + X g q + X a;$$

la dernière des conditions (12) devient

$$(33) \quad -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + X \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial(a \varphi)}{\partial x} - X \frac{\partial a}{\partial z} = 0, \quad \text{ou} \quad g = \frac{\partial \log \varphi}{\partial z}.$$

Les deux fonctions $a(x, y, z)$ et $\varphi(x, y, z)$ sont liées par la seule relation (33), et l'on peut choisir l'une d'elles arbitrairement pour avoir une équation (32) admettant un multiplicateur

$$(III') \quad \lambda = \frac{X}{p} + \varphi(x, y, z).$$

Inversement, la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$du = [X \log p + \varphi p + \varphi_1] dx - \varphi_2 dy$$

est identique à l'équation (32) pourvu que l'on ait

$$g = \frac{\partial \log \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = g X, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = a \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = X u.$$

Les trois dernières équations sont compatibles en vertu de la condition (33).

On déterminerait de même, en échangeant le rôle des variables x et y , les équations de la forme (18) qui admettent un multiplicateur

$$\frac{Y}{q + z} + \mu(x, y), \quad Y \neq 0.$$

9. Si l'équation (18) admet un multiplicateur linéaire en p et en q ,

$$(IV) \quad \lambda = X(p + bz)e^{2\int_{y_0}^y a dy} + Y(q + az)e^{2\int_{x_0}^x b dx} + \mu(x, y), \quad XY \neq 0,$$

a et b sont indépendants de z , et nous écrirons ce multiplicateur, pour simplifier les formules,

$$\lambda = U(p + bz) + V(q + az) + \mu(x, y),$$

U et V étant des fonctions de x et de y qui satisfont aux deux conditions

$$(34) \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2aU, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 2bV.$$

Nous avons dans ce cas

$$R = aU p^2 + bV q^2 + (aV + bU)pq + (cU + a\mu)p + (cV + b\mu)q + c\mu + (aV + bU)z(ap + bq + c),$$

et nous pouvons prendre

$$f_1 = \frac{1}{2} p^2 + (aV + bU)pz + \mu p, \quad \varphi_1 = -V \frac{q^2}{2};$$

il vient alors

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= R - \frac{df_1}{dy} + \frac{d\varphi_1}{dx} \\ &= \left[cU + a\mu + a z(aV + bU) - z \frac{\partial}{\partial y}(aV + bU) - \frac{\partial \mu}{\partial y} \right] p \\ &\quad + [cV + b\mu + b z(aV + bU)] q + c\mu + c z(aV + bU), \end{aligned}$$

et la dernière condition (12) devient

$$\begin{aligned} (35) \quad \frac{\partial}{\partial x} [cU + a\mu + a z(aV + bU)] - z \frac{\partial^2(aV + bU)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \\ + \frac{\partial}{\partial y} [cV + b\mu + b z(aV + bU)] - z \frac{\partial c}{\partial z} - c(aV + bU) \\ - z \frac{dc}{\partial z}(aV + bU) = 0. \end{aligned}$$

En différentiant par rapport à z , on obtient l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[a(aV + bU)] + \frac{d}{dy}[b(aV + bU)] - \frac{d^2(aV + bU)}{dx dy} \\ + \frac{d^2(cU)}{dx dz} - \frac{d^2(cV)}{dy dz} - (aV + bU) \frac{d^2(cz)}{dz^2} - \mu \frac{d^2c}{dz^2} = 0, \end{aligned}$$

qui donne une valeur unique de μ si $\frac{d^2c}{dz^2}$ n'est pas nul. Cette valeur de μ doit être indépendante de x et de y , et satisfaire à l'équation précédente (35).

Le résultat est tout différent si c est une fonction linéaire de z ,

$$c = K(x, y)z + H(x, y).$$

L'équation (35) se décompose alors en deux conditions distinctes :

$$(36) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx}[KV - a(aV + bU)] \\ + \frac{d}{dy}[KV + b(aV + bU)] - \frac{d^2(aV - bU)}{dx dy} - \mu K(aV + bU) = 0, \end{aligned}$$

$$(37) \quad \begin{aligned} \frac{d^2\mu}{dx dy} - \frac{d(a\mu)}{dx} - \frac{d(b\mu)}{dy} \\ + \mu K + H(aV + bU) - \frac{d(HU)}{dx} - \frac{d(HV)}{dy} = 0. \end{aligned}$$

La relation (36) est une équation de condition à laquelle doit satisfaire $K(x, y)$ pour qu'il existe des multiplicateurs de la forme indiquée. Si cette condition est satisfaite, il existe une infinité de multiplicateurs, car $\mu(x, y)$ est déterminée par l'équation linéaire (37). Nous retrouvons le cas d'une équation linéaire, que j'ai traité dans le Mémoire cité plus haut (*Annales de la Faculté de Toulouse*, t. IV, 2^e série, p. 333).

J'ai montré, dans ce Mémoire, que l'on peut en multipliant l'inconnue z par un facteur convenablement choisi, supposer que l'on a $aV + bU = 0$; les fonctions a, b, U, V sont alors de la forme

$$\begin{aligned} a = -\frac{1}{2} \frac{\frac{d^2c}{dx dy}}{\frac{dc}{dx}}, \quad b = -\frac{1}{2} \frac{\frac{d^2c}{dx dy}}{\frac{dc}{dy}}, \\ U = -\frac{1}{2} \frac{1}{\frac{dc}{dx}}, \quad V = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{dc}{dy}}, \end{aligned}$$

la fonction $c(x, y)$ pouvant être choisie arbitrairement.

La condition (36) qui détermine K prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{\frac{\partial v}{\partial x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K}{\frac{\partial v}{\partial y}} \right) = 0;$$

on en conclut que K est de la forme

$$K = \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \psi(v).$$

Réciproquement, si la condition (35) est vérifiée pour une fonction $\mu(x, y)$, la condition d'intégrabilité de l'équation

$$du = \left[U \frac{p^2}{2} + (aV + bU)zp + \mu(x, y)p + \varphi_1(x, y, z) \right] dx \\ - \left[V \frac{q^2}{2} + \varphi_2(x, y, z) \right] dy$$

est identique à l'équation $s + ap + bq + c = 0$, pourvu que les fonctions φ_1 et φ_2 vérifient les relations

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = cV + b[\mu + z(aV + bU)], \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = cU + a[\mu + z(aV + bU)] - \frac{\partial \mu}{\partial y} - z \frac{\partial(aV + bU)}{\partial y}, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = c\mu + c z(aV + bU),$$

qui sont compatibles en vertu de l'équation (35).

10. Lorsque l'équation admet un multiplicateur linéaire en p et indépendant de q , on peut supposer $a = 0$, et l'équation (26) ramenée à la forme réduite

$$s + bq + c = 0.$$

Supposons qu'elle admette un multiplicateur de la forme

$$(A) \quad \lambda = X(p + \beta) + \mu(x, y), \quad X \neq 0,$$

où $\frac{\partial \beta}{\partial z} = b$. On a dans ce cas

$$R = Xbpq + Xcp + (X\beta + \mu)bq + (X\beta + \mu)c,$$

et l'on peut prendre

$$f_1 = X \frac{p^2}{2} + X\beta p + \mu p, \quad \varphi_1 = 0,$$

et il vient

$$R = R - \frac{df_1}{dy} = \left(Xc - X \frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) p + (X\beta + \mu) bq - (X\beta + \mu) c.$$

La dernière des conditions (12) donne la relation

$$(37) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(Xc - X \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} + X \frac{\partial (b\beta)}{\partial y} + \frac{\partial (b\mu)}{\partial y} - \frac{\partial (c\mu)}{\partial z} - X \frac{\partial (\beta c)}{\partial z} = 0;$$

les fonctions b , c , X étant données, pour qu'il existe un multiplicateur de la forme (11), il faudra que l'équation (37) admette une intégrale μ indépendante de z . Pour obtenir des équations de cette espèce, on pourra se donner arbitrairement X , $\mu(x, y)$, et l'une des fonctions c , β ; la seconde devra satisfaire à la condition (37).

Dans le cas d'une équation linéaire, on peut prendre

$$\beta = b(x, y)z, \quad c = \gamma(x, y)z,$$

et l'équation (37) se dédouble en deux équations distinctes, dont l'une est l'équation adjointe de l'équation linéaire, tandis que l'autre peut s'écrire

$$(38) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[X \left(\frac{\partial b}{\partial y} - \gamma \right) \right] = 2bX \left(\frac{\partial b}{\partial y} - \gamma \right).$$

Or les invariants de l'équation linéaire

$$s + b(x, y)q + \gamma(x, y)z = 0$$

sont

$$h = -\gamma, \quad k = \frac{\partial b}{\partial y} - \gamma,$$

et l'on a, d'après la relation (38),

$$\frac{\partial}{\partial x} (Xk) = 2bXk.$$

On en tire

$$2b = \frac{\partial}{\partial x} \log (Xk), \\ 2 \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial^2 \log k}{\partial x \partial y},$$

et par suite

$$2k - 2h = \frac{\partial^2 \log k}{\partial x \partial y}.$$

C'est le résultat que j'avais obtenu directement (p. 332 du Mémoire cité plus haut). L'équation peut alors être ramenée à la forme suivante, en changeant z en $z\varepsilon$:

$$s - \frac{1}{2} \frac{\partial \log v}{\partial x} q - c z = 0,$$

et elle admet un multiplicateur

$$\lambda = \frac{C}{c} q + \mu(x, y),$$

C étant une constante et $\mu(x, y)$ une solution de l'équation adjointe.

41. Lorsque l'équation (18) admet un multiplicateur λ indépendant de p et de q , la condition $\frac{\partial^2 R}{\partial p \partial q} = \frac{\partial S}{\partial z}$ prouve que ce multiplicateur est aussi indépendant de z . Soit $\mu(x, y)$ ce multiplicateur; les équations (12) sont vérifiées d'elles-mêmes, sauf la dernière qui devient

$$(39) \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(a\mu)}{\partial x} - \frac{\partial(b\mu)}{\partial y} + \frac{\partial(c\mu)}{\partial z} = 0.$$

Si l'équation (18) est linéaire en p, q, z , l'équation (39) est identique à l'équation adjointe. Mais, dans le cas général où a, b, c sont des fonctions quelconques de x, y, z , il est clair que cette équation n'admet pas d'autre solution indépendante de z que $\mu = 0$.

Supposons qu'elle admette une solution différente de zéro. En multipliant l'inconnue z par un facteur convenable, nous pouvons être ramenés au cas où ce multiplicateur est $\mu = 1$. L'équation en μ est alors

$$(39') \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial \mu}{\partial x} - b \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0,$$

et les fonctions a, b, c doivent satisfaire à la condition

$$(40) \quad \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}.$$

On satisfait à cette condition d'une façon générale en posant

$$(41) \quad a = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y},$$

α, β étant des fonctions quelconques de x, y, z . L'équation

$$(18') \quad s + \frac{\partial z}{\partial z} p + \frac{\partial \beta}{\partial z} q + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0$$

est alors la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$(11) \quad du = [p + \beta(x, y, z)] dx - \alpha(x, y, z) dy.$$

Cherchons si l'équation (18') peut admettre deux intégrales linéairement distinctes $\mu_1(x, y), \mu_2(x, y)$. Des deux équations

$$\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x \partial y} = a \frac{\partial \mu_1}{\partial x} - b \frac{\partial \mu_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial x \partial y} = a \frac{\partial \mu_2}{\partial x} + b \frac{\partial \mu_2}{\partial y}$$

on tirera pour a, b des fonctions indépendantes de z et par suite l'équation (18) sera linéaire en p, q, z , à moins que l'on ait

$$\frac{D(\mu_1, \mu_2)}{D(x, y)} = 0.$$

Si en est ainsi, on peut supposer $\mu_2 = f(\mu_1)$; il vient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_2}{\partial x} &= f'(\mu_1) \frac{\partial \mu_1}{\partial x}, & \frac{\partial \mu_2}{\partial y} &= f'(\mu_1) \frac{\partial \mu_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial x \partial y} &= f'(\mu_1) \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x \partial y} + f''(\mu_1) \frac{\partial \mu_1}{\partial x} \frac{\partial \mu_1}{\partial y}, \end{aligned}$$

et il reste la condition

$$f''(\mu_1) \frac{\partial \mu_1}{\partial x} \frac{\partial \mu_1}{\partial y} = 0.$$

On peut satisfaire à cette condition de plusieurs manières :

1° Si $f''(\mu_1) = 0$, on a $\mu_2 = C_1 \mu_1 + C_2$, C_1 et C_2 étant deux constantes arbitraires. On peut choisir arbitrairement $\mu(x, y)$ et l'une des fonctions a, b , et l'on obtient ainsi des équations (18) admettant des multiplicateurs $\mu(x, y)$ dépendant de deux constantes arbitraires.

2° Si $\frac{\partial \mu_1}{\partial x} = 0$, on a forcément $b = 0$, et toute fonction de y seul $\mu = Y$ est un multiplicateur. L'équation (18) admet alors une intégrale intermédiaire. En effet, si $b = 0$, la condition (16) devient $\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial a}{\partial x}$; on a donc $c = \frac{\partial \theta}{\partial x}$, $a = \frac{\partial \theta}{\partial z}$, et l'équation admet

l'intégrale intermédiaire

$$q + \theta(x, y, z) = Y.$$

On voit de même que, si $\frac{\partial u_1}{\partial y} = 0$, l'équation admet une intégrale intermédiaire, et toute fonction X de la seule variable x est un multiplicateur.

En résumé, sauf dans le cas des équations linéaires en p, q, z , et des équations admettant une intégrale intermédiaire, les multiplicateurs indépendants de p, q, z *dépendent au plus de deux constantes arbitraires.*

12. Il nous reste à déterminer les multiplicateurs d'une équation admettant une intégrale intermédiaire. Nous pouvons supposer cette équation ramenée à la forme

$$(42) \quad s + \frac{\partial \theta}{\partial z} q + \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0.$$

et nous traiterons d'abord le cas où il existe une seule intégrale intermédiaire, ce qui exclut le cas où θ serait de la forme

$$\theta = Xz + \Psi(x, y).$$

D'après les résultats exposés aux paragraphes précédents (nos 5 et suiv.), tout multiplicateur de cette équation est de la forme

$$\lambda = f(x, p + \theta) + \varphi(x, y, q),$$

la fonction f étant quelconque et la fonction $\varphi(x, y, q)$ doit être une intégrale, *indépendante de z* , de l'équation

$$(43) \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} \left(q \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q \partial x}.$$

Cette fonction φ satisfait donc aussi à l'équation

$$(44) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \left(q \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0.$$

Si la fonction $\theta(x, y, z)$ est quelconque, il est clair que cette dernière équation exige que l'on ait $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q} = 0$, et par suite φ se réduit à une fonction $\mu(x, y)$. Donc, dans le cas général où la

fonction $\theta(x, y, z)$ ne satisfait à aucune condition particulière, tout multiplicateur de l'équation (42) est de la forme

$$\lambda = f(x, p + \theta) + \mu(x, y) = \frac{\partial F(x, p + \theta)}{\partial p} + \mu(x, y);$$

on a dans ce cas

$$S = \frac{\partial F}{\partial p} + \mu, \quad R = \left(\frac{\partial F}{\partial p} + \mu \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} q + \frac{\partial \theta}{\partial y} \right),$$

et l'on peut prendre

$$f_1 = F(x, p + \theta) + \mu p, \quad z_1 = 0,$$

ce qui donne

$$R = R - \frac{df_1}{dy} = \mu \frac{\partial \theta}{\partial z} q + \mu \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial y} p.$$

La dernière des conditions (12) est alors

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

Si $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$ n'est pas nul, μ est une fonction de la seule variable x , et tout multiplicateur est de la forme

$$\frac{\partial F(x, p + \theta)}{\partial p}.$$

Il est évident en effet que la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales $du = F(x, p + \theta) dx$ est

$$\frac{\partial F}{\partial p} \left(s + \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial z} q \right) = 0.$$

Si $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0$, l'équation (42) est linéaire en q , z , et tout multiplicateur est de la forme

$$\lambda = \frac{\partial F(x, p + \theta)}{\partial p} + \mu(x, y),$$

$\mu(x, y)$ étant une solution de l'équation adjointe.

Cherchons encore dans quels cas l'équation (43) admet des intégrales, indépendantes de z , autres que $\varphi = \mu(x, y)$.

Si $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$ n'est pas nul, l'équation (44) montre que l'on doit avoir

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} = K(x, y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}.$$

En changeant z en $Z = \int K dy$, on remplace l'équation (42) par une équation de même forme pour laquelle on a $\frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} = 0$. L'intégrale générale de l'équation (44) est alors

$$z = \frac{C}{q} + p(x, y),$$

et, en substituant cette expression de z dans la relation (43), on est conduit à la condition

$$2C \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{1}{q^3} = - \frac{\partial C}{\partial x},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0.$$

La fonction θ est donc indépendante de y ; l'équation (42) devient

$$s + \frac{\partial \theta(x, z)}{\partial z} q = 0,$$

et tout multiplicateur de cette équation est de la forme

$$\lambda = \frac{\partial F(x, p + \theta)}{\partial p} + \frac{1}{q} + p(x, y).$$

En opérant comme dans les autres cas, on trouve pour la dernière des conditions (12)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial z} - Y \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0.$$

Une différentiation par rapport à z nous donne

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial y}}{Y} = \frac{\frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3}}{\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}},$$

et la valeur commune de ces rapports étant indépendante de z et de y

est forcément une fonction de la seule variable x . On a donc

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -XY, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} = -X'Y,$$

et la fonction $\theta(x, z)$ satisfait à l'équation différentielle linéaire

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - X \frac{\partial \theta}{\partial z} + X' = 0$$

dont l'intégrale générale est

$$\theta = \frac{\partial \log X}{\partial x} z + X_1 e^{Xz} + X_2,$$

X, X_1, X_2 étant des fonctions de la seule variable x . L'équation (42) est donc de la forme

$$s + \left(\frac{X'}{X} + X_1 X e^{Xz} \right) q = 0.$$

En prenant Xz pour inconnue, et en remplaçant la variable x par une fonction convenable de x , cette équation peut être ramenée à la forme simple

$$(45) \quad s - e^z q = 0;$$

cette équation admet une infinité de multiplicateurs compris dans la formule

$$\lambda = \frac{\partial F(x, p + e^2)}{\partial p} + \frac{Y'}{q} + Y.$$

Il est facile en effet de vérifier que la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$du = [F(x, p + e^2) + Y(p - e^2)] dx + Y'(\log q - z) dy,$$

est identique à

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{Y'}{q} + Y \right) (s + q e^2) = 0.$$

Considérons enfin le cas où $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0$. L'équation (42) est alors linéaire en p, q, z , et en changeant z en $z + \varphi(x, y)$, on peut supposer que l'on a fait disparaître le terme indépendant. L'équation est alors de la forme

$$(46) \quad s - b(x, y)q + \frac{\partial b}{\partial y} z = 0,$$

écartons le cas où $\theta = b(x, y)z$ ne dépendrait pas de y ; l'équation admettrait alors deux intégrales intermédiaires. On déduit de l'équation (44) que toute intégrale $\varphi(x, y, q)$, qui dépend de q , est linéaire en q . Si l'équation (46) admet un multiplicateur linéaire en q , on sait, d'après un résultat rappelé plus haut, que cette équation peut être ramenée à la forme

$$(47) \quad s - \frac{1}{2} \frac{\partial \log v}{\partial x} q - v z = 0.$$

Pour que cette équation admette une intégrale intermédiaire

$$p - \frac{1}{2} \frac{\partial \log v}{\partial x} z = F(x),$$

la fonction $v(x, y)$ doit être une intégrale de l'équation

$$(48) \quad \frac{\partial^2 \log v}{\partial x \partial y} = 2v.$$

On a donc

$$v = \frac{X'Y'}{(X+Y)^2}$$

et l'équation (47) prend la forme

$$(49) \quad s - \frac{1}{2} \left(\frac{X''}{X'} - \frac{2X'}{X+Y} \right) q - \frac{X'Y'}{(X+Y)^2} z = 0.$$

D'après le résultat rappelé plus haut (n° 10), la forme générale des multiplicateurs de cette équation est

$$\lambda = \frac{\partial F(x, p + \theta)}{\partial p} + \frac{C}{v} q + \mu(x, y),$$

F étant une fonction arbitraire, C une constante, et μ une intégrale de l'équation adjointe.

En résumé, toute fonction $f(x, p + \theta)$ est un multiplicateur de l'équation (42). Pour qu'il en existe d'autres, il faut que l'équation soit une équation linéaire, ou qu'elle soit réductible à l'une des formes (45) ou (49), qui sont l'une et l'autre intégrables. L'intégrale générale de l'équation (45) est donnée par la formule

$$ez = \frac{X'}{X+Y},$$

X étant une fonction arbitraire de x , et Y une fonction arbitraire de y .

Lorsque l'équation (18) admet deux intégrales intermédiaires, on peut la ramener à la forme $s = 0$, et les équations (12) deviennent

$$\frac{\partial^2 S}{\partial p \partial q} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial p \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 0.$$

L'intégrale générale est

$$S = f(x, p) + \varphi(y, q);$$

il est évident en effet que la condition d'intégrabilité de l'équation

$$du = F(x, p) dx + \Phi(y, q) dy$$

conduit, quelles que soient les fonctions F et Φ , à l'équation $s = 0$.

13. Nous avons passé en revue, dans les paragraphes précédents, toutes les formes possibles pour les multiplicateurs d'une équation

$$s + ap + bq + c = 0.$$

Les coefficients a , b , c étant donnés, pour trouver effectivement les multiplicateurs de cette équation, on aura à examiner si certaines équations simultanées sont compatibles. Prenons par exemple l'équation

$$(50) \quad s + c(x, y, z) = 0.$$

Un multiplicateur est de la forme

$$\lambda = F(x, y, p) + \Phi(x, y, q),$$

et les équations (12) du n° 3 prouvent que les fonctions F et Φ doivent satisfaire aux relations

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial y} = c \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q \partial x} = c \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2}.$$

Écartons le cas où c serait indépendant de z : l'équation serait alors réductible à la forme $s = 0$. On doit donc avoir

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q \partial x} = 0,$$

et le multiplicateur est de la forme

$$Xp + Yq + \mu(x, y).$$

La dernière des conditions (12) donne ensuite

$$(51) \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial(cX)}{\partial x} + \frac{\partial(cY)}{\partial y}.$$

Pour qu'il existe un multiplicateur, il faut que l'on puisse choisir les fonctions X et Y de façon que l'équation (51) admette une intégrale $\mu(x, y)$ indépendante de z . Nous pouvons supposer que $\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$ n'est pas nul, car l'équation serait linéaire en z , et l'on serait ramené à un problème dont la solution est connue. De l'équation (51) on déduit alors, en différentiant par rapport à z ,

$$\mu \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(cX)}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2(cY)}{\partial y \partial z}.$$

Une nouvelle différentiation par rapport à z conduit à une relation de la forme

$$AX + BX' + cY + bY' = 0,$$

A, B, C, D ne dépendant que des dérivées de c . Il faudra que l'on puisse satisfaire à cette relation en prenant pour X une fonction de x et pour Y une fonction de y . Je laisserai de côté l'examen de cette question.

III.

14. Étant donnée une équation bilinéaire quelconque en p, q

$$(52) \quad s + gpq + ap + bq + c = 0,$$

où g, a, b, c sont des fonctions de x, y, z , la recherche des systèmes de deux équations de Pfaff à six variables, dont elle est une résolvante de seconde espèce, revient à la détermination de deux fonctions $f(x, y, z, p, u), \varphi(x, y, z, q, u)$ telles que la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$du = f(x, y, z, p, u) dx + \varphi(x, y, z, q, u) dy$$

soit identique, à un facteur près, à l'équation (52). Or cette condi-

tion d'intégrabilité est

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial p} s + \frac{\partial f}{\partial u} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p + \frac{\partial \varphi}{\partial q} s + \frac{\partial \varphi}{\partial u} f;$$

il faudra donc que l'on ait identiquement

$$(53) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial p} \right) (x p q + a p + b q + c) + \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial u} f = 0.$$

Tous les termes de cette relation qui précèdent les deux derniers sont linéaires par rapport à l'une des variables p ou q , et satisfont par conséquent à la relation $\frac{\partial^2}{\partial p^2 \partial q^2} = 0$. Il faudra donc que l'on ait aussi

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2 \partial q^2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial u} f \right) = 0,$$

ou, en développant,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial u \partial p^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u \partial q^2} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0,$$

ce que l'on peut écrire, *en supposant* $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$ *et* $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}$ *différents de zéro,*

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\log \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\log \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} \right).$$

La valeur commune des deux membres est forcément indépendante de p et de q ; c'est donc une fonction des variables x, y, z, u seulement, et l'on a par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} &= U(x, y, z, u) f_1(x, y, z, p), \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} &= U(x, y, z, u) \varphi_1(x, y, z, q). \end{aligned}$$

On en déduit pour f et φ des expressions de la forme

$$(54) \quad \begin{cases} f = U(x, y, z, u) F(x, y, z, p) + U_1(x, y, z, u) p + U_2(x, y, z, u), \\ \varphi = U(x, y, z, u) \Phi(x, y, z, q) + V_1(x, y, z, u) q + V_2(x, y, z, u), \end{cases}$$

où $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$ et $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2}$ ne sont pas nuls.

L'équation aux différentielles totales

$$du = (U F + U_1 p + U_2) dx + (U \Phi + V_1 q + V_2) dy$$

peut se simplifier en prenant pour inconnue une nouvelle fonction

$$v = \theta(x, y, z, u), \quad \text{ou} \quad \theta = \int \frac{du}{U},$$

ce qui ne change pas la condition d'intégrabilité. On a en effet

$$\begin{aligned} dv &= \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy + \frac{\partial \theta}{\partial z} dz + \frac{\partial \theta}{\partial u} du \\ &= \frac{du}{U} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + p \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dx + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} + q \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dy, \end{aligned}$$

et l'équation devient

$$\begin{aligned} dv &= F dx + \Phi dy + \frac{1}{U} (U_1 p + U_2) dx \\ &\quad + \frac{1}{U} (V_1 q + V_2) dy + \frac{d\theta}{dx} dx + \frac{d\theta}{dy} dy. \end{aligned}$$

Si l'on remplace dans U , U_1 , U_2 , V_1 , V_2 , $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$, la variable u par son expression au moyen de x , y , z , v , on est finalement ramené à une équation de la forme

$$(55) \quad du = F dx + \Phi dy + (U_1 p + U_2) dx + (V_1 q + V_2) dy,$$

U_1 , U_2 , V_1 , V_2 étant des fonctions de x , y , z , u , indépendantes de p , q .

La condition d'intégrabilité est

$$\begin{aligned} (56) \quad &\left(\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial q} + U_1 - V_1 \right) s + \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ &+ \left(\frac{\partial U_1}{\partial u} p + \frac{\partial U_2}{\partial u} \right) (\Phi + V_1 q + V_2) - \left(\frac{\partial V_1}{\partial u} q + \frac{\partial V_2}{\partial u} \right) (F + U_1 p + U_2) \\ &+ \frac{\partial U_1}{\partial y} p + \frac{\partial U_2}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial x} q - \frac{\partial V_2}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Supposons d'abord que $U_1 = V_1$ soit une fonction $\psi(x, y, z)$ indépendante de u . Pour que la valeur de s déduite de cette condition soit indépendante de u , il faut que la somme des termes qui suivent le premier ne renferme pas u . Or les termes de cette somme qui ne sont pas bilinéaires en p et q et qui peuvent dépendre de u sont les suivants :

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial u} p + \frac{\partial U_2}{\partial u} \right) \Phi - \left(\frac{\partial V_1}{\partial u} q + \frac{\partial V_2}{\partial u} \right) F.$$

Les termes tels que $p\Phi$, Φ , qF , F ne peuvent se réduire avec aucun autre. Il faudra donc que $\frac{\partial U_1}{\partial u}$, $\frac{\partial V_1}{\partial u}$, $\frac{\partial V_2}{\partial u}$ soient indépendants de u , ou que U_1 , U_2 , V_2 soient des fonctions linéaires de u .

$$U_1 = A_1 u + B_1, \quad U_2 = A_2 u + B_2, \quad V_2 = A_3 u + B_3.$$

En remplaçant U_1 , V_1 , U_2 , V_2 par leurs expressions, et en égalant à zéro les termes qui dépendent de u , on obtient les conditions

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial A_3}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial z} = \frac{\partial A_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial y} = \frac{\partial A_3}{\partial x},$$

qui expriment que $A_1 dz + A_2 dx + A_3 dy = dV$, et l'équation (55) est de la forme

$$du = F dx + \Phi dy + u dV + (B_1 p + B_2) dx + [(B_1 + \psi)q + B_3] dy,$$

En posant $u = e^v$, l'équation (55) est remplacée par une équation aux différentielles totales

$$dv = e^{-v} \{ (F + B_1 p + B_2) dx + [\Phi + (B_1 + \psi)q + B_3] dy \},$$

où le second membre ne renferme pas v . Toute équation de la forme (52) obtenue de cette façon est donc comprise parmi les équations qui ont été étudiées dans la première partie de ce travail, et l'on n'obtient pas de système de Pfaff différent de ceux qui ont été déjà déterminés.

15. Supposons maintenant que $U_1 - V_1$ dépende de u . En donnant à u deux valeurs u_0 , u_1 , telles que $(U_1 - V_1)_0$ et $(U_1 - V_1)_1$ soient différents, et retranchant les deux égalités ainsi déduites de la formule (56), il vient

$$\begin{aligned} & [(U_1 - V_1)_1 - (U_1 - V_1)_0] s \\ & + \left\{ \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial u} \right)_1 - \left(\frac{\partial U_1}{\partial u} \right)_0 \right] p + \left(\frac{\partial U_2}{\partial u} \right)_1 - \left(\frac{\partial U_2}{\partial u} \right)_0 \right\} \Phi \\ & - \left\{ \left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial u} \right)_1 - \left(\frac{\partial V_1}{\partial u} \right)_0 \right] q + \left(\frac{\partial V_2}{\partial u} \right)_1 - \left(\frac{\partial V_2}{\partial u} \right)_0 \right\} F + \dots = 0, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant bilinéaires en p , q . Pour que l'expression de s obtenue soit elle-même bilinéaire en p et q , il faut évidemment que les termes en F et Φ disparaissent, quelles que soient les valeurs u_0 , u_1 , ce qui exige que U_1 , U_2 , V_1 , V_2 soient des fonctions linéaires de u . Nous sommes ainsi conduits à recher-

cher les équations aux différentielles totales

$$(57) \quad du = [F(x, y, z, p) + u(\alpha p + \beta)] dx \\ + [\Phi(x, y, z, q) + u(\gamma q + \delta)] dy,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des fonctions de x, y, z , dont la condition d'intégrabilité conduit à une équation de la forme (52). Les calculs qui vont suivre ne supposent pas que $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$ et $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2}$ sont différents de zéro.

La condition d'intégrabilité de l'équation (57) est, en ordonnant par rapport à u ,

$$\frac{dF}{dy} - \frac{d\Phi}{dx} + (\alpha p + \beta)\Phi - (\gamma q + \delta)F - \left(\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)s \\ + u \left[(\alpha - \gamma)s + p \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dy} - q \frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\delta}{dx} \right] = 0.$$

Pour que cette condition soit indépendante de u , il faut et il suffit que les expressions de s obtenues en égalant à zéro le coefficient de u et le terme indépendant de u soient identiques. S'il en est ainsi, l'équation obtenue est aussi la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$(58) \quad dz = (\alpha p + \beta) dx + (\gamma q + \delta) dy.$$

On n'obtient donc pas de cette façon d'équations différentes de celles qui ont été déjà étudiées, mais ces équations peuvent être des résolvantes de seconde espèce pour de nouveaux systèmes de deux équations de Pfaff, ce qui conduit à de nouvelles espèces de transformations de Bäcklund.

La condition d'intégrabilité de l'équation (58) conduit à une équation du second ordre ⁽¹⁾

$$s + ap + bq + c = 0$$

qui admet le multiplicateur $z - \gamma$. En multipliant z par une fonction convenable de x, y , on peut toujours supposer que cette équation admet pour multiplicateur l'unité, c'est-à-dire que l'on a $z - \gamma = 1$; c'est ce que nous ferons par la suite. L'équation (57) est alors

$$du = F dx - \Phi dy + u\gamma(p dx + q dy) + u[(p + \beta) dx + \delta dy].$$

(1) On suppose que l'on choisit l'inconnue z de façon qu'il n'y ait pas de terme en pq dans l'équation (n° 4).

on

$$du = u\gamma dz = F dx + \Phi dy + u[(p + \beta) dx + \gamma dy],$$

Posons $u = e^{\eta(x, y, z)}$, où $\eta = e^{\int \gamma dz}$, l'équation devient

$$\begin{aligned} \eta dv + e \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} dz \right) &= e \eta \gamma dz \\ &= F dx + \Phi dy + e \eta [(p + \beta) dx + \gamma dy], \end{aligned}$$

on

$$dv = \frac{F dx + \Phi dy}{\eta} = e \left[\left(p + \beta - \frac{\partial \log \eta}{\partial x} \right) dx + \left(\gamma - \frac{\partial \log \eta}{\partial y} \right) dy \right].$$

En modifiant un peu les notations, nous écrirons cette équation :

$$(59) \quad du = F dx + \Phi dy + u[(p + \beta) dx + \gamma dy];$$

pour que la condition d'intégrabilité soit indépendante de u , il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$(60) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial p} \right) \left(\frac{dx}{dx} - \frac{dy}{dy} \right) + \frac{dF}{dy} - \frac{d\Phi}{dx} + \Phi(p + \beta) + F\gamma = 0,$$

et cette condition d'intégrabilité est alors

$$(61) \quad s = \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dy} = 0.$$

Les fonctions $z(x, y, z)$ et $\beta(x, y, z)$ étant données, nous allons chercher s'il est possible de déterminer deux fonctions $F(x, y, z, p)$ et $\Phi(x, y, z, q)$ satisfaisant à la relation (60). Remarquons que l'on peut, sans changer l'équation (61), remplacer z par $z - \frac{\partial \theta}{\partial y}$, et β par $\beta + \frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\theta(x, y)$ étant une fonction arbitraire des deux variables x et y . On peut donc toujours ajouter à l'une des fonctions z ou β une fonction quelconque de x et de y , à condition d'ajouter aussi à l'autre une fonction convenablement choisie des mêmes variables.

Nous pouvons observer aussi que, si les fonctions $F(x, y, z, p)$, $\Phi(x, y, z, q)$ vérifient la relation (60), il en est de même des fonctions CF , $C\Phi$, quelle que soit la constante C . Si l'on connaît deux systèmes de solutions (F_1, Φ_1) , (F_2, Φ_2) , $F = C_1 F_1 + C_2 F_2$, $\Phi = C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2$ est un autre système de solutions, quelles que soient les constantes C_1, C_2 .

16. Cherchons d'abord s'il est possible de satisfaire à la relation (60) en prenant pour F et Φ des fonctions linéaires de p et de q respectivement

$$F = A(x, y, z)p + B(x, y, z), \quad \Phi = C(x, y, z)q + D(x, y, z).$$

En remplaçant F et Φ par ces expressions, la condition (60) devient

$$\begin{aligned} (C - \lambda) \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial z} p + \frac{\partial^2}{\partial z^2} q \right) + p \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} q \right) \\ + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial z} q - q \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial z} p \right) - \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial z} p \\ + (Cq + D)(p + z) + \alpha(\lambda p + B) = 0; \end{aligned}$$

les fonctions A, B, C, D doivent donc satisfaire aux quatre conditions

$$(62) \quad \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial z} - C, \\ (C - \lambda) \frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial y} + \lambda z - \frac{\partial D}{\partial z} + D = 0, \\ (C - \lambda) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} + C z = 0, \\ (C - \lambda) \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial x} + D z + B z = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose $C = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}$, la première équation donne $\frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial U}{\partial z}$ et, par suite, on a

$$\lambda = \frac{\partial U}{\partial z} - U + \mu(x, y).$$

Comme on peut ajouter à U une fonction quelconque de x et de y , sans changer C, nous pouvons remplacer U par $U + \mu(x, y)$, et poser, par conséquent,

$$\lambda = \frac{\partial U}{\partial z} - U, \quad C = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad U = C - \lambda.$$

La seconde des conditions (62) devient alors

$$U \frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2 \partial z} - \frac{\partial U}{\partial y} + z \left(\frac{\partial U}{\partial z} - U \right) - \frac{\partial D}{\partial z} + D = 0$$

ou

$$\frac{\partial(zU)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - U \right) - zU = \frac{\partial D}{\partial z} - D,$$

ce que l'on peut encore écrire, en multipliant les deux membres par e^{-z} ,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[e^{-z} \left(zU + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial z} (e^{-z} D),$$

et l'on en tire

$$D = \frac{\partial U}{\partial y} + zU + e^z \varphi(x, y).$$

On déduit de même de la troisième des conditions (62) que B est de la forme

$$B = \frac{\partial U}{\partial x} + \beta U + f(x, y).$$

En remplaçant A, B, C, D par les expressions précédentes dans la dernière des conditions (62), on trouve, après réductions, la nouvelle condition

$$(63) \quad \frac{\partial f}{\partial y} + z f = e^z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \beta \varphi \right).$$

L'équation (59) peut s'écrire, lorsque F et Φ sont linéaires en p et q respectivement,

$$\begin{aligned} du = & \left[u(p + \beta) + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - U \right) p + \frac{\partial U}{\partial x} + \beta + f \right] dx \\ & + \left(\frac{\partial U}{\partial z} q + \frac{\partial U}{\partial y} + zU + e^z \varphi - zu \right) dy \end{aligned}$$

ou, en posant $u - U = v$,

$$(59') \quad dv = v(p + \beta) dx - vz dy + f dx + e^z \varphi dy.$$

Si f et φ sont nuls, cette équation (59') conduit évidemment à la condition d'intégrabilité (61); cette solution était facile à prévoir *a priori*, mais elle ne donne pas de systèmes de Pfaff nouveaux.

Pour qu'il y ait une solution différente de cette solution banale, il faut que l'on puisse déterminer deux fonctions $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ satisfaisant à la relation (63). On pourra prendre alors

$$A = 0, \quad B = f(x, y), \quad C = 0, \quad D = e^z \varphi(x, y),$$

et le système de Pfaff,

$$(64) \quad \begin{cases} dz = p dx + q dy, \\ dv = v(p + \beta) dx - vz dy + f dx + e^z \varphi dy, \end{cases}$$

admettra l'équation (62) pour résolvante de seconde espèce.

Nous pouvons encore transformer la condition (63). Supposons que les fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ satisfassent à cette condition. Si l'on pose, dans l'équation aux différentielles totales (59'), $v = \alpha f$, elle devient

$$dv = v \left[\left(p + \beta - \frac{\partial \log f}{\partial x} \right) dx - \left(z + \frac{\partial \log f}{\partial y} \right) dy \right] = dx + e^z \frac{\varphi}{f} dy;$$

c'est une équation de même forme que la première, où z , β , f , φ sont remplacés respectivement par

$$z + \frac{\partial \log f}{\partial y}, \quad \beta - \frac{\partial \log f}{\partial x}, \quad 1, \quad \frac{\varphi}{f}.$$

Or la relation (63) peut s'écrire

$$z + \frac{\partial \log f}{\partial y} = e^z \left[\frac{\partial \left(\frac{\varphi}{f} \right)}{\partial x} - \left(\beta - \frac{\partial \log f}{\partial x} \right) \frac{\varphi}{f} \right];$$

on peut donc supposer la fonction $f(x, y)$ égale à l'unité, les coefficients z , β satisfaisant à une relation de la forme

$$(63') \quad z = e^z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \beta \varphi \right).$$

Si nous posons ensuite $z = Z - \log \varphi(x, y)$, β est remplacée par $\beta - \frac{\partial \log \varphi}{\partial x}$, et la relation (63') devient finalement

$$(63'') \quad z + \beta e^z = 0.$$

Donc, toutes les fois qu'il existe des fonctions $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ satisfaisant à une relation de la forme (63), on peut, par une transformation simple, ramener l'équation (59') à la forme

$$(59'') \quad dv = v[(p + \beta) dx - z dy] + dx + e^z dy,$$

z et β étant liés par la condition (63'').

On vérifie immédiatement que la condition d'intégrabilité est indépendante de v .

Le calcul précédent suppose toutefois que les deux fonctions f et φ sont différentes de zéro. Si $\varphi = 0$, z doit être indépendant de y , et l'on peut alors, d'après une remarque déjà utilisée, supposer $z = 0$. On doit alors avoir $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, et l'équation aux diffé-

rentielles totales ($\delta g'$) se réduit à

$$dv = [v(p + \beta) + \lambda] dx,$$

dont la condition d'intégrabilité est

$$s + \frac{d\beta}{dy} = 0,$$

quelle que soit la fonction λ . On est donc conduit à une équation admettant une intégrale intermédiaire du premier ordre.

De même, si $f = 0$, β ne dépend pas de z : on peut supposer $\beta = 0$, $\varphi = Y$, et l'équation ($\delta g'$) devient

$$dv = v p dx + (\lambda e^z - z v) dy.$$

La condition d'intégrabilité est, quelle que soit la fonction λ ,

$$s - \frac{d\lambda}{dx} = 0,$$

et admet une intégrale intermédiaire du premier ordre.

Supposons enfin qu'il existe une infinité de systèmes de deux fonctions (f, φ) , différentes de zéro, satisfaisant à la condition (63). Soient (f_1, φ_1) , (f_2, φ_2) deux systèmes distincts de solutions de cette équation. Des deux relations

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} + \alpha f_1 = e^z \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \beta \varphi_1 \right),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} + \alpha f_2 = e^z \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \beta \varphi_2 \right),$$

on tire

$$\alpha(f_1 \varphi_2 - f_2 \varphi_1) = e^z \left(\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) + \varphi_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} - \varphi_2 \frac{\partial f_1}{\partial x},$$

$$- \beta(f_1 \varphi_2 - f_2 \varphi_1) = e^{-z} \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial y} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) + f_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - f_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}.$$

On ne peut avoir $f_2 \varphi_1 = f_1 \varphi_2$: en effet, en posant $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{f_2}{f_1} = \varphi$, les équations précédentes donneraient $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, et les deux systèmes de solutions (f_1, φ_1) , (f_2, φ_2) ne seraient pas distincts. Les fonctions α et β sont donc de la forme

$$\alpha = a(x, y) e^z + \pi(x, y),$$

$$\beta = b(x, y) e^{-z} + \pi_1(x, y).$$

Ainsi qu'on l'a déjà remarqué plusieurs fois, nous pouvons, en changeant z en $z + \psi(x, y)$, augmenter α et β de fonctions arbitraires de x et de y . On peut donc, sans diminuer la généralité, supposer les deux fonctions α et β de la forme

$$(65) \quad \alpha = a(x, y)e^z, \quad \beta = b(x, y)e^{-z}.$$

Toutes les fois que les fonctions α et β sont de cette forme, il existe une infinité de systèmes de deux fonctions $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, satisfaisant à la condition (63). Cette condition devient, en effet,

$$\frac{\partial f}{\partial y} + af e^z = e^z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - b\varphi e^{-z} \right),$$

et l'on a, pour déterminer f et φ , les deux équations simultanées

$$(66) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -b\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = af;$$

l'élimination de φ conduit à une équation linéaire de Laplace pour la fonction $f(x, y)$.

En résumé, quatre cas peuvent se présenter :

1^o Si α et β sont des fonctions quelconques, il n'y a pas d'autres fonctions $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ satisfaisant à la relation (63) que $f = 0$, $\varphi = 0$.

2^o Si, en ajoutant à z une fonction de x, y convenable, on peut ramener l'équation aux différentielles totales à la forme (59") où α et β sont liées par la relation

$$\alpha + \beta e^z = 0,$$

la fonction β étant quelconque; l'équation (63) admet le système de solutions $f = 1$, $\varphi = -1$, et celui-là seulement.

3^o Si l'une seule des fonctions α , β , la première par exemple, est indépendante de z , on peut supposer $\alpha = 1$, $f = Y$, $\varphi = 0$.

4^o Enfin, si les fonctions α , β sont de la forme (65), on peut être ramenées à cette forme, il existe une infinité de systèmes de deux fonctions $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ satisfaisant à la condition (63), et dépendant de deux fonctions arbitraires d'une variable.

17. Considérons en particulier le dernier cas. Nous écrirons

l'équation aux différentielles totales en changeant u en $\frac{1}{u}$,

$$d \log u = -(p + b e^{-z}) dx + a e^z dy;$$

des deux relations

$$(67) \quad \frac{\partial \log u}{\partial x} = -p - b e^{-z}, \quad \frac{\partial \log u}{\partial y} = a e^z,$$

on tire, en éliminant u , l'équation

$$(68) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{d}{dy}(b e^{-z}) - \frac{d}{dx}(a e^z) = 0,$$

tandis que l'élimination de z conduit à une équation linéaire en u

$$(69) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \log a}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + a b u = 0.$$

L'équation (68) est une équation de Moutard qui se déduit de l'équation linéaire (69) par la transformation de Bäcklund B_2 définie par les formules (67).

Soient f et φ un système de solutions des équations (66). L'équation aux différentielles totales

$$(70) \quad dv = v[(p + b e^{-z}) dx - a e^z dy] + f dx + e^z \varphi dy$$

conduit encore à la condition d'intégrabilité (68), et la fonction v est elle-même une intégrale d'une équation du second ordre qui se déduit de l'équation linéaire (69) par une transformation connue. En effet, si l'on rapproche les relations

$$(71) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = v(p + b e^{-z}) + f, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^z(\varphi - av)$$

des conditions (67), elles deviennent, en éliminant z et p ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= f - v \frac{\partial \log u}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -v \frac{\partial \log u}{\partial y} + \frac{\varphi}{a} \frac{\partial \log u}{\partial y}, \end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{\partial (uv)}{\partial x} = uf, \quad \frac{\partial (uv)}{\partial y} = \frac{\varphi}{a} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

L'élimination de uc conduit encore à l'équation (69), tandis que l'élimination de u conduit à une autre équation linéaire, à laquelle satisfait le produit uc . Ce sont des transformations bien connues, et nous n'obtenons pas de cette façon de résultats essentiellement nouveaux.

18. Cherchons maintenant s'il est possible de satisfaire à la relation (60) en prenant pour $F(x, y, z, p)$ une fonction *non linéaire* de p . En différenciant cette relation (60) deux fois par rapport à p , on obtient une nouvelle relation, où ne figure plus la fonction Φ ,

$$-\frac{\partial^3 F}{\partial p^3} \left(\frac{dz}{dx} + \frac{d\beta}{dy} \right) - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial^3 F}{\partial p^2 \partial y} + \frac{\partial^3 F}{\partial p^2 \partial z} q + z \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 0,$$

qui se décompose en deux équations distinctes :

$$\frac{\partial^3 F}{\partial p^2 \partial z} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial^3 F}{\partial p^3} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial p^2 \partial y} + z \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} - \frac{\partial^3 F}{\partial p^3} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} p \right) = 0.$$

On déduit de la première que $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$ est une fonction des variables $x, y, v = p + \beta$.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = f(x, y, p + \beta);$$

on a ensuite

$$\frac{\partial^3 F}{\partial p^3} = \frac{df}{dv}, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial p^2 \partial y} = \frac{df}{dy} + \frac{df}{dv} \frac{\partial \beta}{\partial y},$$

et la seconde équation devient

$$(72) \quad \frac{df}{dy} + zf = \frac{\partial z}{\partial z} \left(2f + v \frac{df}{dv} \right) + \frac{df}{dv} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \beta \frac{\partial z}{\partial z} \right).$$

Nous avons à examiner dans quels cas cette équation admet une intégrale *différente de zéro* et indépendante de z . En différenciant par rapport à z , on obtient la nouvelle relation

$$(73) \quad f \left(\frac{\partial z}{\partial z} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} \right) = \frac{df}{dv} \left(v \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} - \beta \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} \right) = 0.$$

Supposons d'abord que $\frac{\partial z}{\partial z} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial z^2}$ ne soit pas nul. Le quo-

tient

$$\frac{f}{\frac{\partial f}{\partial v}} = v \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}}{\frac{\partial x}{\partial z} - v \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}} = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial z} - \beta \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}}{\frac{\partial x}{\partial z} - v \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}}$$

ne doit dépendre que de x, y, v . Il faut donc que le coefficient de v soit une fonction des seules variables x, y , c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{\partial x}{\partial z} \varphi(x, y).$$

Si $\varphi(x, y)$ n'est pas nul, ce que nous supposons d'abord, x est de la forme

$$(74) \quad x = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) e^{\varphi(x, y) z},$$

et, en remplaçant x par cette expression dans l'équation (72), elle devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v} + (\varphi_1 + \varphi_2 e^{\varphi(x, y) z}) f &= \varphi \varphi_2 e^{\varphi z} \left(v f + v \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} e^{\varphi z} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} z e^{\varphi z} - \beta \varphi_2 \varphi e^{\varphi z} \right). \end{aligned}$$

En donnant à v une valeur telle que $\frac{\partial f}{\partial v}$ ne soit pas nul, on voit que, pourvu que φ ne soit pas nul, β est de la forme

$$(75) \quad \beta = \psi_0(x, y) + \psi_1(x, y) z + \psi_2(x, y) e^{-\varphi z},$$

Substituons ces expressions de x et de β dans l'équation (72); elle devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} + (\varphi_1 + \varphi_2 e^{-\varphi z}) f &= \varphi \varphi_2 e^{\varphi z} \left(v f + v \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ &- \frac{\partial f}{\partial v} \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} e^{\varphi z} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} z e^{\varphi z} - \varphi \varphi_2 e^{\varphi z} (\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 e^{-\varphi z}) \right] \end{aligned}$$

et se décompose en trois équations distinctes :

$$(76) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} + f \varphi_1 = \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \varphi \varphi_2 \psi_2 \right), \\ \varphi_2 f = \varphi \varphi_2 \left(v f + v \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \varphi \varphi_2 \psi_0 \right), \\ \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \psi_1 \right) = 0. \end{cases}$$

Si $\varphi_2 \frac{\partial f}{\partial v}$ n'est pas nul, on tire de la dernière de ces relations

$$\psi_1 = \frac{\partial \log \varphi}{\partial x},$$

et les deux premières donnent

$$(77) \quad \begin{cases} \frac{\partial \log f}{\partial v} = \frac{1 - 2\varphi}{\varphi v + \frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x} - \varphi \psi_0} \\ \frac{\partial \log f}{\partial y} = \frac{\partial \log f}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \varphi \varphi_2 \psi_2 \right) - \varphi_1, \end{cases}$$

car le dénominateur ne peut être nul, puisque φ est supposé différent de zéro. Pour obtenir la condition d'intégrabilité de ce système, il suffit de calculer de deux façons la dérivée seconde $\frac{\partial^2 \log f}{\partial y \partial v}$. En différenciant les deux équations par rapport à v , on a

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial y \partial v} = \frac{\partial^2 \log f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \varphi \varphi_2 \psi_2 \right) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \varphi \varphi_2 \psi_2 \right) \frac{\varphi(2\varphi - 1)}{\left(\varphi v + \frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x} - \varphi \psi_0 \right)^2}.$$

Si l'on différencie la première par rapport à y , on a, d'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log f}{\partial v \partial y} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} v - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x} - \varphi \psi_0 \right) - (1 - 2\varphi) \left[\frac{\partial^2 \log \varphi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(\varphi \psi_0)}{\partial y} \right] \\ &= \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial y} v - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x} - \varphi \psi_0 \right) - (1 - 2\varphi) \left[\frac{\partial^2 \log \varphi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(\varphi \psi_0)}{\partial y} \right]}{\left(\varphi v + \frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x} - \varphi \psi_0 \right)^2}. \end{aligned}$$

Pour que ces deux expressions de $\frac{\partial^2 \log f}{\partial y \partial v}$ soient les mêmes, il est nécessaire que $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ soit nul, c'est-à-dire que $\varphi(x, y)$ soit une fonction X de la seule variable x . Les formules (76) donnent alors

$$(76') \quad \begin{cases} \frac{\partial \log f}{\partial v} = \frac{1 - 2X}{Xv + \frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x} - X\psi_0} \\ \frac{\partial \log f}{\partial y} = \frac{\partial \log f}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - X\varphi_2 \psi_2 \right) - \varphi_1, \\ \psi_1 = \frac{X'}{X}. \end{cases}$$

La condition d'intégrabilité des deux premières équations devient

$$\frac{X(2X-1)\left(\frac{d\varphi_1}{dx} - X\varphi_2\psi_2\right)}{\left(Xv + \frac{d\log\varphi_2}{dx} - X\psi_0\right)^2} = \frac{(2X-1)\left(\frac{d^2\log\varphi_2}{dx\,dy} - X\frac{d\psi_0}{dy}\right)}{\left(Xv + \frac{d\log\varphi_2}{dx} - X\psi_0\right)^2},$$

ou, en supposant $(1) 2X-1 \neq 0$,

$$\frac{d^2\log\varphi_2}{dx\,dy} - X\frac{d\psi_0}{dy} = X\frac{d\varphi_1}{dx} - X^2\varphi_2\psi_2,$$

d'où l'on tire

$$\psi_2 = \frac{1}{X\varphi_2}\left(\frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{d\psi_0}{dy}\right) - \frac{1}{X^2\varphi_2}\frac{d^2\log\varphi_2}{dx\,dy}.$$

On a donc les expressions générales des coefficients α et β ,

$$(78) \quad \begin{cases} \alpha = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)e^{Xz}, \\ \beta = \psi_0(x, y) + \frac{X'}{X}z + \frac{e^{-Xz}}{X\varphi_2}\left(\frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{d\psi_0}{dy} - \frac{1}{X}\frac{d^2\log\varphi_2}{dx\,dy}\right), \end{cases}$$

qui dépendent d'une fonction arbitraire X de la variable x et de trois fonctions arbitraires $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $\psi_0(x, y)$ des deux variables x et y .

L'expression correspondante de la fonction f est

$$f = X_1 e^{-\int \varphi_1 dy} \left(Xv + \frac{d\log\varphi_2}{dx} - X\psi_0\right)^{\frac{1}{X}-2},$$

X_1 étant une nouvelle fonction arbitraire de x .

Mais on peut, par quelques transformations simples, faire disparaître quelques-unes des fonctions arbitraires qui figurent dans les expressions de α , β , f . Dans l'équation aux différentielles totales

$$d\log u = (p + \beta) dx - \alpha dy,$$

où α et β ont les expressions (78), posons

$$z = Z - \frac{1}{X} \log \varphi_2, \quad p = P + \frac{X'}{X} \log \varphi_2 - \frac{1}{X} \frac{d \log \varphi_2}{dx};$$

(1) On aurait alors $2 \frac{d^2 z}{d\alpha^2} = \frac{d\alpha}{d\alpha}$, cas qui sera examiné plus loin.

cette équation devient

$$d \log u = \left[p + \frac{X'}{X^2} \log \varphi_2 - \frac{1}{X} \frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x} + \psi_0 + \frac{X'}{X} \left(z - \frac{1}{X} \log \varphi_2 \right) \right. \\ \left. + \frac{e^{-Xz + \log \varphi_2}}{X \varphi_2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} - \frac{1}{X} \frac{\partial^2 \log \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) \right] dx \\ - (\varphi_1 + \varphi_2 e^{Xz - \log \varphi_2}) dy.$$

C'est une équation de même forme que la première, où l'on aurait $\varphi_2 = 1$, et où ψ_0 serait remplacé par $\psi_0 - \frac{1}{X} \frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x}$. On peut donc, sans restreindre la généralité, prendre pour α et β les expressions

$$(78') \quad \begin{cases} \alpha = \varphi_1(x, y) + e^{Xz}, \\ \beta = \psi_0(x, y) + \frac{X'}{X} z + \frac{e^{-Xz}}{X} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right). \end{cases}$$

L'équation aux différentielles totales

$$d \log u = \left[p + \psi_0 + \frac{X'}{X} z + \frac{e^{-Xz}}{X} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right) \right] dx - (\varphi_1 + e^{Xz}) dy$$

peut à son tour être remplacée par l'équation

$$d \log u = \left[p + \psi_0 + \int \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dy + \frac{X'}{X} z + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \frac{e^{-Xz}}{X} \right] dx - e^{Xz} dy,$$

qui donne la même condition d'intégrabilité. Les valeurs correspondantes de α et β sont

$$(78'') \quad \begin{cases} \alpha = e^{Xz}, \\ \beta = \psi_0 + \int \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dy + \frac{X'}{X} z + \frac{e^{-Xz}}{X} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right); \end{cases}$$

ce sont encore des expressions de la forme (78) où l'on aurait

$\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 1$, et où l'on aurait remplacé ψ_0 par $\psi_0 + \int \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dy$. Nous pouvons donc prendre pour α et β les expressions

$$(79) \quad \alpha = e^{Xz}, \quad \beta = \psi_0 + \frac{X'}{X} z + \frac{e^{-Xz}}{X} \frac{\partial \psi_0}{\partial y},$$

$\psi_0(x, y)$ étant une fonction arbitraire. On a alors

$$= X_1(r - \psi_0)^{\frac{1}{X}-2} = X_1(p + \beta - \psi_0)^{\frac{1}{X}-2},$$

X_1 étant une autre fonction arbitraire de x ou, en tenant compte de l'expression de β ,

$$(80) \quad f = X_1 \left(p + \frac{X'}{X} z + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{e^{-\lambda z}}{X} \right)^{\frac{1}{\lambda}-2}.$$

Si X est différent de l'unité, $F(x, y, z, p)$ est de la forme

$$F = X_2 \left(p + \frac{X'}{X} z + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{e^{-\lambda z}}{X} \right)^{\frac{1}{\lambda}} + \Lambda p + B,$$

et l'on vérifie facilement que l'on satisfait à la condition (60) en prenant

$$F = X_2 \left(p + \frac{X'}{X} z + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{e^{-\lambda z}}{X} \right)^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \Phi = 0,$$

quelle que soit la fonction arbitraire $X_2(x)$.

L'équation aux différentielles totales

$$(81) \quad du = u \left[\left(p + \psi_0 + \frac{X'}{X} z + \frac{e^{-\lambda z}}{X} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right) dx - e^{\lambda z} dy \right] \\ - X_2 \left(p + \frac{X'}{X} z + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{e^{-\lambda z}}{X} \right)^{\frac{1}{\lambda}} dx,$$

donne donc toujours la même condition d'intégrabilité, quelle que soit la fonction X_2 ,

$$(82) \quad z + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \frac{X'}{X} q + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \frac{e^{-\lambda z}}{X} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} e^{-\lambda z} q + X' e^{\lambda z} z + \lambda e^{\lambda z} p = 0.$$

Nous traiterons plus loin le cas où l'on peut satisfaire à la condition (60) en prenant pour F une fonction non linéaire de p et pour Φ une fonction non linéaire de q .

Dans le cas particulier où $X = 1$, on a

$$z = e^z, \quad \beta = \psi_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial y} e^{-z}, \quad f = X_1 \left(p + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} e^{-z} \right)^{-1}$$

et l'on vérifie de même que l'on satisfait à la condition (60) en prenant

$$F = X_1 \left(p + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} e^{-z} \right) \left\{ \log \left(p + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} e^{-z} \right) + 1 \right\}, \quad \Phi = 0;$$

L'équation aux différentielles totales correspondante conduit à la

condition d'intégrabilité

$$s + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} e^{-z} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} e^{-z} q + e^{-z} p = 0,$$

qui se déduit de l'équation (82) en y faisant $X = 1$.

19. On a supposé, dans ce qui précède, que $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne sont pas nuls; la relation (73) prouve d'ailleurs que la dernière hypothèse entraîne la troisième. Il reste donc seulement trois cas à examiner.

1° Si $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, z est indépendant de x et l'on a vu plus haut que l'on peut supposer $z = 0$. L'équation (72) donne alors $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, et l'on peut prendre pour f une fonction arbitraire de x et de $p + \beta$. L'équation

$$du = [u(p + \beta) + F(x, p + \beta)] dx$$

conduit toujours, quelle que soit la fonction F , à la même condition d'intégrabilité

$$s + \frac{d\beta}{dy} = 0.$$

2° Supposons $\frac{\partial z}{\partial x} \neq 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$; z est une fonction linéaire de x

$$z = \varphi(x, y)x + \varphi_1(x, y),$$

et la condition (72) montre que β est aussi une fonction linéaire de x

$$\beta = \psi(x, y)x + \psi_1(x, y).$$

L'équation aux différentielles totales

$$d \log u = [p + \psi(x, y)x + \psi_1(x, y)] dx - [\varphi(x, y)x + \varphi_1(x, y)] dy$$

ne change pas de forme, et les coefficients φ et ψ restent les mêmes, quand on change z en $z + \mu(x, y)$. On peut donc supposer que $z = 0$ est une intégrale de l'équation linéaire qui exprime la condition d'intégrabilité, c'est-à-dire que $\psi_1 dx - \varphi_1 dy$ est une différentielle exacte $d\lambda$. En changeant u en ue^λ , l'équation

aux différentielles totales devient

$$d \log u = [p + \psi(x, y)z] dx - \varphi(x, y)z dy.$$

On peut donc supposer $\varphi_1 = \psi_1 = 0$. L'équation (72) devient alors

$$\frac{\partial f}{\partial y} + f\varphi z = \varphi \left(2f + v \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} z - \varphi \psi z \right);$$

on en déduit que l'on a

$$\frac{\partial \log f}{\partial v} = \frac{\varphi}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} z - \varphi \psi z},$$

et par suite f est de la forme

$$f = e^{\lambda v + B} = e^{\lambda p + \psi z + B},$$

λ et B étant des fonctions de x, y . La relation (72) devient, en divisant par l'exponentielle,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} v + \frac{\partial B}{\partial y} + \varphi z = \varphi (2 + \lambda v) + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} z - \varphi \psi z \right),$$

ce qui exige que l'on ait

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial y} = \varphi, \quad \frac{\partial B}{\partial y} = 2\varphi, \quad \varphi = \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \psi \right);$$

on en tire

$$(83) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{\partial \log \lambda}{\partial y}, & B = \log \lambda^2 + \log N, \\ \psi = \frac{\partial \log \varphi}{\partial x} - \frac{1}{\lambda} = \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y} : \frac{\partial \log \lambda}{\partial y} - \frac{1}{\lambda}, \end{cases}$$

$\lambda(x, y)$ étant une fonction arbitraire des variables x et y , et N une fonction arbitraire de x . On vérifie aisément que l'on satisfait à la condition (60) en prenant

$$F = N e^{\lambda p + \psi z}, \quad \Phi = 0,$$

et par suite la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales

$$du = u[(p + \psi z) dx - \varphi z dy] + N e^{\lambda(p + \psi z)} dx$$

conduit toujours à l'équation linéaire

$$(84) \quad s = \frac{\partial \psi}{\partial y} z + \psi q + \frac{\partial \varphi}{\partial x} z + \varphi p = 0,$$

quelle que soit la fonction X . De même, l'élimination de z entre les deux relations

$$(85) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = u(p + \psi z) + X e^{\lambda p + \psi z}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\varphi z u, \end{cases}$$

conduit à une autre équation du second ordre en u , qui se déduit de l'équation linéaire par une transformation B_2 .

3° Si l'on a $\frac{dz}{dz} = z \frac{d^2 z}{dz^2}$, z est de la forme

$$z = e^{\frac{z + \varphi(x, y)}{2}} + \varphi_1(x, y).$$

Ainsi qu'on l'a remarqué plusieurs fois, on peut ajouter à z une fonction quelconque de x, y , à condition de changer aussi β . On peut donc supposer $\varphi_1 = 0$; si l'on change ensuite z en $z - \varphi$, on voit que l'on est ramené à une équation de la forme

$$d \log u = (p + \beta) dx - e^{\frac{z}{2}} dy.$$

L'équation (72) devient

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} e^{\frac{z}{2}} (e - \beta) \frac{\partial f}{\partial v};$$

comme f ne dépend que de x, y, v et que β est indépendant de v , cette égalité n'est possible que si l'on a $\frac{df}{dy} = \frac{df}{dv} = 0$, c'est-à-dire que f doit se réduire à une fonction de la seule variable x . Nous sommes donc conduits à chercher à satisfaire à l'identité (60) en prenant pour F et Φ des expressions de la forme suivante :

$$(86) \quad F = Xp^2 + \lambda p + B, \quad \Phi = Cq + D,$$

A, B, C, D étant des fonctions de x, y, z . La condition (60) s'écrit alors

$$\begin{aligned} (C - \lambda - 2Xp) \left(\frac{1}{2} e^{\frac{z}{2}} p + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial z} q \right) + p \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} q \right) + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial z} q \\ - \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial z} p \right) q - \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial z} p + (Cq + D)(p + \beta) + e^{\frac{z}{2}} (Xp^2 - \lambda p + B) = 0. \end{aligned}$$

Le premier membre est une fonction bilinéaire en p et q et, en

égalant à zéro les coefficients de pq, p, q , et le terme indépendant, on obtient les quatre relations

$$(87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial z} - 2X \frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial z} + C = 0, \\ \frac{1}{2} (C - A) e^z - 2X \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} - D + \Lambda e^z = 0, \\ (C - A) \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} + C \beta = 0, \\ (C - A) \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial x} - D \beta - B e^z = 0. \end{array} \right.$$

On satisfait à la première relation de la façon la plus générale en prenant

$$(88) \quad C = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad A = 2X \beta - \frac{\partial U}{\partial z} - U, \quad C - A = U - 2X \beta,$$

U étant une fonction arbitraire de x, y, z . La troisième relation devient

$$(U - 2X \beta) \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} \beta = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(B - X \beta^2 + U \beta - \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0.$$

On aura donc

$$(89) \quad B = \frac{\partial U}{\partial x} - U \beta + X \beta^2 - \varphi(x, y),$$

La seconde des conditions (87) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (U - 2X \beta) e^z - 2X \frac{\partial \beta}{\partial y} + 2X \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial z} \\ + D + e^z \left(2X \beta - \frac{\partial U}{\partial z} - U \right) = 0, \end{aligned}$$

ou, en multipliant par e^{-z} ,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(U e^{-z} + e^{-z} \frac{\partial U}{\partial y} - e^{-z} D \right) - X \beta e^{-z} = 0.$$

Si nous posons

$$(90) \quad D = \frac{\partial U}{\partial y} + e^z U - e^z V,$$

on en tire

$$(91) \quad X\beta e^{-\frac{z}{2}} = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

En substituant les expressions précédentes de A, B, C, D dans la dernière des conditions (87), U disparaît et il reste la relation

$$(92) \quad \frac{\partial z}{\partial y} + e^{\frac{z}{2}} \varphi - e^z \frac{\partial V}{\partial x} + \beta e^z \lambda + X\beta^2 e^{\frac{z}{2}} = 0.$$

Si l'on y remplace β par sa valeur tirée de la formule (91), on a une équation aux dérivées partielles du premier ordre pour déterminer $V(x, y, z)$. Les fonctions X et $\varphi(x, y)$ peuvent être choisies arbitrairement. En particulier, pour que Φ soit nul, il faut prendre pour U une fonction indépendante de z , et les relations (90) et (91) montrent que β doit être de la forme

$$\beta = \psi(x, y) + z \frac{\partial \psi}{\partial y} e^{-\frac{z}{2}}.$$

Les relations qui donnent A et B montrent ensuite que l'on doit prendre

$$F = X \left(p + z \frac{\partial \psi}{\partial y} e^{-\frac{z}{2}} \right)^2,$$

et l'équation aux différentielles totales

$$(81') \quad du = u \left(p + \psi + z \frac{\partial \psi}{\partial y} e^{-\frac{z}{2}} \right) dx - u e^{\frac{z}{2}} dy + X \left(p + z \frac{\partial \psi}{\partial y} e^{-\frac{z}{2}} \right)^2 dx$$

conduit, quelle que soit la fonction X , à la condition d'intégrabilité

$$(82') \quad s + \frac{d}{dx} \left(e^{\frac{z}{2}} \right) + \frac{d}{dy} \left(z \frac{\partial \psi}{\partial y} e^{-\frac{z}{2}} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Remarquons que les équations (81') et (82') se déduisent des équations générales (81) et (82) en y faisant $X = \frac{1}{2}$.

20. On peut opérer de la même façon pour trouver les cas où il est possible de satisfaire à la condition (60) en prenant pour Φ une fonction non linéaire de q . En différentiant deux fois par

rapport à q cette relation, elle devient

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial q^3} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z} p + \frac{\partial \beta}{\partial z} q \right) \\ & + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} \frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial q^2} - p \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z \partial q^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} (p + \beta) = 0; \end{aligned}$$

en égalant à zéro le coefficient de p et le terme indépendant de p , on obtient les deux équations

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varphi = 0, \\ & \frac{\partial \varphi}{\partial q} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial z} q \right) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial z} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \beta = 0, \end{aligned}$$

où l'on a posé $\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2}$. La première montre que φ est de la forme

$$\varphi = e^z g(x, y, w), \quad \text{où} \quad w = q + z,$$

et la deuxième devient

$$(93) \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \beta g = \frac{\partial \beta}{\partial z} \left(\gamma g + w \frac{\partial g}{\partial w} \right) + \frac{\partial g}{\partial w} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} - z \frac{\partial \beta}{\partial z} \right);$$

c'est une équation analogue à l'équation (72), et que l'on peut discuter de la même façon. En différentiant les deux membres par rapport à z , on obtient la nouvelle équation

$$\left(2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) z - \frac{\partial g}{\partial w} \left(w \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y \partial z} - \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial \beta}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \right) = 0.$$

Supposons d'abord que $\frac{\partial \beta}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2}$, $\frac{\partial \beta}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2}$, $\frac{\partial g}{\partial w}$ soient différents de zéro; on en conclut, comme plus haut, que le rapport $\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} : \frac{\partial \beta}{\partial z}$ ne dépend que des variables x, y , et par suite β est de la forme

$$(94) \quad \beta = \omega_1(x, y) + \omega_2(x, y) e^{m(x, y)z}.$$

En substituant cette expression de β dans la relation (93), on voit de même que z a une expression de la forme

$$(95) \quad z = \pi_0(x, y) + \pi_1(x, y)z + \pi_2(x, y) e^{-m(x, y)z}.$$

En substituant ces expressions de z et de β dans l'équation (93),

on obtient les trois conditions

$$(96) \quad \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} - g \omega_1 = \frac{\partial g}{\partial w} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \omega \omega_2 \pi_2 \right), \\ -\omega_2 g = \omega \omega_2 \left(2g + w \frac{\partial g}{\partial w} \right) + \frac{\partial g}{\partial w} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial y} - \omega \omega_2 \pi_0 \right), \\ \omega_2 \frac{\partial g}{\partial w} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \pi_1 \omega \right) = 0, \end{cases}$$

ω_2 et $\frac{\partial g}{\partial w}$ n'étant pas nuls par hypothèse, on a donc

$$(97) \quad \pi_1 = \frac{\partial \log \omega}{\partial y},$$

et les deux premières équations peuvent s'écrire

$$(98) \quad \begin{cases} \frac{\partial \log g}{\partial w} = - \frac{2\omega + 1}{\omega \omega + \frac{\partial \log \omega_2}{\partial y} - \omega \pi_0}, \\ \frac{\partial \log g}{\partial x} = \omega_1 + \frac{\partial \log g}{\partial w} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \omega \omega_2 \pi_2 \right). \end{cases}$$

Pour que ces deux équations soient compatibles, on voit, comme plus haut, que l'on doit avoir $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$, ou $\omega = Y$. La condition d'intégrabilité donne alors

$$\pi_2(x, y) = \frac{1}{Y \omega_2} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \frac{\partial \pi_0}{\partial x} \right) - \frac{1}{Y^2 \omega_2} \frac{\partial^2 \log \omega_2}{\partial x \partial y}$$

et les expressions générales des fonctions α et β sont les suivantes :

$$(99) \quad \begin{cases} \alpha = \pi_0(x, y) + \frac{Y'}{Y} z + \frac{1}{Y \omega_2} \left[\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \frac{\partial \pi_0}{\partial x} \right) - \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 \log \omega_2}{\partial x \partial y} \right] e^{-Yz}, \\ \beta = \omega_1(x, y) + \omega_2 e^{Yz}, \end{cases}$$

Y étant une fonction arbitraire de la variable y , ω_1 , ω_2 , π_0 , trois fonctions arbitraires des deux variables x et y .

On verrait, comme au n° 18, que l'on peut alors satisfaire à l'identité (60) en prenant pour Φ une fonction non linéaire de q et pour F la valeur zéro.

21. Si α et β sont à la fois de la forme (78) et de la forme (99), on peut satisfaire à l'identité (60) en prenant pour F une fonction

non linéaire de p et pour Φ une fonction non linéaire de q . Il faut d'abord pour cela que l'on ait $X = -Y = m$, m étant une constante différente de zéro. Il faut, en outre, que l'on ait

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \omega_1, & \omega_2 &= \frac{1}{m\varphi_2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} - \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \log \varphi_2}{\partial x \partial y} \right), \\ \varphi_1 &= \pi_0, & \varphi_2 &= \frac{-1}{m\omega_2} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \frac{\partial \pi_0}{\partial x} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \log \omega_2}{\partial x \partial y} \right).\end{aligned}$$

Supposons, comme on l'a expliqué plus haut (n° 18), que l'on ait ramené α et β à une forme simple; on aura alors

$$\varphi_1 = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \psi_0 = 0, \quad \pi_0 = 0,$$

et il reste les deux conditions

$$(100) \quad \frac{\partial^2 \log \varphi_2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \log \omega_2}{\partial x \partial y} = -m^2 \varphi_2 \omega_2.$$

On peut encore faire les calculs d'une façon plus symétrique. Si α et β sont de la forme

$$\alpha = \varphi_2(x, y) e^{mz}, \quad \beta = \omega_2(x, y) e^{-mz},$$

les relations en f et g deviennent respectivement

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} + \varphi_2 e^{mz} f &= m \varphi_2 e^{mz} \left(2f + v \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} e^{mz} - m \varphi_2 \omega_2 \right), \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \omega_2 e^{-mz} g &= -m \omega_2 e^{-mz} \left(2g + v \frac{\partial g}{\partial v} \right) + \frac{\partial g}{\partial v} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial y} e^{-mz} + m \omega_2 \varphi_2 \right).\end{aligned}$$

La première se décompose en deux équations distinctes

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= m \varphi_2 \omega_2 \frac{\partial f}{\partial v}, \\ \varphi_2 f &= 2m \varphi_2 f + m \varphi_2 v \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v},\end{aligned}$$

ou

$$(101) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \log f}{\partial v} &= \frac{1 - 2m}{mv + \frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x}}, \\ \frac{\partial \log f}{\partial y} &= \frac{-m(1 - 2m)\varphi_2 \omega_2}{mv + \frac{\partial \log \varphi_2}{\partial x}}; \end{aligned} \right.$$

L'équation en g donne de même les deux conditions

$$(102) \quad \begin{cases} \frac{d \log g}{d\omega} = \frac{1-2m}{m\omega} - \frac{d \log \omega_2}{dy}, \\ \frac{d \log g}{dx} = \frac{m(1-2m)\omega_2 \varpi_2}{m\omega} - \frac{d \log \omega_2}{dy}. \end{cases}$$

Si $2m-1 \neq 0$, les conditions d'intégrabilité des équations (101) et (102) sont précisément les équations (100). Si ces conditions sont satisfaites, on a pour f et g les expressions générales suivantes :

$$(103) \quad \begin{cases} f = X \left(p + \omega_2 e^{mz} - \frac{1}{m} \frac{d \log \varpi_2}{dx} \right)^{\frac{1}{m-2}}, \\ g = Y \left(q + \varpi_2 e^{mz} - \frac{1}{m} \frac{d \log \omega_2}{dy} \right)^{\frac{1}{m-2}} \end{cases}$$

X étant une fonction arbitraire de x et Y une fonction arbitraire de y .

On vérifie aisément que l'on satisfait à la condition (60), pourvu que m soit différent de l'unité, en prenant

$$\begin{aligned} F &= X \left(p + \omega_2 e^{-mz} + \frac{1}{m} \frac{d \log \varpi_2}{dx} \right)^{\frac{1}{m}}, \\ \Phi &= Y e^z \left(q + \varpi_2 e^{mz} - \frac{1}{m} \frac{d \log \omega_2}{dy} \right)^{\frac{1}{m}}, \end{aligned}$$

de sorte que l'équation aux différentielles totales

$$(104) \quad \begin{aligned} du &= u \left[(p + \omega_2 e^{-mz}) dx - \varpi_2 e^{mz} dy \right]^{\frac{1}{m}} \\ &+ X \left(p + \omega_2 e^{-mz} + \frac{1}{m} \frac{d \log \varpi_2}{dx} \right)^{\frac{1}{m}} dx \\ &+ Y e^z \left(q + \varpi_2 e^{mz} - \frac{1}{m} \frac{d \log \omega_2}{dy} \right)^{\frac{1}{m}} dy \end{aligned}$$

conduit toujours à la même condition d'intégrabilité,

$$(105) \quad s + \frac{d}{dx} (\varpi_2 e^{mz}) + \frac{d}{dy} (\omega_2 e^{-mz}) = 0,$$

quelles que soient les fonctions arbitraires X et Y .

22. On peut ramener l'équation (104) à une forme canonique simple par un changement de variables et d'inconnues. Des relations (100) on déduit immédiatement que le rapport $\omega_2 : \varphi_2$ est le produit d'une fonction de x par une fonction de y , ce qui conduit à une équation du second ordre se ramenant à l'équation de Liouville. On en conclut que les fonctions φ_2 et ω_2 sont de la forme

$$\varphi_2 = \frac{X_1 Y_1}{X + Y}, \quad \omega_2 = \frac{X_2 Y_2}{X + Y},$$

X, X_1, X_2 étant des fonctions de x , et Y, Y_1, Y_2 des fonctions de y . En substituant dans les relations (100), on trouve que ces six fonctions doivent vérifier la relation

$$(106) \quad X'Y' = -m^2 X_1 X_2 Y_1 Y_2.$$

Le quotient $\frac{X_1 X_2}{X'}$ est donc constant et, comme X_1 n'est déterminée qu'à un facteur constant près, on peut supposer que l'on a

$$(107) \quad X' = m X_1 X_2, \quad Y' = -m Y_1 Y_2.$$

Il est visible que l'équation (105) ne change pas de forme quand on prend pour variables indépendantes, au lieu de x et y , deux fonctions quelconques de ces variables. On peut donc supposer que l'on a $X = mx$, $Y = -my$, et les relations (107) deviennent

$$(107') \quad X_1 X_2 = Y_1 Y_2 = 1.$$

Si l'on pose ensuite

$$z = Z = \frac{1}{m} (\log X_1 + \log Y_1), \quad u = \frac{v}{X_1^m},$$

on voit que l'équation (104) est ramenée à une forme toute pareille, où l'on aurait

$$(104') \quad dv = v \left\{ \left[p + \frac{e^{-mz}}{m(x-y)} \right] dx - \frac{e^{mz}}{m(x-y)} dy \right\} \\ + Xz \left[p + \frac{e^{-mz}}{m(x-y)} - \frac{1}{m(x-y)} \right]^{\frac{1}{m}} dx \\ + Yze^z \left[q + \frac{e^{mz}}{m(x-y)} - \frac{1}{m(x-y)} \right]^{\frac{1}{m}} dy.$$

Supposons en particulier $X_z = Y_z = 0$; en posant $mz = Z$, $\log u = -\frac{1}{m} \log v$, l'équation aux différentielles totales donne les deux conditions

$$(108) \quad \begin{cases} \frac{\partial \log v}{\partial x} = -\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{e^{-Z}}{x-y}, \\ \frac{\partial \log v}{\partial y} = \frac{e^Z}{x-y}, \end{cases}$$

et l'élimination de Z conduit à l'équation linéaire

$$(109) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{x-y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{(x-y)^2} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$(110) \quad v = X_1 + \frac{Y_1 + X_1}{x-y},$$

X_1 étant une fonction arbitraire de x et Y_1 une fonction arbitraire de y . On voit donc que, quelles que soient les fonctions arbitraires que l'on prenne dans la formule (104'), les résolvantes du système de Pfaff défini par l'équation (104') et la relation $dz = p dx + q dy$, seront intégrables.

Le calcul précédent suppose implicitement que X dépend effectivement de x , et Y de y . Si l'une de ces fonctions se réduit à une constante, on peut prendre

$$\varphi_2 = X_1 Y_1, \quad \omega_2 = X_2 Y_2,$$

et les formules (100) montrent que l'une de ces fonctions φ_2, ω_2 doit être nulle. Supposons par exemple $\omega_2 = 0$, φ_2 n'étant pas nul. On peut alors, par la même transformation que plus haut, ramener le cas général au cas où $\varphi_2 = 1$, c'est-à-dire supposer

$$z = e^{mz}, \quad \beta = 0.$$

On peut prendre alors $f = X p^{\frac{1}{m}-2}$, et g doit être égal à une fonction arbitraire de y et de $q + e^{mz}$. On vérifie en effet que l'équation aux différentielles totales

$$du = u(p dx + e^{mz} dy) + X p^{\frac{1}{m}} dx + e^z \Phi(x, q + e^{mz}) dy$$

conduit toujours à la même condition d'intégrabilité

$$s - m e^{mz} p = 0,$$

quelles que soient les deux fonctions Λ et Φ . On obtiendra donc ainsi de nouveaux systèmes de Pfaff intégrables par des quadratures. Si l'on suppose, en particulier, la fonction Φ indépendante de q , on aura une résolvante de première espèce en éliminant z entre les deux équations

$$\frac{du}{dx} = up + \Lambda p^{\frac{1}{m}}, \quad \frac{du}{dy} = -e^m z + e z \Phi(y).$$

Par exemple, si l'on prend $m = 1$, $\Lambda = 1$, $\Phi = 1$, on retrouve une transformation de Bäcklund que j'ai signalée antérieurement (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2^e série, t. I, p. 443).

En résumé, nous avons déterminé toutes les équations aux différentielles totales

$$du = f(x, y, z, p, u) dx + \varphi(x, y, z, q, u) dy,$$

dont la condition d'intégrabilité conduit à une équation aux dérivées partielles

$$s + g(x, y, z) pq + a(x, y, z) p + b(x, y, z) q + c(x, y, z) = 0,$$

bilinéaire en p et q , lorsque les deux dérivées $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}$ sont différentes de zéro. La méthode suivie n'exige pas d'ailleurs que cette condition soit remplie, mais elle ne donne pas toutes les solutions du problème lorsque l'une au moins de ces deux dérivées n'est pas nulle. J'examinerai ce cas particulier dans un autre travail.

SUR DIVERSES CLASSES DE SURFACES ENGENDRÉES PAR UNE HELICE CIRCULAIRE ;

PAR M. BARRÉ.

INTRODUCTION.

Nous nous proposons, dans le présent Mémoire, de compléter notre Étude sur la Théorie générale des surfaces engendrées par

une hélice circulaire (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XL, 1913, p. 242-339) par l'examen de quelques nouveaux types particuliers de ces surfaces ⁽¹⁾.

Le Travail actuel comprendra deux Chapitres; dans le premier, nous étudierons le mouvement d'une hélice circulaire variable possédant une enveloppe; dans le second, nous examinerons les surfaces à plan directeur et à pas constant.

CHAPITRE I.

SURFACES ENGENDRÉES PAR UNE HÉLICE CIRCULAIRE QUI SE MEUT EN RESTANT TANGENTE A UNE COURBE FINE.

I. Nous avons énoncé (cf. *T. H. C.*, Chap. I, n° 14) le résultat suivant :

« La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille d'hélices circulaires mobiles ait une enveloppe est que les équations

$$(1) \quad M = 0, \quad KL - N^2 = 0$$

admettent une solution commune

$$(2) \quad F(\varphi, t) = 0. »$$

A chaque solution de cette forme correspond une courbe tangente aux génératrices: leur ensemble constitue l'arête de rebroussement de la surface engendrée.

Un calcul des plus simples permet de remplacer les équations (1) par les suivantes (en introduisant la simplification cor-

⁽¹⁾ Dans ce qui suit, les notations seront, en principe, celles de notre *Mémoire Théorie générale des surfaces engendrées par une hélice circulaire* que nous désignerons, pour abréger, dans les nombreux renvois que nous aurons à y faire, par la notation *T. H. C.* Dans un *Mémoire* paru dans le *Bulletin de la Société* (t. XLIII, 1915, p. 25-61), nous avons déjà présenté la monographie d'un type particulier de surfaces que nous avons appelées *helicoides de seconde espèce*.

respondant au choix particulier d'axes défini par $q = 0$) ⁽¹⁾ :

$$(1 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = 0, \\ K p^2 \varphi^2 \sin^2 \varphi + (K^2 p \varphi' + K' u \varphi) \cos \varphi \\ + [v \varphi K' - p K \varphi (K r - w)] \sin \varphi + \varphi \varphi' K + K^2 u p = 0. \end{array} \right.$$

Sans insister sur le cas général, conduisant à des calculs d'une complication qui ne correspond en rien à l'intérêt, nul, du résultat, nous nous arrêterons aux deux cas particuliers suivants : Le premier est celui où $p = 0$; la surface est à plan directeur; nous y reviendrons. Le second est celui où la génératrice est indéformable et où le rayon OX engendre une développée du lieu du centre O . Alors

$$\varphi = \varphi_0, \quad K = K_0, \quad u = w = 0 \quad (K_0, \varphi_0, \text{const.})$$

et les équations (1 bis) deviennent

$$(3) \quad \sin \varphi (v - K_0 p \varphi) = 0, \quad \sin \varphi \left(\sin \varphi - \frac{r}{p} \frac{K_0}{\varphi_0} \right) = 0.$$

L'annulation de $\sin \varphi$ exige ⁽¹⁾ une vérification directe de la seconde équation (1). On est conduit ainsi à la solution constituée par une famille d'hélices indéformables pivotant autour d'un point fixe auquel se réduit son enveloppe.

Mais les équations (3) peuvent encore être résolues en prenant

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{v}{p K_0} \\ \text{avec la condition} \\ \sin \left(\frac{v}{p K_0} \right) = \frac{r}{p} \frac{K_0}{\varphi_0}. \end{array} \right.$$

Ces relations, par l'introduction de l'arc s , des rayons de courbure R et de torsion T de la courbe lieu de O , prennent la forme

⁽¹⁾ Sous la réserve que la solution considérée, commune aux deux équations (1 bis), n'annule pas le multiplicateur de la seconde équation (1) dans l'opération qui permet, en éliminant l'arc φ entre les deux équations (1), d'obtenir l'équation trigonométrique qu'est la seconde équation (1 bis). Ce multiplicateur est $\sin \varphi$. Si la solution commune l'annule, une vérification directe s'impose.

géométrique suivante, plus intéressante :

$$(5) \quad \varphi = \frac{R}{K_0} \sec \int^s \frac{ds}{T},$$

$$(6) \quad \sin \left[\frac{R}{K_0} \sec \int^s \frac{ds}{T} \right] = \frac{K_0}{\varphi_0} \tan g \int^s \frac{ds}{T},$$

où la limite inférieure de $\int^s \frac{ds}{T}$ a été laissée intentionnellement arbitraire ⁽¹⁾

Recherche des conditions pour qu'une famille d'hélices circulaires à plan directeur et dépendant d'un paramètre admette une enveloppe.

Les équations des hélices d'une telle famille peuvent s'écrire, avec un choix d'axes évident,

$$(7) \quad x = f_1(t) + \varrho \cos \varphi, \quad y = f_2(t) + \varrho \sin \varphi, \quad z = f_3(t) + K \varphi,$$

formules dans lesquelles φ et K sont des fonctions quelconques de t , ainsi que f_1 , f_2 et f_3 .

Les conditions déterminant l'enveloppe sont :

$$(8) \quad \frac{f'_1 + \varrho' \cos \varphi}{-\varrho \sin \varphi} = \frac{f'_2 + \varrho' \sin \varphi}{\varrho \cos \varphi} = \frac{f'_3 + K' \varphi}{K}.$$

De ces relations on peut éliminer φ , ce qui donne la condition pour qu'il y ait une enveloppe, et tirer la valeur de φ correspondant au contact. Il y a intérêt à distinguer deux cas, suivant que φ est constant ou variable.

⁽¹⁾ L'arbitraire ainsi laissée correspond au choix de la développée. On examinera en particulier le cas où le lieu de O est plan. Ce lieu est alors nécessairement un cercle et l'axe de l'hélice décrit un cône de révolution dont le lieu de O est un parallèle. (L'enveloppe se réduit au point à l'infini sur l'axe du cercle lorsque ce cône dégénère en un cylindre.) Le demi angle au sommet θ_0 du cône des axes, le rayon R_0 du cercle lieu de O sont liés aux constantes K_0 et φ_0 de l'hélice par la relation,

$$\varphi_0 = \frac{K_0 \cotang \theta_0}{\sin \frac{R_0}{K_0 \sin \theta_0}}.$$

La surface engendrée est de révolution. Il est d'ailleurs facile, par un raisonnement géométrique très simple de démontrer *a priori* la possibilité d'engendrer une surface de révolution ayant un parallèle donné au moyen d'une hélice dont l'axe rencontre l'axe de la surface et qui reste constamment tangente à ce parallèle.

A. φ est constant. — Soit φ_0 sa valeur.

a. Si l'on suppose K variable, le cas où il est constant devant être étudié à part, on trouve, en *prenant K pour variable indépendante*,

$$(9) \quad \varphi = \frac{K}{\varphi_0} (f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{1}{2}} - f_3'$$

avec la condition

$$(10) \quad \frac{f_1'}{f_2'} + \tan \left[\frac{K}{\varphi_0} (f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{1}{2}} - f_3' \right] = 0,$$

qu'il peut y avoir intérêt à écrire

$$(11) \quad f_3' = \arctan \left[\frac{f_1'}{f_2'} \right] + \frac{K}{\varphi_0} (f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Une simplification particulièrement intéressante se présente lorsque l'axe décrit un plan : alors $\frac{f_1'}{f_2'}$ est constant et, par un choix d'axes convenable, peut être supposé nul. La formule (11) se réduit (en se bornant à une détermination de l'arc tang) à

$$f_3' = \frac{K}{\varphi_0} f_2'.$$

b. Si K était constant, on aurait

$$(9 \text{ bis}) \quad \tan \varphi = - \frac{f_1'}{f_2'},$$

$$(10 \text{ bis}) \quad f_3' = \frac{K_0}{\varphi_0} (f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{1}{2}},$$

dont l'interprétation géométrique, très simple, est immédiate : *le lieu de O est une hélice générale ayant pour plan directeur celui des hélices circulaires génératrices.*

B. φ est variable. — En le prenant pour variable indépendante, on est conduit à remplacer les conditions (8) par les suivantes :

$$(12) \quad f_1' \cos \varphi + f_2' \sin \varphi + 1 = 0, \quad \varphi (f_3' + K' \varphi) = K (f_2' \cos \varphi - f_1' \sin \varphi).$$

La première des équations (12) ne sera résoluble en éléments réels que si f_1' et f_2' , supposés réels, sont tels que

$$f_1'^2 + f_2'^2 > 1.$$

On posera donc

$$(13) \quad f'_1 = -\frac{\sin \Phi(z)}{\cos \Theta(z)}, \quad f'_2 = \frac{\cos \Phi(z)}{\cos \Theta(z)};$$

ces relations permettront, f'_1 et f'_2 étant données, de trouver Φ et Θ sans introduction d'élément imaginaire, en dehors du cas où ceux-ci s'introduisent par la nature même de la question. La première équation (12) donne alors simplement

$$(14) \quad \varphi = 2n\pi - \frac{\pi}{2} + \Phi + \Theta \quad (n \text{ entier}),$$

et la condition à laquelle doit satisfaire le mouvement de la génératrice est

$$(15) \quad f'_3 = \frac{K}{\varphi} \tan \Theta(z) - K' \left[2n\pi - \frac{\pi}{2} + \Phi + \Theta \right].$$

En résumé, on peut théoriquement se donner trois des quantités f_1, f_2, f_3 ou K : la dernière s'en déduit. La solution peut s'achever complètement lorsque les données sont, ou f_1, f_2 et K , ou, sous une autre forme, K, Θ et Φ ; f_3 s'obtient par quadrature.

Le résultat est particulièrement simple lorsque K est constant : nous y reviendrons ultérieurement.

A titre d'exemple, en prenant

$$\Phi = \frac{\pi}{2}, \quad \Theta = \frac{\pi}{3}, \quad n = 0,$$

on obtient, avec un choix d'axes convenable, le système de fonctions

$$f_1 = -2\varphi, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = \sqrt{3} \int \frac{K dz}{\varphi} - \frac{\pi}{3} K.$$

En particulierisant K , on peut obtenir des surfaces plus ou moins simples ; ainsi, en prenant $K \equiv \frac{\varphi^2}{\varphi_0}$ (φ_0 const.), on obtient la surface suivante où ne figurent plus que des opérations dégagées de tout signe d'intégration :

$$x = -2\varphi + \varphi \cos \varphi, \quad y = \varphi \sin \varphi, \quad z = \left(\frac{\sqrt{3}}{a} - \frac{\pi}{3} \right) \frac{\varphi^2}{\varphi_0} - \frac{\varphi^2}{\varphi_0} \varphi.$$

On observera que les courbes $\varphi = \text{const.}$ de cette surface sont des paraboles.

2. RECHERCHE DES CONDITIONS DE CONTACT D'UNE HÉLICE CIRCULAIRE AVEC UNE COURBE DONNÉE. — La recherche directe des conditions de contact supérieur d'une hélice mobile avec son enveloppe est d'une complication considérable et ne présente aucun intérêt. Il est tout à fait préférable d'étudier les conditions de contact d'une hélice et d'une courbe donnée, ce qui définira géométriquement le mouvement de l'hélice génératrice, si l'on se place au point de vue de l'étude de la surface engendrée par cette courbe, de même que l'étude directe du mouvement de la tangente à une courbe gauche conduit beaucoup plus naturellement à l'obtention des propriétés des développables que la considération des conditions assurant à une droite mobile l'existence d'une enveloppe.

A. *Hélices circulaires tangentes en un point à une courbe gauche.* — On peut prendre pour axe de l'hélice une droite telle que la perpendiculaire qui lui est commune avec la tangente au point considéré coupe celle-ci en son point de contact avec la courbe. Le cylindre circulaire qui la porte s'obtient immédiatement : il est engendré par la parallèle à l'axe passant par le point de contact. L'hélice est alors entièrement déterminée. On voit donc qu'il existe une triple infinité d'hélices circulaires tangentes en un point à une courbe. Leurs axes forment un complexe.

Une démonstration géométrique très élémentaire conduit au résultat suivant :

Le cône du complexe des axes des hélices circulaires tangentes en un point à une courbe a pour base le cercle décrit dans le plan perpendiculaire à la tangente à la courbe passant par le point de contact et ayant pour diamètre le segment compris entre ce point et la projection orthogonale sur le plan défini ci-dessus du sommet du cône du complexe.

B. *Hélices circulaires ayant en un point d'une courbe gauche un contact de second ordre avec cette courbe.* — L'hélice et la courbe doivent avoir même normale principale : on en conclut de suite que l'axe de l'hélice cherchée doit rencontrer la normale principale de la courbe.

Soit M le point de la courbe, ω le point de la normale principale

où l'axe de l'hélice cherchée coupe cette normale et α l'angle de la courbe avec cet axe.

L'axe de l'hélice doit évidemment être perpendiculaire à $M\omega$ en ω ; si cela a lieu, l'hélice tangente en M à la courbe considérée et décrite sur le cylindre circulaire de rayon $M\omega$, et dont l'axe satisfait aux conditions que nous venons de définir, admet même plan osculateur que la courbe donnée; le contact du second ordre sera donc réalisé en imposant l'égalité des rayons de courbure, c'est-à-dire si l'on a

$$(16) \quad \frac{M\omega}{\sin^2 \alpha} = R$$

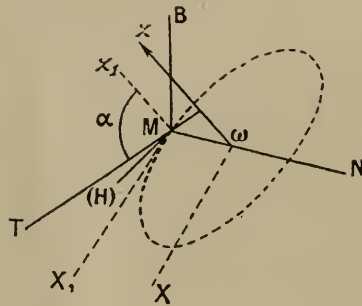
(R , rayon de courbure de la courbe en M).

On trouve sans peine que :

Le lieu des axes des hélices ayant en un point d'une courbe un contact du second ordre avec celle-ci est un cylindroïde ayant pour plan directeur le plan rectifiant et pour directrice rectiligne, la normale principale; l'équation de cette surface rapportée au trièdre fondamental correspondant au point considéré est

$$(17) \quad R z^2 = r(x^2 + z^2).$$

Fig. 1.



La considération de la figure ci-dessus donne sans difficulté, en se rappelant que

$$k = \rho \cot \alpha$$

et que, pour des hélices ayant avec la courbe un contact du second

ordre, $\varphi = M\omega = R \sin^2 z$:

$$(18) \quad \begin{cases} x = R \cos \varphi \sin^3 z + R \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \sin z \cos^2 z, \\ y = R \sin^2 z \sin \varphi - R \sin^2 z \quad (M\omega = R \sin^2 z), \\ z = -R \cos \varphi \sin^2 z \cos z R - \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \sin^2 z \cos z. \end{cases}$$

On déduit immédiatement de là les équations paramétriques générales des surfaces engendrées par une hélice circulaire ayant avec une courbe donnée un contact du deuxième ordre; ces équations sont

$$(19) \quad X = X_0 + \tau_1 x + \tau_2 y + \tau_3 z, \quad \dots$$

τ_1, τ_2, τ_3 , cosinus directeurs de la tangente;

$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, cosinus directeurs de la binormale;

ν_1, ν_2, ν_3 , cosinus directeurs de la normale principale à la courbe considérée;

X, Y, Z , coordonnées d'un de ses points; x, y, z définies par les équations (18) dans lesquelles z doit être considérée comme une fonction du paramètre qui définit l'arête de rebroussement.

Parmi les hélices ayant avec la courbe un contact du second ordre, il est intéressant de rechercher s'il n'en existe pas ayant le même rayon de torsion que celle-ci. Envisageons d'abord les valeurs absolues.

Soit T le rayon de torsion de la courbe; l'égalité des rayons de torsion donne

$$(20) \quad \frac{\varphi}{\sin z \cos z} = T,$$

et, d'autre part, on a [équation (16)]

$$(21) \quad \varphi = R \sin^2 z;$$

des équations (20) et (21), on tire

$$\varphi = \frac{RT^2}{R^2 + T^2}, \quad \sin z = \frac{T}{\sqrt{R^2 + T^2}} \quad (\sin z \cos z \neq 0).$$

Il existe donc deux hélices répondant à la question; les deux axes passent par le point central de la normale principale et sont, l'un d'eux parallèle à la caractéristique du plan rectifiant, l'autre symé-

trique du précédent par rapport à la tangente. La première hélice seule a même torsion que la courbe, compte tenu du signe, c'est-à-dire de la disposition.

C. *Hélices ayant un contact du troisième ordre avec une courbe.* — Pour qu'une hélice circulaire ait un contact du troisième ordre avec une courbe, il faut et il suffit qu'entre les conditions ci-dessus (contact du deuxième ordre et même torsion en grandeur et signe), la suivante :

$$\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{ds} = 0$$

soit aussi vérifiée.

Donc :

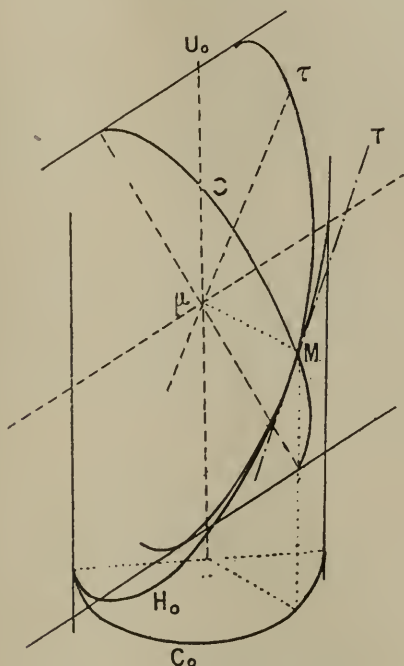
Aux points d'une courbe où la courbure est stationnaire, il existe une hélice circulaire ayant un contact du troisième ordre avec la courbe.

En particulier : *pour toute courbe à courbure constante, il existe en chaque point une hélice circulaire ayant un contact du troisième ordre avec la courbe. Cette hélice (sauf l'exception signalée ci-après) engendre, dans son mouvement, une surface dont l'arête de rebroussement possède un contact du troisième ordre avec la génératrice. On voit en passant que cette condition implique pour la génératrice de conserver la même courbure pendant tout son mouvement.*

Par contre : *une hélice circulaire de grandeur constante ne peut engendrer une telle surface : l'arête de rebroussement est en effet une hélice égale à la génératrice qui se confond avec toutes ses hélices osculatrices.* Il est intéressant de voir directement comment se comporte la seconde hélice ayant avec l'hélice de rebroussement un contact du second ordre et une torsion symétrique de la sienne. Cette hélice engendre visiblement un hélicoïde. Dans la figure ci-contre, (H_0) représente l'hélice circulaire donnée, fixe (C_0) son cercle principal; M est un point de l'hélice, $M\alpha$ la normale principale coupant l'axe en α . Le plan de la figure est le plan perpendiculaire à $M\alpha$ passant par α ; $\alpha\tau$ parallèle à la tangente $M\tau$ est dans ce plan; soit αU symétrique de l'axe αU_0 de (H_0) par rapport à $\alpha\tau$.

Un cylindre circulaire d'axe μU égal au cylindre de base (C_0) passe en M. L'hélice de tangente MT tracée sur le cylindre est symétrique de l'hélice H_0 car elle a même courbure et même rayon de torsion mais forme avec elle une disposition différente. C'est

Fig. 2.



l'hélice cherchée. On voit que, dans son mouvement, son axe engendre une surface de vis. Ceci permettrait un autre énoncé à peu près évident pour définir la génération de la surface engendrée par l'hélice (H). Si H_0 , et par suite H , sont équianglés, la surface des axes est l'hélicoïde minimum réglé.

Cas particulier des surfaces à plan directeur. — Il est à peu près évident que le contact d'ordre le plus élevé que l'on puisse imposer à l'hélice mobile d'avoir avec l'arête de rebroussement, dans le cas des surfaces à plan directeur, est le contact du second ordre. On voit, en effet, en projetant sur le plan directeur, que le cercle principal possèdera avec son enveloppe un contact de

même ordre au moins que l'hélice avec l'arête de rebroussement. Ceci montre, également, que, pour qu'il y ait contact du second ordre, il faut que le cercle principal sur le plan de base reste osculateur à une courbe fixe. Il faut, en outre, que l'arête de rebroussement soit une hélice quelconque de même plan de base. Car sa normale principale commune en chaque point avec l'hélice mobile reste parallèle à ce plan.

On voit sans peine que ces conditions sont suffisantes.

On obtiendra donc de la façon suivante la surface la plus générale ayant un plan directeur et une arête de rebroussement dont la génératrice possède un contact du second ordre avec son enveloppe :

Une hélice quelconque (H) étant donnée, tracer sur le cylindre ayant pour base le cercle osculateur de la projection de cette hélice sur son plan de base, l'hélice circulaire tangente à (H) au point correspondant au cercle osculateur considéré. Lorsque ce point varie, l'hélice circulaire engendre la surface cherchée.

CHAPITRE II.

SURFACES ENGENDRÉES PAR UNE HÉLICE CIRCULAIRE À PLAN DIRECTEUR ET À PAS CONSTANT.

La présente étude comportera deux parties, l'une relative aux surfaces générales engendrées par une hélice circulaire à plan directeur et à pas constant, l'autre consacrée à l'examen de quelques types particuliers.

PREMIÈRE PARTIE. — Surfaces générales.

1. FORMULES GÉNÉRALES. — Par un choix convenable et évident des axes, les surfaces engendrées par une hélice circulaire à pas constant et à plan directeur peuvent être représentées par les formules

$$(I) \quad \begin{cases} x = f_1(t) + \rho \cos \varphi, \\ y = f_2(t) + \rho \sin \varphi, \\ z = f_3(t) + h_0 \varphi \end{cases}$$

(φ fonction de t qui se réduit à une constante dans le cas d'une génératrice indéformable), desquelles on tire

$$(II) \quad \begin{cases} dx = -\varphi \sin \varphi d\varphi + (f'_1 + \rho' \cos \varphi) dt, \\ dy = \varphi \cos \varphi d\varphi + (f'_2 + \rho' \sin \varphi) dt, \\ dz = K_0 d\varphi + f'_3 dt \end{cases}$$

et

$$(III) \quad ds^2 = E dt^2 + 2F dt d\varphi + G d\varphi^2$$

avec

$$(III \text{ bis}) \quad \begin{cases} E = f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2 + \rho'^2 + 2\rho'(f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi), \\ F = \rho(f'_2 \cos \varphi - f'_1 \sin \varphi) + K_0 f'_3, \\ G = \rho^2 + K_0^2. \end{cases}$$

Les coefficients A, B, C du plan tangent sont donnés par

$$(IV) \quad \begin{cases} A = K_0(f'_2 + \rho' \sin \varphi) - f'_3 \rho \cos \varphi, \\ B = -K_0(f'_1 + \rho' \cos \varphi) - f'_3 \rho \sin \varphi, \\ C = \rho(f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi + \rho') \end{cases}$$

et

$$(V) \quad H^2 = A^2 + B^2 + C^2 = K_0^2[f_1'^2 + f_2'^2 + \rho'^2 + 2\rho'(f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi)] \\ + \rho^2 f_3'^2 + 2K_0 f'_3 \rho[f'_1 \sin \varphi - f'_2 \cos \varphi] \\ + \rho^2(f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi + \rho')^2.$$

L'angle π fait par la normale principale de la génératrice avec la normale à la surface est donné par la formule

$$(VI) \quad \tan \pi = \frac{(f'_1 \cos \varphi - f'_2 \sin \varphi + \rho')(\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}}}{K_0(f'_2 \cos \varphi - f'_1 \sin \varphi) - \rho f'_3},$$

et l'angle V du plan tangent avec le plan de base par

$$(VII) \quad \tan^2 V = \frac{K_0^2}{\rho^2} + \frac{\{K_0(f'_2 \cos \varphi - f'_1 \sin \varphi) - \rho f'_3\}^2}{\rho^2(f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi + \rho')^2}.$$

Enfin, les déterminants D, D', D'' de Gauss sont ici

$$(VIII) \quad D = f_3'' \rho(f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi - \rho') - f_3' \rho(f''_1 \cos \varphi - f''_2 \sin \varphi + \rho'') \\ + K_0[f_1'' f'_2 - f'_1 f''_2 + \cos \varphi(f''_2 \rho' - f''_2 \rho') \\ - \sin \varphi(f'_1 \rho'' - f''_1 \rho')],$$

$$(IX) \quad D' = -\rho' K_0[f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi + \rho'],$$

$$(X) \quad D'' = -\rho[K_0(f'_2 \cos \varphi - f'_1 \sin \varphi) - \rho f'_3].$$

Pour la plupart des utilisations pratiques de ces formules, il y aura, lorsque l'hélice est déformable, intérêt à prendre φ pour variable indépendante ($\varphi' = 1$, $\varphi'' = 0$); lorsque l'hélice est de forme invariable, on ne peut plus prendre φ , qui est constant, comme variable indépendante; mais alors $\varphi' = \varphi'' = 0$ et les formules se simplifient considérablement.

2. PROBLÈMES RELATIFS AU PLAN TANGENT. — La détermination de la courbe de contact du cône circonscrit ayant son sommet en un point donné est, comme dans le cas général, un problème dépendant d'équations où l'angle φ est enchevêtré avec les lignes trigonométriques. Mais, par contre, il est intéressant d'observer que le problème correspondant relatif aux cylindres circonscrits dépend uniquement de la solution d'équations trigonométriques. La considération de ces équations conduit même à des résultats intéressants.

L'équation déterminant la courbe de contact du cylindre parallèle à la direction (α, β, γ) est

$$\begin{aligned} (1) \quad & \alpha [K_0(f'_2 + \varphi' \sin \varphi) - f'_3 \varphi \cos \varphi] \\ & = \beta [K_0(f'_1 + \varphi' \cos \varphi) + f'_3 \varphi \sin \varphi] + \gamma \varphi (f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi + \varphi') = 0. \end{aligned}$$

Dès lors :

Sur chaque génératrice existent deux séries de points de la courbe de contact, les points de chaque série étant répartis à égale distance sur une arête du cylindre principal de la génératrice. En particulier, si $\alpha = \beta = 0$, on obtient l'équation du contour apparent sur le plan de la base.

La détermination de la développable d'égale pente, faisant avec plan de base l'angle Λ_0 , donne lieu à des remarques analogues. Toutefois, dans le cas des hélicoïdes ($f'_1 = f'_2 = 0$), la courbe de contact se réduit à un ensemble de génératrices.

3. LIGNE DE STRICTIION. — La ligne de striction de première espèce est donnée par l'équation

$$(2) \quad K_0(f'_2 \cos \varphi - f'_1 \sin \varphi) - \varphi f'_3 = 0;$$

celle de seconde espèce est définie par la relation

$$(3) \quad (f'_2 \cos \varphi - f'_1 \sin \varphi) [\varphi^2 (f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi) + \varphi' (\varphi^2 + K_0^2)] \\ + K_0 \varphi f'_3 (f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi) = 0.$$

Ces deux lignes ont une branche commune dans les trois cas suivants :

si

$$f'_3 = 0,$$

ou si

$$f'_2 = \varepsilon i f'_1 \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

avec

$$f'_3 = \frac{\varepsilon K_0 i \varphi'}{\varphi},$$

ou enfin si

$$f_1'^2 + f_2'^2 - \frac{\varphi^2}{K_0^2} f_3'^2 - \varphi'^2 = 0.$$

A. Lorsque $f'_3 = 0$, on trouve les surfaces Φ déjà rencontrées (cf *T. II. C.*, Chap. II, n° 6) et que nous retrouverons plus loin. La ligne de striction de première espèce fait entièrement partie de la ligne de striction de seconde espèce.

B. Si $f'_2 = \varepsilon i f'_1$, sans que f'_1 et f'_2 soient nuls ensemble ⁽¹⁾, l'axe de l'hélice décrit un plan isotrope. Deux cas à distinguer :

1° Si φ est constant, la surface engendrée est un cylindre isotrope à génératrices parallèles à l'intersection du plan directeur et du plan décrit par l'axe.

2° Si φ est variable, on trouve la surface représentée canoniquement par les équations

$$(XI) \quad x = f_1(\varphi) + \varphi \cos \varphi, \quad y = f_2(\varphi) + \varphi \sin \varphi, \\ z = K_0 \left(\varphi + i \log \frac{\varphi}{\varphi_0} \right), \quad (\varphi_0 \text{ const.}).$$

C. Reste enfin le cas où l'on a

$$(1) \quad f_1'^2 + f_2'^2 - \frac{\varphi^2}{K_0^2} f_3'^2 - \varphi'^2 = 0.$$

(1) Si $f'_1 = f'_2 = 0$ on trouve les hélicoïdes; dans ce cas il faut examiner directement ce qui se passe. La ligne de striction de seconde espèce est indéterminée : celle de première espèce s'évanouit, sauf pour l'hélicoïde gauche minimum pour lequel elle est indéterminée.

Enfin, notons que, dans tout ce paragraphe, on laisse de côté le cas de $f'_1 + K_0^2 = 0$.

Les surfaces correspondantes sont les surfaces Γ déjà trouvées (cf *T. H. C.*, Chap. II, n° 6) et que nous allons étudier plus spécialement ci-après. La partie commune des deux lignes de striction est une arête de rebroussement enveloppe des hélices génératrices.

V. *Courbure moyenne et courbure totale.* Leur expression est facile à écrire; nous nous bornons à en indiquer la forme sans en expliciter les coefficients; on a

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{ED'' + GD - 2FD'}{H^3} = \frac{P_2(\sin \varphi, \cos \varphi)}{[R_2(\sin \varphi, \cos \varphi)]^3},$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{DD'' - D'^2}{H^3} = \frac{Q_2(\sin \varphi, \cos \varphi)}{[R_2(\sin \varphi, \cos \varphi)]^2}$$

(P_2, Q_2, R_2 polynomes du second degré en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$).

DEUXIÈME PARTIE. — Surfaces particulières.

I. — Surfaces Γ .

1. SURFACES A GÉNÉRATRICE INDÉFORMABLE. — A. Nous étudions tout d'abord celles des surfaces Γ qui sont engendrées par une hélice de forme invariable, c'est-à-dire pour lesquelles φ est constant, soit $\varphi = \varphi_0$.

La relation (4) devient alors

$$(4 \text{ bis}) \quad f_1'^2 + f_2'^2 = \frac{\varphi_0^2}{K_0^2} f_3'^2,$$

qu'on peut alors remplacer par

$$(5) \quad f_1' = \varepsilon_1 \frac{\varphi_0}{K_0} f_3'(t) \sin \theta(t), \quad f_2' = \varepsilon_2 \frac{\varphi_0}{K_0} f_3'(t) \cos \theta(t),$$

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1).$$

On peut d'ailleurs, sans limiter aucunement la généralité de l'étude, prendre $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = +1$. Cela posé, si l'on suppose θ constant, on trouve un cylindre engendré par une droite primitivement tangente à une hélice circulaire et qui se meut parallèlement à sa position initiale en s'appuyant constamment sur l'hélice. Ce cas éliminé, on peut prendre θ comme variable indépendante, et l'on obtient sous la forme réduite suivante les équations

tions paramétriques des surfaces étudiées :

$$(XII) \quad \begin{cases} x = \frac{\varphi_0}{K_0} \int_0^\theta f_3'(b) \sin b \, db + \varphi_0 \cos \varphi, \\ y = \frac{\varphi_0}{K_0} \int_0^\theta f_3'(b) \cos b \, db + \varphi_0 \sin \varphi, \\ z = f_3(b) + K_0 \varphi. \end{cases}$$

La surface définie par les équations (XII) est une surface de translation. Les courbes conjuguées des hélices circulaires génératrices sont des hélices de même pas angulaire et de même plan directeur que les génératrices, comme on le voit en observant que, pour les courbes $\varphi = \text{const.}$ on a, en désignant par ds l'élément d'arc de la projection sur xOy ,

$$\frac{ds}{dz} = \frac{(\varphi_0^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}}}{K_0}.$$

Le rayon de courbure du cylindre principal de ces hélices est

$$R = \frac{\varphi_0}{K_0} f_3''.$$

L'enveloppe des génératrices, partie commune aux deux lignes de striction, est définie par la relation

$$(6) \quad \theta - \varphi = 2n\pi \quad (n \text{ entier}).$$

Nous distinguerons ces surfaces en les désignant sous le nom de *surfaces* Γ_0 .

2. L'équation des asymptotiques se réduit à

$$(7) \quad f_3'' [1 - \cos(\theta - \varphi)] \left[\frac{f_3'(b)}{K_0} d\theta^2 - d\varphi^2 \right] = 0.$$

On ne peut supposer f_3'' nul identiquement ⁽¹⁾ car l'hélice génératrice serait immobile; l'annulation du premier crochet correspond à l'arête de rebroussement. L'équation des asymptotiques

(1) Quant aux valeurs isolées de θ annulant f_3'' , elles correspondent à des génératrices singulières. Les coefficients A, B, C du plan tangent s'annulent en effet dans ce cas (Cf. Formule IV).

prend en définitive la forme simple

$$(8) \quad d\varphi = \left(\frac{f'_3}{K_0} \right)^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

ou

$$\varphi = \int^{\theta} \left(\frac{f'_3}{K_0} \right)^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

Les *invariants de Gauss* et les éléments de courbure de la surface sont donnés par le Tableau suivant :

$$(XIII) \quad \left\{ \begin{aligned} E &= f_3'^2 \left(\frac{\rho_0^2 + K_0^2}{K_0^2} \right), & F &= f_3' \frac{f_0^2}{K_0^2} \left[\frac{K_0^2}{\rho_0^2} - \cos(\theta - \varphi) \right], \\ G &= \rho_0^2 + K_0^2; \\ H &= \frac{2f_3' \rho_0}{K_0} \sin \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) \left[\rho_0^2 \cos^2 \frac{\theta - \varphi}{2} + K_0^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ D &= -2 \frac{f_3'^2 \rho_0^2}{K_0} \sin^2 \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right), \\ D' &= 0, & D'' &= 2f_3' \rho_0^2 \sin^2 \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right); \\ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{i} \frac{K_0(\rho_0^2 + K_0^2) [f_3'(\theta) - K_0]}{\rho_0 \left[f_3'(\theta) \sin \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) \right] \left[\rho_0^2 \cos^2 \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) - K_0^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{1}{R_1 R_2} &= -\frac{1}{i} \frac{K_0^3}{f_3'(\theta) \left[\rho_0^2 \cos^2 \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) + K_0^2 \right]^2}. \end{aligned} \right.$$

Le contour apparent de la surface sur son plan directeur est donné par la formule

$$(9) \quad \theta - \varphi = (2n + 1)\pi \quad (n \text{ entier}).$$

Il est donc constitué en projection sur le plan directeur par le lieu du point du cercle principal diamétralement opposé de son contact avec son enveloppe, résultat qui pouvait être prévu géométriquement.

On a démontré (cf *T. H. C.*, Chap. II, n^{os} 11 et 12) que la normale le long d'une génératrice d'une surface engendrée par une hélice indéformable à plan directeur admet une directrice

rectiligne et un plan directeur. Il suffit de se reporter aux formules données dans ce Mémoire pour voir que, dans le cas actuel :

La normale le long d'une génératrice admet pour directrice rectiligne la génératrice rectiligne de son cylindre principal passant par le point de contact de l'hélice et de son enveloppe, et pour plan directeur le plan

$$(10) \quad z = \frac{z_0}{K_0} (x \sin \theta - y \cos \theta).$$

Les formules du Tableau VIII donnent lieu aux remarques suivantes :

La courbure moyenne est nulle sur les génératrices satisfaisant à l'équation $f_3 = K_0$. En particulier, la surface est minima si f_3 se réduit à $K_0 \eta + \text{const.}$

On vérifie sans peine qu'on se trouve alors en présence de l'hélicoïde réglé minimum.

La valeur absolue de la courbure totale sur une hélice génératrice varie entre les deux limites suivantes :

$$\frac{1}{4K_0 f_3''} \quad \text{et} \quad \frac{K_0^3}{4(z_0^2 - K_0^2)^2 f_3''}$$

qu'elle atteint respectivement pour les points du contour apparent et sur l'arête de rebroussement ⁽¹⁾.

L'angle Λ du plan tangent avec le plan directeur est donné par

$$(11) \quad \tan^2 \Lambda = \frac{K_0^2}{z_0^2} + \tan^2 U$$

avec

$$\tan U = \frac{K_0}{z_0} \tan \left(\frac{\xi - \eta}{\alpha} \right)$$

ou

$$(11 \text{ bis}) \quad \tan \Lambda = \frac{K_0}{z_0} \frac{1}{\cos \left(\frac{\xi - \eta}{\alpha} \right)}.$$

(1) A la vérité, on obtient sur celle-ci ces éléments sous forme indéterminée sur cette arête; mais les formules du texte sont débarrassées du facteur d'indétermination, et l'on voit que si, comme cela a lieu en général, une arête est un lieu de singularités, les valeurs dont il s'agit ici sont les limites de celles qui sont relatives à un point s'approchant du point de l'arête.

L'expression du paramètre de distribution est

$$(12) \quad P = \frac{1}{2} \frac{K_0}{\rho_0} \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\varphi - \theta}{2} \right)}.$$

3. SURFACES Γ_0 HÉLICOÏDALES. — Lorsque f_3 se réduit à une fonction du premier degré de θ , que l'on peut sans aucune restriction supposée réduite à $K_1 \theta$ (K_1 const.), les surfaces Γ_0 obtenues se réduisent à des hélicoïdes, les hélices conjuguées $\varphi = \text{const.}$ devenant des hélices circulaires (cf n° 1).

On obtient ainsi des hélicoïdes très remarquables à double génération par hélices circulaires indéformables formant un réseau conjugué. Ces surfaces peuvent être représentées par les équations

$$(XIV) \quad \begin{cases} x = \rho_1 \cos \theta + \rho_0 \cos \varphi, \\ y = \rho_1 \sin \theta + \rho_0 \cos \varphi, \\ z = K_1 \theta + K_0 \varphi. \end{cases} \quad \left(\frac{\rho_1}{K_1} = \frac{\rho_0}{K_0} \right),$$

Les hélices $\varphi = \text{const.}$ et les hélices $\theta = \text{const.}$ ont pour enveloppe l'hélice

$$(13) \quad x = (\rho_0 + \rho_1) \cos \xi, \quad y = (\rho_0 + \rho_1) \sin \xi, \quad z = (K_0 + K_1) \xi.$$

La surface hélicoïdale étudiée peut être considérée comme engendrée, soit par l'hélice (ρ_0, K_0) , soit par l'hélice (ρ_1, K_1) se mouvant en restant constamment tangente à l'hélice $(\rho_0 + \rho_1, K_0 + K_1)$.

Enfin, si l'on tient compte de la similitude des hélices considérées, on peut voir par un raisonnement géométrique très simple que :

Le mouvement de l'hélice génératrice s'obtient en faisant rouler son cylindre principal sur le cylindre principal $(\rho_0 + \rho_1)$ de l'enveloppe.

Avant de quitter ce sujet, faisons les deux remarques suivantes, faciles à vérifier :

1° Si $K_1 = K_0$, la surface trouvée est la surface de vis à filet carré.

2° Si $K_1 = -K_0$, on obtient une surface de révolution obtenue par la rotation d'une hélice autour d'une parallèle à son axe.

B. Surfaces Γ générales.

4. Nous allons passer maintenant à l'étude des surfaces Γ engendrées par une hélice déformable. Le rayon ρ est alors variable et, en le prenant pour variable indépendante, on peut remplacer la relation (4) par l'ensemble des suivantes, qui lui est équivalent :

$$f_1 = -\frac{\sin \Phi(\rho)}{\cos \Theta(\rho)}, \quad f_2 = \frac{\cos \Phi(\rho)}{\cos \Theta(\rho)}, \quad \rho f'_3 = K_0 \tan \Theta(\rho),$$

dans lesquelles Φ et Θ sont deux fonctions arbitraires.

On trouve ainsi pour les surfaces Γ les équations réduites suivantes :

$$(XV) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi = \int^{\rho} \frac{\sin \Phi}{\cos \Theta} d\rho, \\ y = \rho \sin \varphi = \int^{\rho} \frac{\cos \Phi}{\cos \Theta} d\rho, \\ z = K_0 \varphi = K_0 \int^{\rho} \frac{\tan \Theta(\rho)}{\rho} d\rho. \end{cases}$$

L'équation de l'enveloppe des génératrices est la solution commune aux équations

$$\cos(\varphi - \Phi) - \sin \Theta = 0, \quad \sin(\varphi - \Phi) + \cos \Theta = 0;$$

cette enveloppe a donc simplement pour équation

$$(XVI) \quad \varphi = 2n_1\pi - \frac{\pi}{2} + \Theta + \Phi \quad (n_1 \text{ entier}).$$

Les coefficients du plan tangent sont

$$(XVII) \quad \begin{cases} A = K_0 \frac{[\cos \Phi + \sin(\varphi - \Theta)]}{\cos \Theta}, & B = K_0 \frac{[\sin \Phi - \cos(\varphi - \Theta)]}{\cos \Phi}, \\ C = \rho \frac{[\sin(\varphi - \Phi) + \cos \Theta]}{\cos \Theta} \end{cases}$$

et

$$(XVIII) \quad H^2 = \frac{\rho^2 [\sin(\varphi - \Theta) + \cos \Theta]^2 + 2K_0^2 [1 + \sin(\varphi - \Phi - \Theta)]}{\cos^2 \Theta}.$$

L'équation du *contour apparent de la surface* sur son plan de base s'obtient immédiatement sous la forme

$$\sin(\varphi - \Phi) = -\cos\Theta.$$

Une partie de cette solution est à rejeter, en ce sens qu'elle donne l'arête de rebroussement pour laquelle le plan tangent est indéterminé; en définitive, l'équation du contour apparent est

$$(XIX) \quad \varphi = 2n_2\pi - \frac{\pi}{2} - \Theta + \Phi.$$

L'angle π *formé par le plan osculateur de la génératrice* avec la normale à la surface est donné par la formule

$$(XX) \quad \tan g \pi = \frac{(\varphi^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \varphi - \Phi + \Theta \right]}{K_0 \sin \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \varphi + \Phi - \Theta \right]}.$$

On vérifie sans aucune difficulté que :

La normale relative à la génératrice (φ) admet une directrice rectiligne parallèle à son axe, de coordonnées :

$$(14) \quad \begin{cases} x = - \int_0^\varphi \frac{\sin \Phi}{\cos \Theta} dz = \varphi \sin(\Theta - \Phi), \\ y = - \int_0^\varphi \frac{\cos \Phi}{\cos \Theta} dz = \varphi \cos(\Theta - \Phi). \end{cases}$$

On voit que *cette directrice rectiligne est l'arête du cylindre principal de la génératrice*, correspondant à la valeur

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \Theta + \Phi.$$

Cette normale admet également un plan directeur d'équation

$$(15) \quad \frac{K_0}{\varphi} z = \cos(\Theta - \Phi)x - \sin(\Theta - \Phi)y.$$

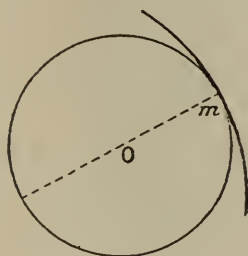
La comparaison des formules (XIX) et (14) conduit de suite au résultat suivant :

Les points d'une génératrice situés sur le contour apparent se trouvent sur la génératrice rectiligne de son cylindre

principal diamétralement opposée de la génératrice servant de directrice rectiligne à la normale relative à l'hélice considérée.

Dans le cas général où Φ et Θ sont quelconques, la surface est encore très générale, et il ne paraît pas qu'il soit possible de signaler de nouvelles propriétés intéressantes.

Fig. 3.



Si Θ se réduit à une constante, f_3 est logarithmique; nous nous arrêterons de suite au cas où $\Theta = 0$; on trouve alors les surfaces C, qui appartiennent à la fois à la classe des surfaces F et à celle des surfaces Φ .

3. Surfaces C.

En choisissant convenablement l'origine, on peut prendre pour équations de ces surfaces

$$(XV \text{ bis}) \quad \begin{cases} x = \varrho \cos \varphi - \int \sin \Phi(\varphi) d\varphi, \\ y = \varrho \sin \varphi + \int \cos \Phi(\varphi) d\varphi, \\ z = K_0 \varphi. \end{cases}$$

Les diverses formules relatives aux surfaces F générales se simplifient considérablement; on trouve :

Enveloppe des génératrices

$$(XVI \text{ bis}) \quad \varphi = 2n_1\pi - \frac{\pi}{2} + \Phi.$$

Coefficients du plan tangent :

$$(XVII \text{ bis}) \quad \begin{cases} A = K_0(\sin \varphi + \cos \Phi), \\ B = K_0(-\cos \varphi + \sin \Phi), \\ C = \varrho[\sin(\varphi - \Phi) + 1]. \end{cases}$$

Le contour apparent se réduit ici à la projection de l'enveloppe, résultat à prévoir, si l'on observe que la condition

$$f_1'^2 + f_2'^2 = 1$$

indique que le cylindre principal reste osculateur à un cylindre fixe.

L'angle π est donné par la formule

$$(XX \text{ bis}) \quad \tan \pi = \frac{(\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}}}{K_0} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi - \Phi}{2} \right).$$

Le paramètre de distribution a pour valeur en chaque point

$$(16) \quad P = -\frac{1}{2} \frac{K_0}{\rho} \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi - \Phi}{2} \right)};$$

abstraction faite du signe, cette valeur est minima, sur une génératrice donnée par les points pour lesquels

$$(17) \quad \varphi = 2n_3\pi + \frac{\pi}{2} + \Phi, \quad (n_3 \text{ entier}).$$

Ces points se trouvent sur la génératrice rectiligne du cylindre principal directement opposée à celle qui porte les points de l'enveloppe de l'hélice; cette droite n'est autre que la directrice rectiligne de la normale correspondant à l'hélice génératrice considérée.

L'équation des asymptotiques est

$$(18) \quad \Phi' d\varphi^2 + 2 d\varphi \cdot d\varphi + \rho \tan \left[\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\varphi - \Phi}{2} \right) \right] d\varphi^2 = 0.$$

Elle s'intègre sans difficulté lorsque Φ est constant. Mais alors on constate sans peine qu'on se trouve en présence de la génération de la surface de vis à filet carré par des hélices du deuxième système dont l'axe décrit un plan passant par l'axe de la surface.

Dans le cas général, on observera qu'elle ne dépend pas de K_0 .

Courbure totale et courbure moyenne. — On obtient sans

difficulté les valeurs suivantes des invariants de Gauss, en posant

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi - \Phi}{2}, \\ E &= 4 \cos^2 \varphi_1, \quad F = 2 \varphi \sin \varphi_1 \cos \varphi_1, \\ G &= \varphi^2 + K_0^2, \quad H = 2 \cos \varphi_1 (K_0^2 + \varphi^2 \cos^2 \varphi_1)^{\frac{1}{2}}, \\ D &= -2 K_0 \Phi' \cos^2 \varphi_1, \quad D' = -2 K_0 \cos^2 \varphi_1, \\ D'' &= -2 K_0 \varphi \sin \varphi_1 \cos \varphi_1. \end{aligned} \right.$$

D'où l'on tire pour la courbure moyenne

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} &= - \frac{K_0 \Phi' (\varphi^2 + K_0^2)}{4 (K_0^2 + \varphi^2 \cos^2 \varphi_1)^{\frac{3}{2}} \cos \varphi_1}, \\ \frac{1}{R_1 R_2} &= \frac{K_0^2}{4} \frac{\Phi' \varphi \tan \varphi_1 - 1}{(K_0^2 + \varphi^2 \cos^2 \varphi_1)^2}. \end{aligned} \right.$$

Les seuls résultats qu'il nous paraît intéressant de tirer de ces formules sont indiquées par le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Sur une hélice génératrice déterminée : il existe une série de points paraboliques situés sur une génératrice du cylindre principal. Cette génératrice est définie par la valeur de l'argument φ donnée par la formule*

$$(21) \quad \varphi_0 = \Phi + \frac{\pi}{2} - 2\alpha,$$

l'angle α étant l'angle compris entre α et π dont la tangente est

$$(22) \quad \tan \alpha = \frac{1}{\varphi \Phi'} \quad (1).$$

2° *La courbure moyenne possède un minimum de valeur absolue : les points où cette valeur est minima sont les mêmes que ceux qui rendent minimum le paramètre de distribution.*

La valeur du minimum de la valeur absolue de la courbure

(1) Si Φ' est constamment nul, $\varphi_0 = \Phi - \frac{\pi}{2}$, on trouve l'enveloppe des génératrices. Le résultat pour ces points peut être en défaut. Il l'est, en effet. La surface est ici un hélicoïde de gauche minimum.

moyenne est donnée par :

$$(23) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)_m = - \frac{K_0 \Phi'}{(K_0^2 + \varphi^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Remarque. — Sur les génératrices pour lesquelles $\Phi'(\varphi)$ est nulle, la courbure moyenne est constamment nulle.

Courbure géodésique. — En se reportant aux formules générales données antérieurement (Cf. *T. II. C.* Chap. I, nos 9 et 13), on obtient pour la courbure géodésique $\frac{1}{\varphi_g}$ d'une courbe inclinée de l'angle i sur la génératrice

$$(24) \quad \frac{1}{\varphi_g} = \frac{di}{ds} - \frac{\varphi \cos \varphi_1}{(K_0^2 + \varphi^2 \cos^2 \varphi_1)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\varphi \sin \varphi_1 (K_1^2 + \varphi^2 \sin^2 \varphi_1)^{\frac{1}{2}}}{K_0^2 + \varphi^2} \frac{d\varphi}{ds}.$$

En particulier :

Pour une génératrice

$$(25) \quad \left(\frac{1}{\varphi_g} \right)_{II} = - \frac{\varphi \cos \varphi_1}{(\varphi^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}} (\varphi^2 \cos^2 \varphi_1 + K_0^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette valeur est maxima pour les points qui donnent à la courbure moyenne la valeur absolue minima.

6. ÉTUDE PARTICULIÈRE D'UNE SURFACE. — Comme exemple d'une surface C dont la construction graphique est facile, et qui constitue, après la surface de vis à filet carré, la plus simple de ces surfaces, nous étudierons particulièrement celle qui est définie par la valeur suivante de la fonction Φ

$$\Phi = \frac{\varphi}{\varphi_0} \quad (\varphi_0 \text{ const.}).$$

Les équations de cette surface particulière sont :

$$(XV \text{ ter}) \quad \begin{cases} x = \varphi \cos \varphi_1 + \varphi_0 \cos \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right), \\ y = \varphi \sin \varphi_1 + \varphi_0 \sin \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right), \\ z = K_0 \varphi. \end{cases}$$

L'axe de la génératrice décrit un cylindre circulaire; le rayon

du cercle principal croît proportionnellement à l'arc décrit par le pied de son axe. La projection sur le plan de base de l'enveloppe des génératrices est définie par la relation

$$(26) \quad \varphi = 2u_1\pi - \frac{\pi}{2} - \Phi.$$

L'interprétation de cette condition est facile et d'ailleurs évidente si l'on se rappelle la loi de variation du rayon du cercle principal de la génératrice. L'enveloppe des génératrices se projette sur le plan de base suivant une développante de cercle. On en déduit immédiatement le lieu des directrices rectilignes des normales le long d'une génératrice; ce lieu se confond avec le cylindre projetant sur le plan de base la courbe lieu commun des points de chaque hélice génératrice à courbure moyenne minima et à paramètre de distribution minimum.

II. — Surfaces Φ .

7. Comme pour les surfaces Γ , nous commencerons par étudier celles de ces surfaces dont la génératrice est indéformable.

A. *Surfaces Φ engendrées par une hélice de forme invariable.* — Alors φ est constant, soit $\varphi = \varphi_0$.

La surface peut être représentée en équations réduites par le système

$$(XXI) \quad \begin{cases} x = \varphi_0 \cos \varphi + \int_0^\tau \cos f(\tau) d\tau, \\ y = \varphi_0 \sin \varphi + \int_0^\tau \sin f(\tau) d\tau, \\ z = K_0 \varphi, \end{cases}$$

formules dans lesquelles la variable τ et la fonction f ont une signification géométrique évidente. Ces surfaces sont de translation.

L'élément linéaire est

$$(27) \quad ds^2 = d\tau^2 + 2\varphi_0 \sin [f(\tau) - \varphi] d\varphi d\tau + (\varphi_0^2 + K_0^2) d\varphi^2.$$

Les éléments de courbure de la surface sont :

1° La courbure moyenne donnée par :

$$(28) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = K_0 \frac{[\varphi_0 \sin(f - \varphi) + (\varphi_0^2 + K_0^2)f']}{[K_0^2 + \varphi_0^2 \cos^2(f - \varphi)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette formule prend une forme géométrique si l'on observe que tous les éléments qui y figurent ont un sens géométrique connu en remarquant que f' n'est autre que la courbure du cylindre des axes.

2° La courbure totale donnée par :

$$(29) \quad \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\varphi_0 K_0 f' \sin(f - \varphi)}{[K_0^2 + \varphi_0^2 \cos^2(f - \varphi)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Les coefficients du plan tangent sont donnés par

$$(30) \quad A = K_0 \sin f, \quad B = -K_0 \cos f, \quad C = \varphi_0 \cos(f - \varphi).$$

L'angle U et le paramètre de distribution P sont donnés respectivement par les formules

$$(30) \quad \tan U = \frac{K_0}{\varphi_0} \tan(f - \varphi); \quad P = -\frac{K_0}{\varphi_0} \frac{1}{\cos^2(f - \varphi)}.$$

On voit que l'angle U est nul et que P prend sa valeur absolue minima $\frac{K_0}{\varphi_0}$ pour les points de chaque génératrice qui se projettent sur les extrémités du diamètre du cercle principal constitué par la tangente au lieu des centres.

La directrice rectiligne de la normale correspondant à la génératrice (σ) se confond avec la droite de l'infini du plan directeur. Ce dernier a pour équation

$$x \cos f + y \sin f = 0.$$

résultat qui s'interprète immédiatement.

La ligne de striction de première espèce est représentée par l'équation

$$(31) \quad f - \varphi = n\pi \quad (n \text{ entier});$$

cette ligne se confond avec les stries dans les surfaces que nous étudions; la ligne de striction de seconde espèce contient, outre la

branche précédente, les deux branches représentées par la double relation

$$(32) \quad f - \varphi = \pm \frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad (m \text{ entier}).$$

8. Le cas le plus simple de cette série (hors celui où f est constant et où la surface se réduit à un cylindre engendré par une perpendiculaire à l'axe d'une hélice qui se meut en rencontrant toujours cette courbe et en restant parallèle à elle-même) est obtenu en faisant

$$f = \frac{\pi}{a} - \varphi_0, \quad (a, \varphi_0, \text{const.}).$$

On obtient ainsi, en choisissant convenablement l'origine des arcs τ , la surface dont les équations réduites sont

$$(XXI \text{ bis}) \quad \begin{cases} x = \varphi_0 \cos \varphi + a \sin \frac{\tau}{a} \\ y = \varphi_0 \sin \varphi - a \cos \frac{\tau}{a} \end{cases} \quad z = K_0 \varphi.$$

Pour l'étude de cette surface, on n'introduit aucune restriction en supposant a et φ_0 positifs.

On voit immédiatement, en considérant les courbes $\varphi = \text{const.}$, que cette surface est un hélicoïde engendré par un cercle horizontal de rayon a et dont le centre décrit une hélice

$$(x = \varphi_0 \cos \varphi, y = \varphi_0 \sin \varphi, z = K_0 \varphi).$$

Cette surface est à la fois cerclée et doublement hélicée. Bien qu'elle rentre dans le type des hélicoïdes, elle nous paraît assez intéressante pour faire ici l'objet d'une étude rapide établie sur les équations (XXI bis) ⁽¹⁾.

(1) L'élimination de τ et de φ permet d'ailleurs d'obtenir les équations de cet hélicoïde sous la forme habituelle, en coordonnées semi-polaires :

$$(XXI \text{ ter}) \quad \begin{cases} x = R \cos \theta, & y = R \sin \theta, \\ z = K_0 \theta - K_0 a \arccos \frac{R^2 + \varphi_0^2 - a^2}{2 R \varphi_0}, \end{cases}$$

que l'on pourrait obtenir géométriquement par la considération même de la génération cerclée de la surface. Pour certaines questions, par exemple la détermination des lignes de courbure, la forme (XXI ter) est plus commode.

Le calcul conduirait aux deux résultats suivants évidents géométriquement :

1° Le contour apparent horizontal en projection sur le plan de base se réduit aux deux cercles de centre D et de rayon $a \pm \varphi_0$.

2° Le contour apparent vertical en projection sur le plan YOZ se réduit à la projection des hélices extrêmes

$$x = \varphi_0 \cos \varphi, \quad y = \varphi_0 \sin \varphi \pm a, \quad z = k_0 \varphi.$$

Asymptotiques. L'équation des asymptotiques est

$$(33) \quad d\tau^2 - a\varphi_0 \sin\left(\varphi - \frac{\tau}{a}\right) d\varphi^2 = 0,$$

qu'on écrit

$$(33 \text{ bis}) \quad d\left(\frac{\tau}{a}\right) = du \frac{\varepsilon \sqrt{\frac{\varphi_0}{a} \sin u}}{1 - \varepsilon \sqrt{\frac{\varphi_0}{a} \sin u}} \quad \left(u = \varphi - \frac{\tau}{a}, \varepsilon = \pm 1\right),$$

formule dans laquelle la séparation des variables est effectuée.

En posant enfin

$$(34) \quad r^2 = \frac{\varphi_0 \sin u}{a},$$

on obtient pour équation des asymptotiques

$$(35) \quad \varepsilon \frac{\tau - \tau_0}{a} = \frac{2a}{\varphi_0} \int_0^t \frac{t^2 dt}{(1-t) \sqrt{t^2 - \frac{a^2}{\varphi_0^2}}} \quad (r = \pm 1, \tau_0 \text{ const.}).$$

On voit que l'intégration est ramenée aux fonctions elliptiques.

Trajectoires orthogonales des génératrices. On obtient sans difficulté l'équation

$$(36) \quad \frac{1}{\varphi_0^2 - k_0^2} \left(\frac{\tau - \tau_0}{a} \right) + \int \frac{du}{\varphi_0^2 - k_0^2 - a\varphi_0 \sin u} = 0$$

qui ne comporte que des intégrales élémentaires.

On obtient suivant l'ordre de grandeur de $a\varphi_0$ et de $\varphi_0^2 + k_0^2$ les

trois formes suivantes :

$$(2) \quad \tau = \tau_0 + \frac{2a(\varphi_0^2 + K_0^2)}{[(\varphi_0^2 + K_0^2)^2 - a^2\varphi_0^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\times \operatorname{arc} \operatorname{tang} \left[\sqrt{\frac{\varphi_0^2 + K_0^2 - a\varphi_0}{\varphi_0^2 + K_0^2 - a\varphi_0}} \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \frac{\tau}{a} \right) \right],$$

$$\text{si } \varphi_0^2 + K_0^2 = a\varphi_0,$$

$$(3) \quad \tau = \tau_0 + \frac{2a(\varphi_0^2 + K_0^2)}{[a^2\varphi_0^2 - (\varphi_0^2 + K_0^2)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\times \operatorname{arc} \operatorname{tang} \left[\sqrt{\frac{a\varphi_0 + \varphi_0^2 + K_0^2}{a\varphi_0 - \varphi_0^2 - K_0^2}} \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \frac{\tau}{a} \right) \right],$$

$$\text{si } \varphi_0^2 + K_0^2 = a\varphi_0, \text{ et :}$$

$$(4) \quad \tau = \tau_0 - 2a \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \frac{\tau}{2a} \right) \left(a = \frac{\varphi_0^2 + K_0^2}{\varphi_0} \right),$$

$$\text{si } \varphi_0^2 + K_0^2 = a\varphi_0.$$

Courbure moyenne et courbure totale. — Les formules (28) et (29) donnent ici

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} &= -K_0 \frac{\varphi_0 \sin \left(\frac{\tau}{a} - \varphi \right) + \frac{\varphi_0^2 - K_0^2}{a}}{\left[K_0^2 - \varphi_0^2 \cos^2 \left(\frac{\tau}{a} - \varphi \right) \right]^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{1}{R_1 R_2} &= \frac{\varphi_0 K_0^2 \sin \left(\frac{\tau}{a} - \varphi \right)}{a \left[K_0^2 + \varphi_0^2 \cos^2 \left(\frac{\tau}{a} - \varphi \right) \right]^2}. \end{aligned} \right.$$

Une première conséquence de ces formules, conséquence qui était à prévoir, la surface étant un hélicoïde, est la suivante : *La surface étudiée est une surface W*, $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ et $\frac{1}{R_1 R_2}$ dépendant uniquement de $\frac{\tau}{a} - \varphi$. La relation entre R_1 et R_2 est d'ailleurs algébrique.

Des formules (37) on déduit encore la détermination :

1° Des points paraboliques définis par la relation

$$(38) \quad \varphi = \frac{\tau}{a} - n\pi \quad (n \text{ entier}).$$

2° Des points à indicatrice équilatère définis par l'une ou l'autre des formules suivantes :

$$(39) \quad \varphi = \frac{\tau}{\alpha} + z + 2n_1\pi, \quad \varphi = \frac{\tau}{\alpha} - z + (2n_2 + 1)\pi$$

$$\left(n_1, n_2 \text{ entiers, } z \text{ angle défini par la relation } \sin z = \frac{\rho_0^2 + K_0^2}{\alpha \rho_0} \right).$$

On voit que les points à indicatrice équilatère n'existent que si $\alpha \rho_0 \geq \rho_0^2 + K_0^2$. Dans le cas de l'égalité, les deux séries se confondent dans la seule série

$$(39 \text{ bis}) \quad \varphi = \frac{\tau}{\alpha} + \frac{\pi}{2} + 2n_1\pi.$$

B. Surfaces Φ engendrées par une hélice de forme variable.

— 9. Dans le cas des surfaces à génératrice déformable, φ est variable et peut être pris pour variable indépendante.

Les formules générales du paragraphe I de la première partie se simplifient alors considérablement par l'introduction des conditions

$$f_3 = f'_3 = f''_3 = 0, \quad \varphi' = 1, \quad \varphi'' = 0.$$

Il serait fastidieux de les reproduire toutes. Bornons-nous à envisager l'équation des asymptotiques : sa réduction est considérable : cette équation devient

$$(40) \quad [(f_1 f_2 - f'_1 f'_2) + f''_1 \sin \varphi - f''_2 \cos \varphi] d\varphi^2 \\ - 2(f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi + 1) d\varphi d\tilde{z} \\ + \varphi [f_1 \sin \varphi - f_2 \cos \varphi] d\tilde{z}^2 = 0.$$

Elle ne dépend pas de K_0 . Ce fait s'explique simplement si l'on se rappelle la remarque déjà faite (cf. *T. H. C.*, Chap. II, n° 6) : ces surfaces dérivent de la surface de vis à filet carré en faisant subir à chacune des asymptotiques de celle-ci une translation parallèle au plan directeur de loi quelconque.

On voit que chaque hélice génératrice touche une asymptotique aux points définis par la relation

$$\tan \varphi = \frac{f'_2}{f_1},$$

c'est-à-dire aux points correspondant au diamètre du cercle de base tangent au lieu du centre de ce cercle. Ces points sont

aussi les points centraux appartenant à la fois aux deux lignes de striction. La ligne de striction de seconde espèce se complète par la branche définie par l'équation

$$(40) \quad f'_1 \cos \varphi + f'_2 \sin \varphi + \frac{\rho^2 + K_0^2}{\rho^2} = 0.$$

Parmi ces surfaces apparaissent comme particulièrement intéressantes celles qui *dérivent de l'hélicoïde gauche minimum par une translation rectiligne de ses asymptotiques dont l'amplitude est proportionnelle au rayon du cercle principal de l'hélice déplacée. Ces surfaces sont réglées. Nous les désignons sous le nom de surfaces Φ_1 .*

10. Surfaces Φ_1 . — Les équations de cette surface peuvent être mises sous la forme canonique suivante :

$$(XXII) \quad \begin{cases} x = \rho(\cos \varphi + a), \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = K_0 \varphi \end{cases}$$

(a constante, que l'on peut supposer positive ou nulle, ce dernier cas correspondant à la surface gauche minima).

Les coefficients du plan tangent et les invariants de Gauss sont donnés par les formules

$$(XXIII) \quad \begin{cases} A = K_0 \sin \varphi, & B = -K_0(\cos \varphi + a), & C = \rho(a \cos \varphi + 1), \\ E = \alpha^2 + 2a \cos \varphi + 1, & F = -a \rho \sin \varphi, & G = \rho^2 + K_0^2, \\ H^2 = \alpha^2 \rho^2 \cos^2 \varphi + 2a \cos \varphi (\rho^2 + K_0^2) + \rho^2 + K_0^2 (\alpha^2 + 1), \\ D = 0, & D' = -K_0(a \cos \varphi + 1), & D'' = K_0 \alpha \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

La courbure totale et la courbure moyenne sont données par les formules

$$(XXIV) \quad \begin{cases} \frac{1}{R_1 R_2} = - \frac{K_0^2 (a \cos \varphi + 1)^2}{[a^2 \rho^2 \cos^2 \varphi + 2a \cos \varphi (\rho^2 + K_0^2) + \rho^2 + K_0^2 (\alpha^2 + 1)]^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\alpha K_0 \rho \sin \varphi (\alpha^2 - 1)}{[a^2 \rho^2 \cos^2 \varphi + 2a \cos \varphi (\rho^2 + K_0^2) + \rho^2 + K_0^2 (\alpha^2 + 1)]^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Dans le cas où $a = 1$, on trouve la génération de l'hélicoïde

gauche minimum par une famille de sa seconde série d'hélices circulaires.

Trajectoires orthogonales des hélices génératrices. — La séparation des variables est immédiate, et l'on obtient sans difficulté la relation en termes finis :

$$(41) \quad \varphi = K_0 \left[\left(\frac{\tan \frac{\varphi}{2}}{\tan \frac{a}{2}} \right)^{\frac{2}{a}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

(z constante d'intégration).

On voit dès à présent que si l'on veut préciser la construction des courbes, il y aura lieu de distinguer deux cas, suivant que l'on a $a > 1$ ou $a < 1$.

Si a est commensurable, la courbe est algébrique.

Malgré tout l'intérêt que présenterait une discussion complète, nous ne la ferons pas ici pour éviter de charger le présent Mémoire.

Trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes. — On trouve immédiatement l'équation

$$(42) \quad \varphi^2 (2a \cos \varphi + a^2 + 1) = C$$

(C constante d'intégration).

La projection sur le plan de base est toujours une courbe algébrique.

Contours apparents. — Sur le plan de base, on trouve que le contour apparent est défini par la relation

$$(43) \quad \cos \varphi = -\frac{1}{a}.$$

Ce contour est donc formé de deux droites symétriques par rapport à Ox , résultat évident géométriquement.

Le contour apparent vertical (sur $\mathcal{Y} = 0$) est donné par la relation

$$\varphi = (2n + 1)M \pm \alpha$$

(n entier, α arc compris entre 0 et π tel que $\cos \alpha = a$).

Lignes de striction. — 1^o *La ligne de striction des génératrices rectilignes* se réduit à Oz .

2^o *Ligne de striction de première espèce des hélices génératrices.* — Cette ligne se confond avec la ligne de contour apparent vertical sur le plan $x = 0$ ($\varphi = n\pi$).

3^o *Ligne de striction de seconde espèce des hélices génératrices.* — Outre la précédente, la ligne de striction de seconde espèce comporte en plus la branche définie par l'équation

$$(14) \quad a \cos \varphi + \frac{z^2 + K_0^2}{\varphi^2} = 0.$$

Cette ligne n'est réelle que si $a > 1$.

Stries. — Les stries des génératrices rectilignes sont un peu compliquées (données pour une équation du deuxième degré en $\cos \varphi$); nous ne la donnerons pas.

Celles des hélices circulaires se composent de deux branches, dont l'une est toujours imaginaire et dont l'autre a pour équation $\cos \varphi = -\frac{1}{a}$. Cette branche se confond avec le contour apparent horizontal, formé lui-même de deux génératrices rectilignes.

Lignes asymptotiques. — Leur première famille est constituée par les génératrices rectilignes. La seconde est formée par les courbes définies par l'équation

$$(15) \quad \varphi = \varphi_0 \left(\frac{a+1}{a \cos \varphi + 1} \right)^{\frac{1}{2}},$$

où φ_0 est une constante d'intégration dont la signification est évidente.

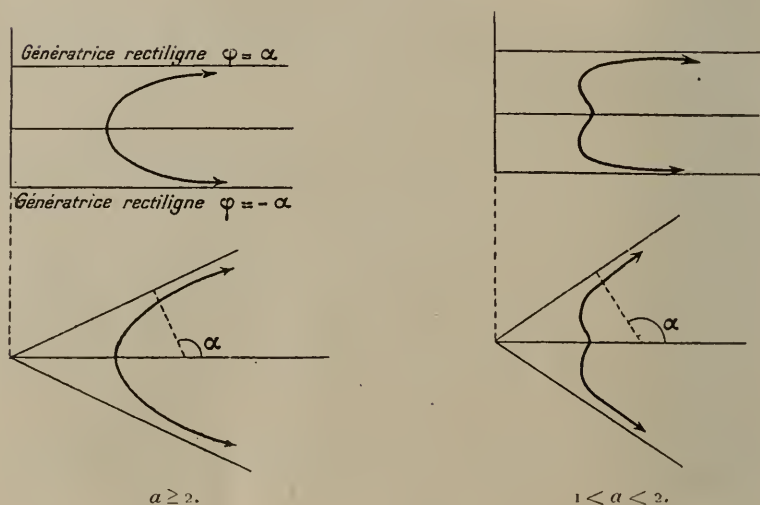
Si l'on rapproche les deux premières équations de la surface de l'équation (15), on voit que :

Toutes les asymptotiques du second système se projettent sur le plan de base suivant les courbes homothétiques de l'une quelconque d'entre elles par rapport à l'origine.

Ce résultat était à prévoir géométriquement; en effet : quatre asymptotiques quelconques déterminent sur les génératrices rectilignes un rapport anharmonique constant. Or deux de celles-ci sont la directrice rectiligne et la droite de l'infini du plan directeur. En considérant deux asymptotiques quelconques aux précédentes et projetant sur le plan directeur, la proposition devient évidente.

Épures annexées. — Nous avons joint à ce travail l'épûre représentant une surface Φ_1 correspondant à $a = 2$.

Fig. 4.



Lorsque $a > 1$, les asymptotiques ont des formes différentes suivant que $a \geq 2$ ou que $a < 2$.

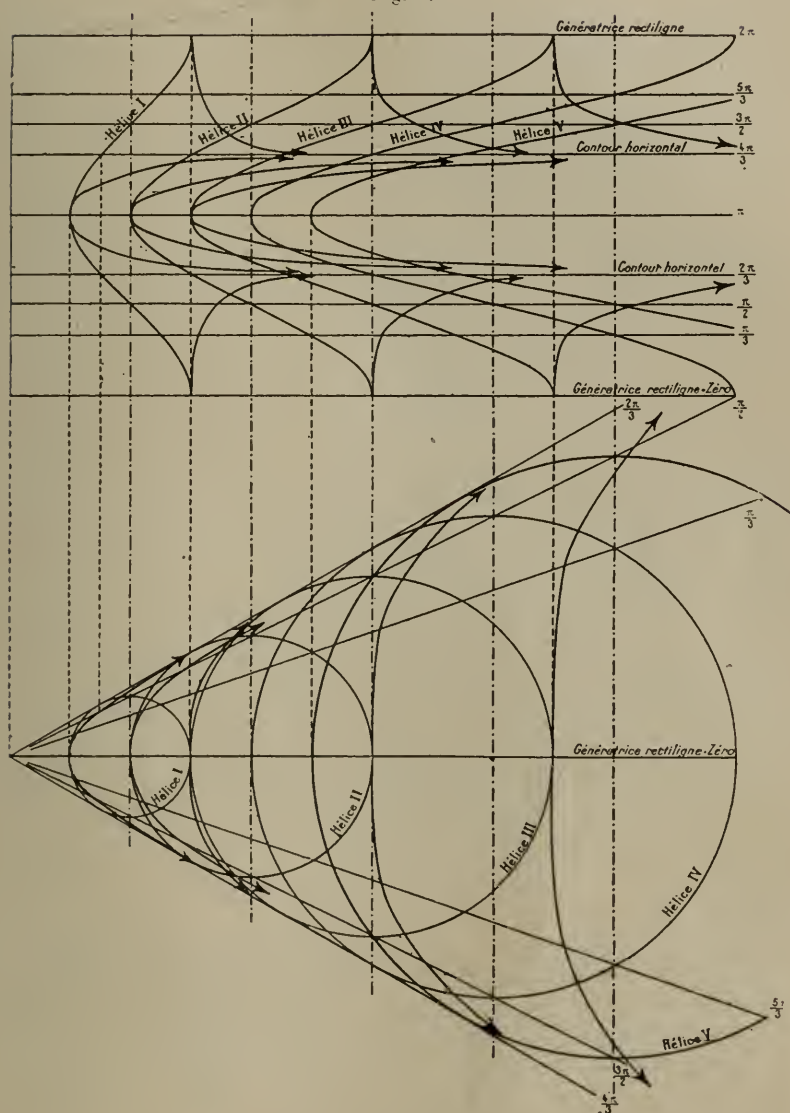
Une branche de chaque forme est représentée schématiquement ci-dessus (fig. 4) en projection sur le plan directeur et sur le plan $\gamma O z$. En réalité, la forme générale pour $a = 2$ est la même que pour $a > 2$, mais le sommet de chaque projection est un méplat lorsque $a = 2$.

Dans les deux projections, les courbes sont asymptotes aux génératrices rectilignes

$$\varphi = \pm \alpha + 2kr \left(\cos \alpha = -\frac{1}{a} \right).$$

Pour $a < 1$, courbes fermées en projection horizontale et à

Fig. 5.



infinité de spires, rappelant les hélices circulaires auxquelles elles se réduisent pour $a = 1$.

III. — Surfaces dont un système d'asymptotiques
est formé des courbes $\varphi = \text{const.}$

11. Dans les surfaces Φ_4 un système d'asymptotiques est formé pour les courbes $\varphi = \text{const.}$, qui se réduisent d'ailleurs à des génératrices rectilignes. On peut se proposer de rechercher toutes les surfaces engendrées par des hélices à plan directeur et à pas constant pour lequel ce fait a lieu. Cette propriété peut d'ailleurs prendre un énoncé géométrique évident.

La condition pour qu'une surface réponde à la question est que l'invariant D de Gauss soit identiquement nul, ce qui exige [cf. formule (VII)] les trois conditions

$$(46) \quad \begin{cases} (f_3'' f_2' - f_2'' f_3') \rho + K_0' f_1'' = 0, \\ (f_3'' f_1' - f_1'' f_3') \rho - K_0 f_2'' = 0, \\ f_3'' \rho + K_0 (f_1'' f_2' - f_1' f_2'') = 0 \end{cases}$$

qui expriment que les coefficients de $\sin \varphi$, de $\cos \varphi$ et le terme indépendant de φ dans D sont nuls. La substitution dans les deux premières équations (46) de la valeur de f_3'' donnée par la troisième conduit aux deux équations suivantes :

$$(47) \quad \begin{cases} f_1'' K_0 (1 - f_2'^2) + f_2'' (K_0 f_1' f_2' - f_3' \rho) = 0, \\ f_1'' (f_1' f_2' K_0 + f_3' \rho) + f_2'' K_0 (1 - f_1'^2) = 0. \end{cases}$$

Les équations (47) donnent, si le déterminant de f_1'' et de f_2'' n'est pas nul, $f_1'' = f_2'' = 0$; d'où, en vertu de la troisième équation (46), $f_3'' = 0$. On obtient ainsi des surfaces réglées à directrice rectiligne perpendiculaire au plan de base et qui se déduisent des surfaces de vis générales comme les surfaces Φ_4 de la surface de vis à filet carré. Ces surfaces, qui ont pour équations réduites les suivantes :

$$(XXV) \quad x = \rho (\cos \varphi + a), \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = K_0 \varphi + c \rho \quad (a, c, \text{const.}),$$

se réduisent aux surfaces Φ_4 pour $c = 0$. La détermination du second système d'asymptotiques peut être ramenée aux quadratures, la surface réglée ayant une directrice rectiligne. C'est d'ailleurs évident sur l'équation des asymptotiques qui, après séparation de la solution $d\varphi = 0$, se réduit à une équation de Bernoulli en ρ :

$$(48) \quad \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\alpha K_0 \sin \varphi}{2(a \cos \varphi + 1)} \rho + \frac{c}{2 K_0 (a \cos \varphi + 1)} \rho^2,$$

Il reste à rechercher les solutions qui peuvent résulter de l'annulation du déterminant de f_1'' et de f_2'' dans les équations (47). Cette condition est

$$(49) \quad (f_1'^2 + f_2'^2 - 1)K_0^2 = f_3'^2 \rho^2.$$

Ce qui montre que toute solution nouvelle du problème doit être une surface Γ . La condition (49) étant satisfaite, les deux premières équations (46) peuvent être remplacées par l'une d'elles et par leur combinaison évidente

$$(50) \quad f_3''(f_2'f_2'' + f_1'f_1'') - (f_1''^2 + f_2''^2)f_3' = 0.$$

En résumé, on obtiendra une nouvelle série de solutions en cherchant toutes les surfaces satisfaisant aux relations (49), (50) et à la troisième équation (46), ou encore en recherchant toutes les surfaces Γ répondant aux deux conditions

$$(51) \quad \begin{cases} f_3''(f_2'f_2'' + f_1'f_1'') - (f_1''^2 + f_2''^2)f_3' = 0, \\ f_3''\rho + K_0(f_1'f_2' - f_2''f_1'') = 0, \end{cases}$$

ces surfaces satisfaisant par définition à la relation (49).

Si l'on se reporte au n° 4 du présent Chapitre, les équations (61) deviennent, par introduction des fonctions Φ et Θ figurant dans la définition des surfaces Γ ,

$$(52) \quad \Theta'^2 - \Phi'^2 = \frac{\Theta'}{\rho} \tan \Theta \quad \text{et} \quad \Theta' - \Phi' = \frac{\sin \Theta \cos \Theta}{\rho}$$

qu'on peut remplacer par les deux suivantes :

$$(XXVI) \quad \begin{cases} \Theta' - \Phi' = \frac{\sin \Theta \cos \Theta}{\rho}, \\ \Theta' + \Phi' = \frac{\Theta}{\cos^2 \Theta}. \end{cases}$$

Nous trouvons donc ainsi comme nouvelles solutions du problème proposé les surfaces Γ dont les fonctions caractéristiques Θ et Φ satisfont au système (XXVI).

Par voie d'addition on tire immédiatement du système (XXVI) la relation

$$(53) \quad \frac{4\Theta' \cos 2\Theta}{\sin 2\Theta(1 + \cos 2\Theta)} = \frac{1}{\rho}$$

qui s'intègre très rapidement en prenant pour variable auxiliaire

$\tan \Theta$. On trouve ainsi, en tenant compte de la seconde équation (XXVI), les deux relations

$$(XXVII) \quad \begin{cases} \rho = \rho_0 \tan \Theta e^{-\frac{1}{2} \tan^2 \Theta} \\ \Phi = \tan \Theta - \Theta + \Phi_0 \end{cases} \quad (\rho_0, \Phi_0, \text{const.}).$$

Ces formules définissent explicitement ρ et Φ en fonction de Θ . On aura donc les équations des surfaces Γ correspondantes en introduisant les valeurs de ρ et de Φ données par les équations (XXVII) dans les formules définissant les surfaces.

NOTE.

Signalons ici les erreurs suivantes relevées dans nos Mémoires antérieurs à ce sujet :

A. Mémoire sur la théorie générale des surfaces engendrées par une hélice circulaire :

Chapitre I, formule (30), l'expression de $d\mu$ est incomplète; lire :

$$d\mu = \sin V \sin(\varphi - W) (d\varphi - dW) + \cos V \sin(\varphi - W) dV.$$

Chapitre IV, formule (57), dernière ligne, au lieu de $u = \frac{df_1}{d\varphi} \dots$,

$$\text{lire } u = \frac{df_1}{d\varphi}, \quad v = \frac{df_2}{d\varphi}, \quad w = \frac{df_3}{d\varphi}.$$

B. Mémoire sur les hélicoïdes de seconde espèce :

$$\text{Formule (17 bis), au lieu de } \varphi = \frac{c + f'_\varphi - f}{k + k'\varphi}, \quad \text{lire } \varphi = \frac{c + f'_\varphi - f}{k - k'\varphi}.$$

Page 40, ligne 10, après points d'arrêt, ajouter :

Chaque demi-méridienne se complète par symétrie relativement à Ox , chacune des courbes ainsi obtenues correspondant à la seconde détermination du radial figurant dans la formule (36). Chaque demi-méridienne ainsi complétée est une tractrice de base Oz .

Page 52, en remontant, ligne 11, au lieu de la valeur de $\frac{\rho}{\rho_0} \dots$, lire la valeur de $\log \frac{\rho}{\rho_0}$.

Page 57, intervertir les indications portées dans les deux figures.

COURBE DE RACCORDEMENT ET ÉLASTIQUE PLANE;

PAR M. P. APPELL.

I. Ayant été consulté sur la mode de raccordement de deux routes rectilignes A'A, B'B dans un plan, j'ai cherché, comme étant la meilleure courbe de raccordement, la courbe tangente à A'A et B'B en A et B, sans points anguleux ni rebroussements, rendant *minimum* l'intégrale

$$I = \int \frac{ds}{\rho^2}$$

prise le long de la courbe, ds désignant un élément d'arc et ρ le rayon de courbure de cet élément. Il faut, en effet, éviter les grandes courbures et aussi les grandes longueurs.

Les coordonnées x et y d'un point M de la courbe peuvent être regardées comme des fonctions de l'arc s compté, de A vers B, à partir de A. On a alors

$$I = \int_0^l (x''^2 + y''^2) ds,$$

en désignant les dérivées par rapport à s par des accents et la longueur de la courbe par l . On a de plus

$$x'^2 + y'^2 = 1.$$

Suivant une méthode classique, écrivons que cette intégrale est minimum, en particulier, quand on passe de la courbe cherchée à une courbe infiniment voisine de même longueur. On a alors

$$\frac{1}{2} \delta I = \int_0^l (x'' \delta x'' + y'' \delta y'') ds.$$

Remplaçant $\partial x'' ds$, $\partial y'' ds$ par $d\partial x'$, $d\partial y'$ et intégrant par parties, en remarquant que $\partial x'$, $\partial y'$ sont nuls aux limites, on a

$$\frac{1}{2} \partial I = - \int_0^l (x''' \partial x' + y''' \partial y') ds.$$

Mais on a

$$x' \partial x' + y' \partial y' = 0,$$

donc λ désignant une fonction arbitraire de s

$$\frac{1}{2} \partial I = - \int_0^l [(x''' - \lambda x') \partial x' + (y''' - \lambda y') \partial y'] ds.$$

Intégrons par parties après avoir fait

$$\partial x' ds = d \partial x, \quad \partial y' ds = d \partial y$$

et remarquons que ∂x et ∂y s'annulent aux limites. Il vient

$$\frac{1}{2} \partial I = \int_0^l \left[\frac{d}{ds} (x''' - \lambda x') \partial x + \frac{d}{ds} (y''' - \lambda y') \partial y \right] ds.$$

Égalant à zéro les coefficients de ∂x et de ∂y , on a

$$\frac{d}{ds} (x''' - \lambda x') = 0, \quad \frac{d}{ds} (y''' - \lambda y') = 0,$$

d'où

$$(1) \quad x''' - \lambda x' = a, \quad y''' - \lambda y' = b$$

avec

$$(2) \quad x'^2 + y'^2 = 1,$$

a et b désignant des constantes.

Éliminant λ entre les deux équations (1), on a

$$x''' y' - y''' x' = a y' - b x',$$

d'où en intégrant

$$(3) \quad x'' y' - y'' x' = a y - b x + c.$$

Mais cette équation montre que la courbe cherchée n'est autre

que l'élastique plane (voir mon *Traité de Mécanique rationnelle*, t. I, Chap. VII).

En effet, la quantité $x''y'' - y''x'$ est égal à $\pm \frac{1}{\varphi}$; si l'on prend pour axe OX la droite

$$ay - bx + c = 0$$

et pour axe OY une perpendiculaire, on a

$$Y = \pm \frac{ay - bx + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

L'équation (3) s'écrit alors, dans le nouveau système d'axes,

$$\varphi Y = \text{const.},$$

équation qui caractérise l'élastique plane.

Quand a et b sont nuls, la courbe est un cercle, car on a

$$\varphi = \text{const.}$$

Ces indications générales devront être complétées par une discussion détaillée, conduisant, dans chaque cas, à la détermination des constantes.

Ce résultat peut se rattacher à la considération de l'énergie de l'élastique plane.

II. D'une façon générale posons

$$c = x''^2 + y''^2 = \frac{1}{\varphi^2},$$

et cherchons les courbes pour lesquelles l'intégrale

$$I = \int_a^l f(c) ds$$

est un *minimum*, $f(c)$ étant une fonction positive donnée.

Un calcul analogue au précédent montre que, en prenant un axe OX convenable, on a pour ces courbes

$$\varphi Y = h f''(c),$$

h désignant une constante. Si

$$f(c) = \frac{1}{c^{2n}} = c^n,$$

on a

$$c^{2n-1} Y = \text{const.}$$

En prenant

$$f(c) = (\sqrt{c} - k)^2,$$

où k est une constante, on trouve encore l'élastique plane.

III. *Indications bibliographiques.* — Nous nous sommes placés à un point de vue purement géométrique. Dans les chemins de fer, les ingénieurs font le raccordement en tenant compte du *décers* de la voie. On pourra consulter à ce sujet les travaux suivants :

NORDLING (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1867₂) propose l'emploi de la parabole cubique.

JULES MICHEL, *Raccordement des courbes avec les alignements dans le tracé des chemins de fer* [*Revue générale des chemins de fer* (Dunod), novembre 1879].

TOURTAÏ (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1883₂) emploie la *Clothoïde*, ou courbe de Cornu.

BOURLET, *Traité des bicycles et bicyclettes* (*Encyclopédie Léauté*), indique le *Clothoïde*.

D'OCAGNE, *Leçons sur la Topométrie* (Chap. IV, Théorie générale du raccordement), indique la lemniscate et l'élastique plane.

PAUL ADAM (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1895₂) préconise l'emploi de la lemniscate.

M. EDLER DE LEBER, *Calcul des raccordements paraboliques dans les tracés de chemins de fer* (Baudry, 1892).

SUR
LES DIAMÈTRES RECTILIGNES DES COURBES ALGÈBRIQUES PLANES;

PAR M. HENRI LEBESGUE.

L. J. Bertrand a démontré que les seules courbes algébriques indécomposables qui admettent un diamètre conjugué de chaque direction de cordes sont les coniques (*Journ. de Math.*, 1842).

M. Montel, après m'avoir signalé qu'une légère modification à la démonstration de Bertrand permettait d'affirmer que les coniques sont les seules courbes algébriques indécomposables admettant une infinité de diamètres, posait la question suivante : *Quel est le nombre maximum de diamètres que peut posséder une courbe indécomposable de degré m ?*

Le présent travail a été écrit pour répondre à cette question : *Sauf quelques exceptions relatives aux petites valeurs de m , le nombre maximum est m , si m est impair, et $m + 2$, si m est pair.*

Pour arriver à ce résultat, j'ai cru utile de faire un assez long détour. J'ai tout d'abord cherché *quelles sont les dispositions de diamètres, en nombre fini, que peut posséder une figure plane quelconque.*

Le passage d'un point à celui qui lui correspond, de l'autre côté d'un diamètre, définit une transformation homographique spéciale : une symétrie oblique. La question précédente se ramène facilement à la suivante : *quelles sont les dispositions diverses des symétries contenues dans les groupes finis de transformations homographiques du plan ?*

On serait ainsi conduit à consulter le tableau de ces groupes finis, tableau qui a été tout d'abord dressé par M. C. Jordan, puis révisé depuis par divers auteurs. Mais, en réalité, la question est de nature plus simple et elle dépend seulement de la connaissance du tableau des groupes finis de transformations homographiques de la droite. Pour rester aussi élémentaire que possible, j'ai tenu à utiliser ces groupes sous leur forme si intuitive de groupes finis de rotations réelles de l'espace.

Cette étude m'a conduit à *cinq dispositions de diamètres, en nombre fini*. Les dispositions I et II, qui sont fournies par les groupes diédraux, contiennent un nombre variable de diamètres; les dispositions III, IV, V, qui proviennent des groupes du cube et de l'icosaèdre, contiennent respectivement 12, 18 et 30 diamètres.

Les diamètres d'une courbe algébrique, ou bien sont en nombre fini et ont l'une des dispositions I à V, ou bien sont en nombre infini; ils se présentent alors suivant cinq autres dispositions (a, b, c, d, e), la courbe algébrique se décompose en droites parallèles ou en coniques ayant, deux à deux, quatre points communs à l'infini.

Ce résultat obtenu, il suffit de former les équations des courbes algébriques admettant les diamètres des diverses dispositions I à V et de regarder le degré des équations obtenues, pour pouvoir répondre à la question de M. Montel ou pour énumérer les diverses dispositions de diamètres des courbes algébriques d'un degré donné.

Une première rédaction de ce travail a été perdue. Je remercie M. Tb. Leconte d'avoir bien voulu préparer cette nouvelle rédaction qui, grâce à lui, est plus détaillée, plus précise et plus claire que la première.

2. Rappelons d'abord quelques définitions.

On dit qu'une figure plane F admet un diamètre rectiligne A conjugué de la direction de cordes D, ou encore que, pour la figure F, la direction de cordes D admet le diamètre A, si, à tout point M de la figure F, correspond le point M' de la même figure tel que MM' soit parallèle à D et ait son milieu sur A. On dit encore que les points M et M' sont symétriques obliquement par rapport à la droite A, pour la direction D. Dans ce qui suivra, nous supprimerons le mot oblique sauf quand il y aura lieu de distinguer entre la symétrie oblique et la symétrie orthogonale ou symétrie vraie au sens de la géométrie élémentaire.

Une symétrie oblique est une transformation homographique S telle que la droite MM' qui joint deux points homologues passe par le point à l'infini d de la direction donnée D, telle aussi que si E désigne le point d'intersection de MM' avec la droite fixe A, on ait la relation $(dEMM') = -1$. Nous représenterons la symétrie définie par A et D à l'aide de la notation $S \equiv (A, D)$.

¹ Nous allons compléter cette définition purement géométrique de la symétrie en nous plaçant au point de vue de la géométrie analytique.

Pour définir la symétrie (A, D), prenons A pour axe des x et un axe des y parallèle à la direction D. La transformation homographique (A, D) sera donnée par les formules $X = x$, $Y = -y$. Par définition, la courbe C' symétrique de la courbe C , dont l'équation sous forme entière est $f(x, y) = 0$, aura pour équation $f(x, -y) = 0$. On dira que la courbe C admet la symétrie (A, D), si C' et C sont algébriquement confondues.

On aura alors

$$f(x, y) \equiv kf(x, -y) \quad (k \text{ étant un nombre}).$$

Par le changement de y en $-y$, on tire de cette identité

$$f(x, -y) \equiv kf(x, y)$$

et, en multipliant membre à membre,

$$k^2 = 1;$$

d'où deux cas :

1° $k = 1$, l'équation entière est de la forme $\varphi(x, y^2) = 0$; c'est la symétrie proprement dite, considérée habituellement et que nous appellerons *symétrie de première espèce*.

2° $k = -1$, l'équation entière est de la forme $y\varphi(x, y^2) = 0$. La courbe se compose d'une courbe symétrique de première espèce et de l'axe de symétrie; *la symétrie est de seconde espèce*. Donnons un exemple, que nous retrouverons plus loin, des deux espèces de symétrie. Soient deux droites sécantes. Elles forment une courbe du second degré dont nous cherchons les diamètres rectilignes. A chaque direction de cordes, différente de celle des deux droites, correspond un diamètre (symétrie de première espèce). Si la direction de cordes est celle de l'une des droites, on trouve l'autre droite comme diamètre (symétrie de seconde espèce). Ces deux diamètres de seconde espèce ne se rencontrent pas, sous cette forme, dans la théorie habituelle des courbes du second degré; par contre, on les trouve comme diamètres singuliers de leur propre direction de cordes, notion que nous n'aurons pas, ici, à envisager.

Les paragraphes 2 à 6 traitent de cinq dispositions particulières de diamètres.

On démontrera par la suite que ces cinq dispositions sont, pour les courbes algébriques, les seules qui comprennent une infinité de diamètres.

3. En vertu de la projectivité du rapport anharmonique et de la définition de la symétrie à l'aide d'un rapport anharmonique, une transformation homographique $\mathfrak{C}$ du plan, telle que la droite de l'infini soit sa propre transformée, remplace une symétrie S par une symétrie Σ ; Σ est dite la transformée de S par $\mathfrak{C}$.

Nous nous servirons constamment d'un cas particulier de cette propriété : deux symétries $S_1 = (A_1, D_1)$, $S_2 = (A_2, D_2)$ entraînent une troisième $S_3 = (A_3, D_3)$. En effet, partant du point M de la figure, nous lui faisons correspondre M' dans la symétrie S_2 , puis M'' homologue de M' dans la symétrie S_1 , puis enfin M''' homologue de M'' dans la symétrie S_2 . La droite MM''' est parallèle à la direction fixe D_3 homologue de D_1 dans la symétrie S_2 et le milieu de MM''' est sur la droite fixe A_3 homologue de A_1 dans la symétrie S_2 . D'où la symétrie S_3 , dite transformée de S_1 par S_2 ; elle est obtenue en effectuant successivement les opérations S_2 , S_1 , S_2 , ce que l'on rappelle par la notation $S_3 = S_2 S_1 S_2$ ⁽¹⁾.

Nous considérons de même les symétries

$$S_4 = S_3 S_2 S_3, \quad S_5 = S_4 S_3 S_4, \quad \dots$$

Ces préliminaires posés, *supposons qu'une même direction de cordes D admette deux diamètres rectilignes A_1 et A_2 .*

Soit une parallèle à D qui coupe A_1 et A_2 en deux points distincts a_1 et a_2 . Des deux symétries $S_1 = (A_1, D)$, $S_2 = (A_2, D)$ résultent les symétries $S_3, S_4, S_5, \dots$; les diamètres $A_3, A_4, A_5, \dots$ passent par les points $a_3, a_4, a_5, \dots$ tels que a_3 soit le symétrique de a_1 par rapport à a_2 , a_4 le symétrique de a_2 par rapport à a_3 , ...

Done, la direction D admet une infinité de diamètres.

(1) La transformation Σ se note $\Sigma = \mathfrak{C}^{-1} S \mathfrak{C}$; ce qui exprime que si l'on prend l'homologue M' d'un point M dans la transformation inverse de $\mathfrak{C}$, puis l'homologue M'' de M' dans S , et enfin l'homologue M''' de M'' dans $\mathfrak{C}$, on obtient, en M''' , l'homologue de M dans la symétrie Σ .

Montrons maintenant qu'une courbe algébrique admettant cette infinité de symétries est formée de droites parallèles.

Soit M un point de la courbe C . Par M , menons la parallèle à D : supposons, pour préciser, que ce soit la droite $a_1 a_2 a_3, \dots$. Les symétries en nombre infini de M par rapport aux points $a_1, a_2, a_3, \dots$ sont tous sur C , et par suite cette parallèle fait partie de C . Donc C est formée de parallèles à D . D'où une première disposition des diamètres des courbes algébriques.

a. Une direction de cordes D admet un diamètre de position indéterminée. La courbe est formée de parallèles à D .

4. Supposons que deux directions de cordes D_1 et D_2 admettent deux diamètres parallèles Λ_1, Λ_2 , distincts.

Des deux symétries $S_1 = (\Lambda_1, D_1)$, $S_2 = (\Lambda_2, D_2)$ résultent les symétries $S_3 = (\Lambda_3, D_3)$, $S_4 = (\Lambda_4, D_4)$, ... dont les diamètres sont la droite Λ_3 symétrique vraie de Λ_1 par rapport à Λ_2 , la droite Λ_4 symétrique vraie de Λ_2 par rapport à Λ_3 , etc.

Il existe donc une infinité de diamètres parallèles.

Montrons maintenant qu'une courbe algébrique C admettant cette infinité de symétries est composée de paraboles se déduisant les unes des autres par des translations faites parallèlement à l'axe commun de ces paraboles.

En effet, à une translation près faite parallèlement à la direction des diamètres, il existe une parabole et une seule admettant les symétries S_1, S_2 , et par suite les symétries $S_3, S_4, \dots$ qui en résultent.

Soit M un point de la courbe C . Soit P celle des paraboles que nous venons de définir qui passe par M . Les homologues de M dans les symétries $S_1, S_2, S_3, \dots$, qui sont en nombre infini, sont à la fois sur les courbes C et P . Donc la parabole P fait partie de la courbe C . D'où une seconde disposition des diamètres d'une courbe algébrique.

b. A toute direction, sauf une, correspond un diamètre déterminé. Tous ces diamètres sont parallèles. Les courbes sont formées de paraboles déduites de l'une d'elles par des translations faites parallèlement à son axe.

5. *Supposons que deux directions de cordes D_1 et D_2 admettent le même diamètre Λ .*

Des deux symétries $S_1 = (\Lambda, D_1)$, $S_2 = (\Lambda, D_2)$ résultent les symétries $S_3, S_4, S_5, \dots$. Les homologues $M_1, M_2, M_3, \dots$, d'un point M , dans les symétries $S_1, S_2, S_3, \dots$ sont situés sur une même parallèle à Λ et l'on a

$$\overline{M_1 M_2} = \overline{M_2 M_3} = \overline{M_3 M_4} = \dots$$

Les symétries $S_1, S_2, S_3, \dots$ sont donc toutes différentes; d'où une infinité de symétries.

D'après ce qui précède, si une courbe algébrique C admet cette infinité de symétries, elle est formée de droites parallèles à Λ ; d'où une troisième disposition de diamètres d'une courbe algébrique.

c. *A toute direction correspond un diamètre. Tous ces diamètres sont confondus avec une même droite Λ , sauf le diamètre de la direction Λ , qui est indéterminé. Les courbes sont formées d'une famille de droites parallèles à Λ qui admet Λ pour axe de symétrie vraie.*

Remarque. — Pour chaque disposition comprenant un nombre infini de symétries, il y a lieu de se poser la question suivante : Est-il possible que des courbes algébriques admettant la disposition de symétries envisagée aient, en plus, d'autres symétries?

Le lecteur verra facilement qu'en se posant cette question pour les dispositions a et b, il trouvera seulement la disposition c.

Remarquons encore que si l'on avait deux symétries

$$S_1 = (\Lambda_1, D_1), \quad S_2 = (\Lambda_2, D_2)$$

telles que D_1 et Λ_2 soient parallèles, la symétrie $S_3 = (\Lambda_3, D_3)$ serait relative à une direction D_3 confondue avec D_1 ; deux cas se présentent : Ou D_2 et Λ_1 sont parallèles, et alors Λ_1 et Λ_3 sont confondus, S_1 et S_3 sont identiques; S_1 et S_2 sont dites deux symétries conjuguées et Λ_1 et Λ_2 deux diamètres conjugués. Ou D_2 et Λ_1 ne sont pas parallèles, et alors Λ_1 et Λ_3 sont différents; la direction D_1 admet deux diamètres, on est dans un cas déjà examiné.

6. Envisageons maintenant le cas de deux symétries

$$S_1 = (A_1, D_1), \quad S_2 = (A_2, D_2);$$

mais en écartant les cas précédemment étudiés, c'est-à-dire en supposant les quatre directions A_1, A_2, D_1, D_2 distinctes, ou en supposant confondues à la fois les directions A_1 et D_2 et les directions A_2 et D_1 .

Nous savons que ces symétries en entraînent d'autres et que les diamètres correspondants concourent au point de rencontre O des diamètres A_1 et A_2 . Il sera commode d'appeler *rosace* toute disposition de diamètres concourants obtenue à partir de S_1 et de S_2 comme il a été indiqué dans le paragraphe 1. Les expressions de *rosace finie*, de *rosace infinie* se comprennent aisément.

S'il n'existe aucune particularité entre les données A_1, A_2, D_1, D_2 , la rosace correspondante est infinie, cherchons la condition pour que la rosace soit finie.

Appelons a_1, a_2 les points à l'infini des diamètres A_1, A_2 ; d_1, d_2 les points à l'infini des directions D_1, D_2 .

Considérons l'involution définie par les deux couples a_1, d_1 ; a_2, d_2 . Par une homographie transformant en elle-même la droite de l'infini, on peut faire en sorte que les points doubles de cette involution deviennent les ombilics du plan.

D'après une remarque faite au paragraphe 1, les symétries S_1 et S_2 deviennent des symétries S'_1, S'_2 , qui sont des symétries vraies, car les couples a'_1, d'_1 ; a'_2, d'_2 transformés des couples a_1, d_1 ; a_2, d_2 correspondent cette fois à des directions rectangulaires. Soit V l'angle des deux axes A'_1, A'_2 qui correspondent aux diamètres A_1, A_2 . L'opération formée de la symétrie S'_1 suivie de la symétrie S'_2 est une rotation d'angle $2V$ autour du point commun aux axes A'_1, A'_2 . Il est clair maintenant que la rosace sera finie si V est de la forme $V = \frac{p\pi}{q}$ (p et q entiers) et que cette condition est nécessaire et suffisante. Elle revient à dire que

$$(a'_1, d'_1; a'_2, d'_2) = -\tan^2 V$$

est de la forme $-\tan^2 \frac{p\pi}{q}$ et, comme le rapport anharmonique

est projectif, cette condition s'exprime encore par l'égalité

$$(a_1, d_1; a_2, d_2) = -\tan^2 \frac{p\pi}{q};$$

p et q désignant des entiers quelconques.

7. Nous nous proposons maintenant de chercher les courbes algébriques admettant la disposition formée d'une rosace infinie. Soient deux symétries

$$S_1 = (A_1, D_1); \quad S_2 = (A_2, D_2)$$

engendrant une rosace infinie. Appelons O le point commun aux deux diamètres A_1 et A_2 . Il existe une famille de coniques, homothétiques et de même centre O , admettant A_1 et A_2 pour diamètres conjugués des cordes D_1, D_2 . Ces coniques admettent évidemment toutes les symétries $S_3, S_4, \dots$ de la rosace.

Soit une courbe algébrique C admettant cette rosace infinie de symétries. Soit M un de ses points. Les symétriques de M dans les symétries de la rosace sont des points en nombre infini qui sont communs à la courbe C et à la conique du faisceau considéré qui passe par le point M . La courbe C contient donc cette conique.

D'où une nouvelle disposition des diamètres des courbes algébriques.

d. Deux directions x, y , étant exceptées, à toute direction D correspond un diamètre A . Tous ces diamètres se coupent en O . Les directions A, D se correspondent dans une involution dont les rayons doubles sont parallèles à x et y .

Une courbe algébrique C admettant ces symétries se compose de coniques homothétiques et concentriques admettant Ox et Oy pour asymptotes.

Comme plus haut, il y a lieu, maintenant, de se poser cette question : Une courbe algébrique correspondant à la disposition *d* peut-elle admettre en plus d'autres diamètres? Un nouveau diamètre ne pourra être que parallèle à Ox ou à Oy , sinon on serait dans l'un des cas *b* ou *c* déjà examinés. Il ne peut correspondre qu'aux

directions de cordes Ox , Oy , sinon on serait dans les cas a ou c déjà examinés.

Le seul cas possible est donc celui de la direction Ox , par exemple, admettant un diamètre parallèle à Oy . D'ailleurs ce diamètre est Oy lui-même et non une autre droite y' simplement parallèle à Oy ; car, s'il en était ainsi, les symétries de notre rosace transformées par la symétrie de diamètre y' formeraient les symétries d'une nouvelle rosace. Donc, par chaque point M d'une courbe algébrique C , admettant ces deux rosaces, il passerait une courbe du second degré correspondant à la première rosace, qui ferait partie de C , puis une autre courbe du second degré faisant aussi partie de C et qui correspondrait à la seconde rosace, et cela est absurde puisque le point M est un point absolument quelconque de la courbe C . Par suite, c'est bien Oy qui sera le diamètre conjugué de la direction Ox . Les courbes du second degré qui forment une courbe algébrique C admettant ces symétries sont, si Ox et Oy sont réels, ce que l'on appelle ordinairement des hyperboles deux à deux conjuguées.

Il y a lieu de remarquer que Ox est aussi diamètre conjugué de la direction Oy .

Nous arrivons ainsi à la disposition e.

e. *Les diamètres sont les mêmes que dans la disposition d. De plus, Ox , Oy forment un couple de deux diamètres conjugués. Une courbe algébrique C admettant cette disposition est formée de couples de coniques conjuguées (au sens de « hyperboles conjuguées »).*

Elle peut admettre en plus le couple de droites Ox , Oy un certain nombre de fois. Le lecteur précisera facilement cet énoncé et celui relatif au cas c, comme il le faudrait si l'on voulait que toutes les symétries fussent de première espèce.

8. Nous allons maintenant rattacher la recherche des dispositions de diamètres à la théorie des groupes.

Dire qu'une figure admet A pour diamètre de la direction D revient à dire qu'elle est *invariante* par la transformation homographique $S = (A, D)$. Si une figure est invariante par les transformations $S_1 = (A_1, D_1)$, ..., $S_p = (A_p, D_p)$, elle sera également

invariante par toutes les transformations du groupe construit à l'aide des symétries $S_1, S_2, \dots, S_p$ prises comme transformations fondamentales.

Les symétries $S_1, S_2, \dots, S_p$ définiront en général un groupe G comprenant une infinité de transformations et une infinité de symétries. *Notre but est de déterminer les cas dans lesquels les symétries ainsi obtenues se réduisent aux seules symétries primitives $S_1, S_2, \dots, S_p$.*

Tout d'abord, montrons que *si les symétries $S_1, S_2, \dots, S_p$, en nombre fini, définissent un groupe ne contenant pas d'autres symétries, ce groupe est fini*, c'est-à-dire qu'il ne contient qu'un nombre fini de transformations. En effet, soit une des transformations du groupe, celle qui s'écrit $S_\alpha S_\beta S_\gamma \dots S_\lambda$ (cette notation indique les opérations dans l'ordre où elles s'effectuent). On peut, par exemple, faire passer S_α au second rang. En effet, on peut écrire la transformation $S_\alpha S_\beta S_\alpha S_\alpha S_\gamma \dots S_\lambda$ (on s'est borné à ajouter à deux places consécutives S_α , ce qui ne change rien). Ou encore

$$(S_\alpha S_\beta S_\alpha) S_\alpha S_\gamma \dots S_\lambda.$$

Or, $(S_\alpha S_\beta S_\alpha)$ est une de nos symétries, soit S_a . Il reste donc le symbole

$$S_a S_\alpha S_\gamma \dots S_\lambda$$

qui contient le même nombre de symétries et où S_α est à la seconde place.

De proche en proche, on voit que l'une quelconque des symétries de la transformation peut occuper une place quelconque. Si donc S_α se présente deux fois, on amènera ces deux symétries à être consécutives et l'on pourra les supprimer. On peut donc supposer $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ distincts. Notre groupe est, par suite, formé des transformations obtenues en effectuant au plus p symétries dans un ordre quelconque, chacune d'elles n'étant prise qu'une fois. Le nombre total de ces transformations est donc fini et nous nous trouvons ramené à *chercher les systèmes de symétries engendrant des groupes finis de transformations homographiques du plan.*

Après avoir, dans le prochain paragraphe, rappelé quelques

propositions relatives à la représentation des imaginaires, nous montrerons que notre problème dépend seulement de la théorie des groupes finis des rotations réelles de l'espace, c'est-à-dire de la théorie des polyèdres réguliers.

9. Considérons le plan (p) dont l'équation, par rapport à des axes rectangulaires ωXYZ , est $Z=1$, et soit O le point $X=Y=0, Z=1$. A un nombre complexe $m=x+iy$, faisons correspondre le point (m) de coordonnées $X=x, Y=y, Z=1$. Et, du point ω , projetons stéréographiquement en μ le point (m) sur la sphère π de diamètre $O\omega$. Les coordonnées X, Y, Z de μ satisfont aux formules

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = x^2 + y^2 + 1,$$

qui, en convenant d'une façon générale que u et u' désigneront deux imaginaires conjuguées, et en introduisant, les coordonnées isotropes $m=x+iy, M=X+iY$ s'écrivent

$$(1) \quad m = \frac{M}{Z}, \quad m' = \frac{M'}{Z}, \quad \frac{1}{Z} = mm' + 1.$$

Effectuons sur m la transformation homographique t

$$(2) \quad m_1 = \frac{am + b}{cm + d} = f(m),$$

qui peut être aussi bien définie par la relation

$$(3) \quad m'_1 = \frac{a'm' + b'}{c'm' + d'} = f'(m');$$

il en résulte pour π une transformation *réelle* θ faisant passer de μ au point μ_1 donné par les formules

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{Z_1} &= \frac{am + b}{cm + d}, & \frac{M'_1}{Z_1} &= \frac{a'm' + b'}{c'm' + d'}, \\ \frac{1}{Z_1} &= m_1 m'_1 + 1 = \frac{am + b}{cm + d} \frac{a'm' + b'}{c'm' + d'} + 1. \end{aligned}$$

qu'on peut encore écrire

$$(4) \quad \frac{M_1}{(am+b)(c'm'+d')} = \frac{M'_1}{(a'm'+b')(cm+d)} = \frac{Z_1}{(cm+d)(c'm'+d')} \\ = \frac{1}{(am+b)(a'm'+b')+(cm+d)(c'm'+d')}.$$

Or, quand on tient compte des formules (1), on a, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des nombres réels quelconques,

$$(5) \quad \alpha mm' - \beta m + \gamma m' + \delta = \frac{\alpha(1-Z) + \beta M + \gamma M' + \delta Z}{Z};$$

et les dénominateurs des formules (4) peuvent être remplacés par des fonctions linéaires de M, M', Z . Donc *la transformation η est une transformation homographique réelle qui change en elle-même la sphère π* ; il faut ajouter qu'elle ne modifie pas l'orientation de π , c'est-à-dire qu'elle transforme les génératrices de π , appartenant à l'un des systèmes, en génératrices du même système. En effet, les génératrices de π sont données respectivement par

$$\frac{M}{Z} = \text{const.} \quad \text{et} \quad \frac{M'}{Z} = \text{const.},$$

et les formules (2) et (3) s'écrivent

$$\frac{M_1}{Z_1} = f\left(\frac{M}{Z}\right) \quad \text{et} \quad \frac{M'_1}{Z_1} = f'\left(\frac{M'}{Z}\right).$$

Réciproquement, toute transformation homographique réelle η , transformant π en elle-même sans changer son orientation, définit une transformation t , car η définit alors deux transformations homographiques entre les génératrices de même système

$$\frac{M_1}{Z_1} = \varphi\left(\frac{M}{Z}\right), \quad \frac{M'_1}{Z_1} = \psi\left(\frac{M'}{Z}\right),$$

et φ et ψ sont imaginaires conjuguées puisque η est réelle.

Parmi les transformations η se trouvent donc les rotations de 180° autour des diamètres de π , transformations que nous appellerons, avec Darboux, des renversements. *Que doit-être t pour que η soit un tel renversement?* Un renversement est une transformation réciproque laissant invariantes les deux extrémités

de l'axe de renversement, donc t doit être une involution dont les deux points doubles a et d ont pour image sur la sphère π deux points z et δ diamétralement opposés. Avant de démontrer la réciproque, nous prouverons que la condition nécessaire et suffisante pour que le rapport anharmonique de quatre valeurs de m soit réel est que les quatre points correspondants sur la sphère π soient dans un même plan. En effet, dire que le rapport anharmonique de quatre valeurs de m est réel, c'est dire que ce rapport égale celui des quatre nombres m' correspondants et par suite que les quatre couples m, m' sont liés par une relation à coefficients réels de la forme

$$\alpha mm' + \beta m + \gamma m' + \delta = 0.$$

Or, d'après (5), une telle relation exprime que les quatre points z correspondants sont dans un même plan. Remarquons de plus que, d'après la première formule (1), le rapport anharmonique de quatre valeurs de m est le rapport anharmonique des quatre génératrices du premier système passant par les quatre points μ ; quand ces quatre points sont dans un même plan, le rapport des quatre valeurs de m est donc le rapport des points μ sur la circonférence π qui les contient.

Revenons maintenant au cas où t est une involution dont les points doubles a et d ont pour images, sur π , z et δ . Deux points μ et μ_1 se correspondant dans la transformation θ , image de t , sont sur une circonférence λ de π passant par z et δ , et le rapport anharmonique sur λ des points $z, \delta; \mu, \mu_1$ est égal à -1 ; donc μ, μ_1 passe par le pôle de $z\delta$ par rapport à λ . Si donc z et δ sont diamétralement opposés, θ est bien un renversement.

Si l'on pose $m = \rho e^{i\eta}$, et si l'on appelle C le centre de π , on voit que η est la longitude de μ , comptée à partir de $Z\omega X$ et que ρ est la tangente de la moitié de la colatitude $OC\mu$. Par suite, pour que z et δ soient diamétralement opposés, il faut que a et d aient des modules inverses et des arguments dont la différence égale π , ce qui s'écrit : $ad' = a'd = -1$. Dans le cas où a et d sont réels, on devra avoir $ad = -1$.

10. Considérons, dans un plan P , des symétries $S = (A, D)$, elles engendrent un groupe G d'homographies T ; nous voulons

que G soit fini. Effectuons sur P une transformation homographique $\tilde{e}$ transformant en elle-même la droite de l'infini p de P . $\tilde{e}$ transforme chaque symétrie S en une symétrie S' , chaque homographie T en une homographie T' . Les S' engendrent le groupe G' formé par les T' . Si G est fini, G' l'est également; donc si les S répondent à la question, il en est de même des S' . Ainsi, de chaque solution particulière de notre problème, nous déduisons une famille de solutions dépendant des six paramètres qui entrent dans la transformation $\tilde{e}$ la plus générale; nous ne considérons pas ces solutions comme différentes et nous ne distinguerons pas G' et G . Au reste, si l'on rapporte les S à un système quelconque de coordonnées cartésiennes, les S' seront définies exactement par les mêmes équations si on les rapporte à un système convenable, réel ou imaginaire, de coordonnées cartésiennes, puisqu'on passe des S aux S' par les formules du changement de coordonnées cartésiennes.

Les homographies T transforment toutes p en elle-même; chacune d'elle définit donc sur p une homographie. Ces homographies t forment un groupe g qui admet pour transformations fondamentales les homographies spéciales s correspondant aux S ; ces homographies s sont évidemment des involutions dont les points doubles sont les points à l'infini a et d de A et D .

Définissons un point de p par la valeur m de la pente des droites de P passant par ce point, et faisons l'image de p sur π comme il a été dit au paragraphe précédent. Les s , les t , g ont des images σ , θ , γ . Si G est fini, γ l'est aussi. Or nous allons montrer que, à condition d'avoir effectué au préalable une homographie $\tilde{e}$ convenable, si G est fini, le groupe γ est formé de rotations autour de diamètres de la sphère π .

Ceci sera prouvé si l'on montre que toutes les transformations σ sont des renversements. Montrons d'abord que toutes les droites $x\delta$ conçoivent.

Si G est fini, deux des symétries S qui ne sont pas conjuguées, $S_i = (A_i, D_i)$, $S_j = (A_j, D_j)$ par exemple, fournissent quatre nombres $a_i, d_i; a_j, d_j$, tous différents et tels que le rapport anharmonique $(a_i, d_i; a_j, d_j)$ soit réel (§ 6). Donc $\alpha_i, \delta_i; \alpha_j, \delta_j$ sont dans un même plan. Les droites $x\delta$, se rencontrant par suite deux à deux, passent par un même point, ou sont toutes

dans un même plan. Montrons que, même dans cette seconde hypothèse, ces droites sont concourantes.

Tous les α et δ étant dans un même plan, une transformation $\tilde{c}$ convenable rend réelles toutes les symétries S ; on peut de plus supposer (§ 6), que deux d'entre elles sont vraies. Chaque rapport $(a_i, d_i; a_j, d_j)$ est de la forme $-\tan^2 \frac{p\pi}{q}$. En supposant $\frac{p}{q}$ irréductible, je choisis i et j de façon que q ait la plus grande valeur possible q' ; cela est possible, puisque G est fini, et cela suppose seulement, en réalité, que l'on sache que deux quelconques des symétries S engendrent une rosace d'au plus N symétries, N étant un nombre fixe. Je suppose $\tilde{c}$ choisi de façon que S_i et S_j soient vraies. Elles engendrent alors une rosace de q' symétries vraies. Je dis que G ne contient pas d'autres symétries. Supposons, en effet, qu'il en admette une. Soient Oa' et Od' les directions du diamètre et des cordes de cette symétrie menées par un point O du plan. Oa' sera compris entre les parallèles Oa'_i, Oa'_{i+1} aux axes de deux symétries vraies consécutives appartenant à la rosace.

Le rapport anharmonique $(a', d'; a'_i, d'_i)$ est négatif; donc si l'on suppose, comme c'est possible, Od' à l'extérieur de l'angle droit $a'_i Od'_i$, Oa' sera à son intérieur. De même le rapport anharmonique $(a', d'; a'_{i+1}, d'_{i+1})$ est négatif. Aussi pourra-t-on supposer Oa' à l'extérieur de l'angle droit $a'_{i+1} Od'_{i+1}$ et Od' à l'intérieur. Finalement, on pourra choisir, sur les directions des cordes et des diamètres, des demi-droites qui, dans le plan orienté, se rencontreront dans l'ordre suivant : $a'_i, a', a'_{i+1}, d'_i, d', d'_{i+1}$, et, par suite, le rapport anharmonique $(a'_i, d'_i; a', d')$ est, en valeur absolue, le produit des tangentes des deux angles $a'_i Oa', d'_i Od'$ qui sont plus petits que $\frac{\pi}{q'}$. Il sera donc, en valeur absolue, plus petit que $\tan^2 \frac{\pi}{q}$. Or, il est de la forme

$$-\tan^2 \frac{p_1 \pi}{q_1} \left(\frac{p_1}{q_1} \text{ irréductible} \right).$$

Donc

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{1}{q'},$$

ce qui exige que q_i soit supérieur à q' . Nous arrivons ainsi à une contradiction.

Ayant ainsi établi que les droites $\alpha\delta$ concourent toujours, supposons que nous ayons effectué, au préalable, une transformation $\tilde{c}$ telle que deux symétries non conjuguées prises parmi les S soient remplacées par des symétries réelles et vraies. Ce choix de $\tilde{c}$ est bien possible puisque, quelles que soient S_i et S_j , pourvu qu'elles ne soient pas conjuguées, les quatre points $\alpha_i, \delta_i; \alpha_j, \delta_j$ sont différents et dans un même plan. Si $\tilde{c}$ a rendu les deux symétries S_i et S_j orthogonales et réelles, les quatre nombres $a_i, d_i; a_j, d_j$ sont réels et tels que l'on ait : $a_i d_i = -1, a_j d_j = -1$.

Donc σ_i et σ_j sont des renversements, et toutes les droites $\alpha\delta$ concourent au centre C de la sphère π . Le groupe γ est un groupe de rotations.

Énonçons exactement les résultats obtenus : *A condition d'effectuer au préalable une homographie $\tilde{c}$ convenable, le groupe γ , correspondant à un groupe G construit à partir de symétries S , en nombre fini ou non, pour transformations fondamentales, est constitué uniquement de rotations; pourvu que chaque couple*

$$S_i = (A_i, D_i), \quad S_j = (A_j, D_j)$$

de symétries S satisfasse aux conditions suivantes :

1° *Ou bien S_i et S_j sont conjuguées ou les quatre directions A_i, D_i, A_j, D_j sont différentes;*

2° *La rosace construite à partir de S_i, S_j contient au plus N symétries, N étant un nombre fixe indépendant de i et j .*

Cet énoncé ne suppose pas que les symétries S soient toutes les symétries de G ; nous allons prouver que : *si, de plus, les symétries S sont toutes les symétries du groupe G , ce groupe est fini.*

Considérons une rosace de symétries appartenant à G , appelons-les

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3 = S_2 S_1 S_2, \quad S_4 = S_3 S_2 S_3, \quad \dots$$

A ces symétries correspondent dans γ des renversements, qui sont

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2, \quad \sigma_4 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3, \quad \dots$$

et, puisque A_3 et D_3 sont respectivement les homologues, dans S_2 , de A_1 et D_1 , α_3 et β_3 sont les symétriques de α_1 et β_1 par rapport à α_2, β_2 . Donc les renversements de γ qui correspondent à des symétries de S , renversements que nous appellerons *les renversements utiles*, se groupent en rosaces comme les symétries S . Mais les rosaces de S contiennent chacune au plus N symétries, donc les rosaces de renversements utiles contiennent au plus N renversements et les axes de ces renversements font entre eux des angles aigus au moins égaux à $\frac{\pi}{N}$. Par suite, les renversements utiles sont en nombre fini, et comme à un renversement utile correspondent au plus deux symétries de G , d'après la condition 1°, G ne contient qu'un nombre fini de symétries. Donc (§ 8), G est fini.

11. Cette proposition nous permet de légitimer une affirmation antérieure : *les seules dispositions de diamètres en nombre infini que puisse admettre une courbe algébrique sont celles des cas a, b, c, d, e*. En effet, si G n'est pas fini, c'est que l'ensemble des symétries S de G ne vérifie pas l'une ou l'autre des deux conditions de l'énoncé précédent. Si la condition 1° n'est pas satisfaite, c'est que l'on a affaire, nous l'avons vu, aux cas **a**, **b** ou **c**. Si c'est la condition 2°, c'est qu'il est possible de trouver une rosace de symétries S contenant plus de $2m$ symétries, m étant le degré de la courbe algébrique Γ considérée. Or, si A est un point quelconque de Γ , la conique admettant cette rosace de symétries et passant par A aura en commun avec Γ le point A et ses homologues, soit plus de $2m$ points; donc cette conique fait partie de Γ , et l'on est dans l'un des cas **d** ou **e**.

De là résulte aussi que *les seules courbes algébriques indécomposables qui aient une infinité de diamètres sont des coniques* ⁽¹⁾.

12. Revenons maintenant au cas où G est fini. Nous pouvons alors supposer que γ est un groupe de rotations; de plus, γ est fini. Or on connaît les groupes finis de rotations; ils sont constitués par les rotations transformant en lui-même un polygone régulier ou un polyèdre régulier.

(1) Si l'on veut être tout à fait rigoureux, il faut dire : les droites et les coniques.

Soit choisi l'un de ces groupes; nous pouvons l'orienter autour du point C, centre de π , de bien des façons. Considérons-le dans deux de ses positions γ et γ' . On peut toujours passer du groupe γ au groupe γ' par une transformation θ , homographique, réelle, ne changeant pas l'orientation de la sphère π , et l'on peut trouver une homographie $\mathfrak{E}$ transformant en elle-même la droite de l'infini p de P à laquelle θ correspond. Or si à γ correspond un groupe de symétries G, à γ' correspondra le groupe G' transformé de G par $\mathfrak{E}$. Et comme nous considérons G et G' comme identiques, il n'y a pas lieu de distinguer entre les deux groupes γ et γ' .

Donc nous orientons le groupe choisi d'une façon particulière, arbitraire, autour de C. Il faut ensuite choisir les axes des renversements utiles. Une première condition nous guidera dans ce choix : les renversements utiles doivent suffire à engendrer γ , puisque les symétries S suffisent à engendrer G.

Pour énoncer une seconde condition, convenons de dire que deux points ou deux diamètres de π sont *congruents*, si l'on peut passer de l'un à l'autre par une rotation de γ , c'est-à-dire par une suite de renversements utiles.

En étudiant, au paragraphe précédent, la relation entre les trois renversements σ_1 , σ_2 , σ_3 nous avons vu que les symétriques, dans un renversement utile, d'un axe de renversement utile et d'un point z sont un axe utile et un point z . Ceci nous conduit à partager les axes de renversements de γ en familles d'axes congruents; les axes utiles seront tous ceux d'une de ces familles ou de plusieurs de ces familles. Nous partagerons ensuite les extrémités des axes utiles en familles d'extrémités congruentes. Les points z seront tous les points d'une de ces familles ou de plusieurs d'entre elles; avec cette condition que chaque axe utile doit contenir au moins un point z .

Les points z étant choisis, les points $\bar{z}$, qui sont diamétralement opposés aux z , sont aussi choisis. Donc on connaît les directions dans P des cordes D et des diamètres A. Reste à placer les diamètres A; on y arrivera de suite, pour chaque groupe γ , en utilisant ce fait que les symétries S et les renversements utiles σ se groupent en rosaces correspondantes. Et cela nous conduira à un résultat général que je formule dès maintenant : *Dans toute dis-*

position de diamètres en nombre fini, ces diamètres sont concourants.

Nous allons maintenant appliquer cette méthode aux différents groupes finis de rotations.

13. Groupes diédraux. — Ce sont les groupes de rotations qui laissent invariant, sur la sphère π , un polygone régulier. Le seul cas intéressant ici est celui d'un polygone inscrit dans un grand cercle de π . Pour le cas où le polygone ne comprendrait qu'un sommet qui sera un seul point du cercle ou seulement deux sommets qui seront diamétralement opposés, il faut ajouter que les rotations doivent transformer le grand cercle en lui-même; soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ les sommets du polygone régulier considéré, soit C le centre de la sphère. Le groupe des rotations comprendra les renversements autour de $CA_1, CA_2, \dots, CA_n$, puis les renversements dont les axes sont les rayons perpendiculaires aux milieux de $A_1A_2, A_2A_3, \dots$ et enfin les rotations autour du diamètre $C\xi$ perpendiculaire au plan du polygone. Ces rotations ne comprennent un renversement que si n est pair; on l'appelle *le renversement axial*. Les renversements dont les axes sont dans le plan du polygone sont appelés *renversements diédraux*. Si n est impair, les renversements diédraux des deux espèces sont confondus, il y en a n ; chacun d'eux contient un sommet et un seul; il n'y a pas de renversement axial. Si n est pair, il y a n axes de renversements diédraux; $\frac{n}{2}$ d'entre eux contiennent deux sommets; les $\frac{n}{2}$ autres n'en contiennent pas; le renversement axial existe.

Envisageons successivement ces deux cas :

n impair. — Nécessairement, l'un des n axes de renversement est utile. Or, on passe des uns aux autres par des rotations du groupe autour de $C\xi$; donc il sont congruents et par suite tous utiles.

Les n extrémités sommets sont congruentes; les n autres extrémités le sont aussi; les n premières seront utiles en étant toutes des points z ou toutes des points $\bar{z}$; de même pour les n autres. Évidemment, il n'y a pas lieu de distinguer entre les deux espèces d'extrémités; passer des uns aux autres revient à remplacer le

polygone par son symétrique par rapport à C , ce qui donne le même groupe γ . Donc, le cas de n impair donne seulement deux dispositions de points z .

1° *Les extrémités sommets sont seules des points z ; les n autres sont seules des points δ . Il y correspond dans le plan P une rosace de n diamètres, puisque les axes de renversements utiles forment une rosace.*

2° *Les extrémités sommets sont à la fois des points z et des points δ ; de même pour les n autres. Chaque axe de renversement donne un système de deux diamètres conjugués. Il y correspond $2n$ symétries du plan P , deux à deux conjuguées, formant une rosace.*

Dans les deux cas, si l'on suppose que les renversements correspondent à des symétries réelles, ce sont des symétries vraies formant des rosaces régulières.

n pair. — Les $\frac{n}{2}$ axes de renversement diédraux, contenant chacun deux sommets, sont congruents entre eux; de même pour les $\frac{n}{2}$ autres, ainsi que le montrent les rotations autour de CZ . Nous avons donc ici deux sortes d'axes de renversements diédraux à considérer: ils ne sont pas essentiellement différents; on passe des uns aux autres en faisant tourner le polygone primitif de l'angle $\frac{\pi}{n}$ autour de CZ , ce qui ne change pas γ . Le renversement axial ne suffisant évidemment pas pour engendrer le groupe γ , nécessairement il y a un renversement diédral utile. Nous pouvons supposer que c'est un axe contenant deux sommets. Toutes les extrémités des $\frac{n}{2}$ axes analogues sont congruentes. Donc ce sont toutes des points z .

A priori, deux cas sont possibles : ou bien, les extrémités qui ne sont pas sommets (et qui sont congruentes) ne sont pas des points z , ou elles sont toutes des points z .

Elles pourront ne pas être des points z si l'on peut engendrer γ sans utiliser les renversements correspondants. Dans quel cas ceci peut-il se produire?

Considérons le groupe γ' admettant les $\frac{n}{2}$ axes de renversement

utiles contenant les sommets et qui serait défini par la considération du polygone de $\frac{n}{2}$ côtés obtenu en joignant les sommets de deux à deux.

Peut-on engendrer γ en partant de γ' et du renversement axial? si $\frac{n}{2}$ est pair, le renversement axial fait partie de γ' et nous ne parviendrons pas au résultat demandé. Si $\frac{n}{2}$ est impair, le renversement axial ne fait pas partie de γ' . Ajoutons-le à γ' , on engendrera γ . (Remarquer en effet qu'en effectuant l'opération formée d'un renversement diédral de γ' suivi du renversement axial, on obtient un des $\frac{n}{2}$ renversements diédraux n'appartenant pas à γ' .)

En résumé, nous avons une rosace de renversements utiles en nombre n ou $\frac{n}{2}$. Chaque extrémité de chaque renversement utile est un point z . Donc chaque renversement correspond à deux diamètres conjugués. En plus, il se peut que le renversement axial soit utile: s'il en est ainsi, il correspond à deux diamètres conjugués, car ses extrémités sont congruentes par tout renversement diédral.

A la rosace de renversements diédraux correspond une rosace de n ou de $2n$ diamètres, deux à deux conjugués.

Si le renversement axial est utile, son axe forme avec l'axe d'un renversement diédral utile une rosace à laquelle correspond une rosace de quatre diamètres deux à deux conjugués. Deux de ces diamètres appartiennent à la rosace de diamètres d'origine diédrale. Donc les diamètres provenant du renversement axial passent aussi par le centre de cette rosace. Si, en particulier, le polygone est celui qui correspond aux symétries réelles, la rosace d'origine diédrale est formée de symétries vraies. Les extrémités de l'axe du renversement axial correspondent aux pentes $\pm i$ pour les diamètres correspondants. Donc ces nouveaux diamètres conjugués sont les droites isotropes.

Finalement, l'étude des groupes diédraux nous a conduit à deux dispositions de diamètres en nombre fini.

1. Une rosace de p diamètres concourants. Si p est impair, il n'existe pas de diamètres conjugués. Si p est pair, les diamètres sont deux à deux conjugués.

11. *Une rosace de p couples de diamètres conjugués concourants et, en plus, un couple de diamètres conjugués divisant harmoniquement tous les couples de la rosace.*

Si l'on fait croître p indéfiniment, on retrouve les dispositions d et e.

14. *Groupe du tétraèdre.* — Le groupe du tétraèdre régulier se compose des rotations $\frac{2k\pi}{3}$ (k entier) autour des hauteurs et des renversements autour des perpendiculaires communes aux couples d'arêtes opposées. Donc, le groupe ne comprend que trois renversements autour de trois droites formant un trièdre trirectangle. Ces trois renversements, pris comme opérations fondamentales, n'engendrent pas le groupe du tétraèdre, mais seulement le groupe diédral correspondant à un polygone à deux sommets inscrit dans un cercle donné. Il ne correspondra donc, au groupe du tétraèdre, aucune disposition de diamètres.

15. *Groupe de l'hexaèdre et de l'octaèdre.* — Il comprend :

1° Des rotations $\frac{2k\pi}{4}$ autour des trois axes quaternaires perpendiculaires aux faces du cube; ces axes quaternaires sont des axes de renversement;

2° Des rotations $\frac{2k\pi}{3}$ autour de quatre axes ternaires qui sont les diagonales du cube;

3° Des renversements autour de six axes binaires qui joignent les milieux des arêtes opposées du cube.

Deux axes de même espèce sont congruents; deux extrémités quelconques de deux axes de même espèce sont congruentes.

Les renversements autour des trois axes quaternaires ne suffisent pas à engendrer le groupe.

Les renversements autour des six axes binaires suffisent au contraire à engendrer le groupe.

Il résulte de là que nécessairement un axe binaire sera utile et que, par suite, ils le seront tous; et aussi que, si l'un des axes quaternaires est utile, ils le sont tous. Il en résulte enfin que toutes les extrémités des axes utiles sont des points α .

Les axes binaires donneront donc toujours 12 symétries deux à deux conjuguées.

Les axes quaternaires pourront donner 6 symétries deux à deux conjuguées.

Les six premiers couples de diamètres conjugués s'associent deux à deux pour former trois rosaces de 4 diamètres et trois à trois pour former quatre rosaces de 6 diamètres. Chaque couple appartient à une rosace de 4 diamètres et à deux rosaces de 6 diamètres.

Les trois autres couples de diamètres conjugués, s'ils existent, s'associent deux à deux et se joignent aux trois rosaces de 4 diamètres que nous venons de rencontrer pour former des rosaces de 8 diamètres. Chacun de ces trois nouveaux couples appartient à deux rosaces de 8 diamètres.

Il est clair, par suite, que tous ces diamètres sont concourants.

En résumé, le groupe de l'hexaèdre et de l'octaèdre nous fournit deux dispositions de diamètres.

III. *Six couples de diamètres conjugués concourants formant trois rosaces de 4 diamètres et quatre rosaces de 6 diamètres.*

IV. *Les diamètres de la disposition III et en plus trois couples de diamètres conjugués concourants avec les premiers et remplaçant les trois rosaces de 4 diamètres par trois rosaces de 8 diamètres.*

16. *Groupe du dodécaèdre et de l'icosaèdre.* — L'icosaèdre a 12 sommets, 20 faces, 30 arêtes. Le groupe des rotations comprend :

1° Des rotations $\frac{2k\pi}{5}$ autour de 6 axes d'ordre 5 passant par les couples de sommets opposés de l'icosaèdre ;

2° Des rotations $\frac{2k\pi}{3}$ autour de 10 axes ternaires perpendiculaires à deux faces opposées ;

3° Des renversements autour de 15 axes binaires obtenus en joignant les milieux de deux arêtes opposées.

Comme il existe une rotation du groupe transformant une arête

dirigée quelconque en une arête dirigée quelconque, toutes les extrémités des axes binaires sont des points z .

A chaque axe binaire correspondent deux diamètres conjugués.

Nous arrivons ainsi à la disposition V: 15 couples de diamètres conjugués qui s'associent pour former six rosaces de 10 diamètres, dix rosaces de 6 diamètres, quinze rosaces de 4 diamètres. Un couple quelconque appartient à deux rosaces de chaque espèce.

17. Nous avons trouvé les cinq dispositions possibles de diamètres en nombre fini.

Notre but est maintenant de chercher l'équation générale des courbes algébriques admettant chacune de ces dispositions.

L'origine des coordonnées est prise au point de rencontre des diamètres et les axes sont choisis dans une position simple par rapport aux diamètres. Il suffit de se borner à la considération des symétries de première espèce, car si, dans cette hypothèse, nous trouvons pour la courbe la plus générale l'équation $f=0$ et si $\varphi=0$ est l'équation d'un système de diamètres homologues par les symétries de G , $f\varphi=0$ sera l'équation d'une courbe admettant les diamètres de $\varphi=0$ pour diamètres de première espèce et les autres diamètres, s'il en existe, pour diamètres de seconde espèce (§ 2).

Supposons que, par un procédé quelconque, on ait trouvé deux formes $f_q(x, y)$, $f_r(x, y)$ de degrés q et r qui se reproduisent identiquement quand on effectue sur x, y les substitutions homogènes correspondant aux transformations homographiques du groupe G , pour la disposition D de diamètres envisagée. Si P est un polynôme à deux variables, $P(f_q, f_r)=0$ est une courbe admettant les symétries de la disposition D . Soit x_0, y_0 un point quelconque du plan. Les équations

$$\begin{aligned} f_q(x, y) &= f_q(x_0, y_0), \\ f_r(x, y) &= f_r(x_0, y_0) \end{aligned}$$

définissent qr points x, y à distance finie si, comme nous le supposons, f_q et f_r n'ont pas de facteur linéaire commun. Tous les homologues de x_0, y_0 dans le groupe G , dont nous supposons l'ordre égal à G_0 , font partie de ces qr points, et ces qr points se

partagent en un certain nombre de systèmes; chaque système comprenant un groupe de points homologues en nombre G_0 . Donc qr est multiple de G_0 ; $qr = mG_0$. Supposons qu'on ait pu trouver q et r assez petits pour que $qr = G_0$; dans ces conditions, $P(f_q, f_r) = 0$ représentera l'équation générale des courbes algébriques cherchées.

En effet, soit $F(x, y) = 0$ l'équation d'une quelconque de ces courbes algébriques admettant les symétries de la disposition D comme symétries de première espèce. Résolvons les équations

$$\begin{aligned} f_q(x, y) &= f_q, \\ f_r(x, y) &= f_r, \end{aligned}$$

en x et y et portons dans F , nous aurons

$$F(x, y) \equiv \Phi(f_q, f_r).$$

Mais la fonction Φ de deux variables est une fonction algébrique qui n'est jamais infinie pour des valeurs finies de f_q et de f_r et qui est à détermination unique, car, se donner f_q et f_r , c'est se donner un système unique de points homologues pour lesquels Φ reprend la même valeur. Φ est donc un polynôme.

Nous sommes ainsi amenés à chercher f_q et f_r de degrés aussi petits que possible.

Soit la symétrie de diamètre Ox ; Oy étant la direction des cordes. La substitution correspondante est $x' = x$, $y' = -y$. Les formes x et y^2 sont invariantes. La forme x correspond au point à l'infini d de la direction de cordes; la forme y^2 au point à l'infini a du diamètre pris deux fois.

La forme la plus générale invariante par cette symétrie est

$$\varphi(x, y^2) = x^k y^{2k'} (ax^2 + by^2)(a'x^2 + b'y^2)(\dots),$$

car si φ contient un facteur du premier degré $\lambda x + \mu y$ pour lequel le produit $\lambda\mu$ est différent de zéro, φ devra aussi contenir la forme homologue $\lambda x - \mu y$, donc le produit

$$(\lambda x + \mu y)(\lambda x - \mu y) = \lambda^2 x^2 - \mu^2 y^2.$$

D'après cela, une forme invariante par toutes les symétries d'un groupe G sera le produit de formes élémentaires, chacune d'elles correspondant à un point de la droite de l'infini et à tous

ses homologues; avec cette exception que si le point choisi est le point à l'infini a d'un diamètre, la forme devra contenir deux fois a et par suite deux fois ses homologues. Nous savons donc écrire les formes invariantes.

Pour chercher celles de plus petit degré, il sera commode, au lieu de raisonner sur le groupe G , de raisonner sur le groupe γ de la sphère π . Soit un point μ de la sphère. La forme qui correspond à ce point et à ses homologues a un degré en général égal à l'ordre γ_0 du groupe γ , c'est-à-dire à l'ordre g_0 du groupe g . S'il arrive que k opérations du groupe γ , et k seulement, laissent le point μ invariant, c'est-à-dire si le point μ est extrémité d'un axe de rotation d'ordre k , il en sera de même pour chacun des congruents de μ . μ n'aura plus que $\frac{\gamma_0}{k} - 1$ congruents et la forme ne sera plus que de degré $\frac{\gamma_0}{k}$.

En pratique, quand nous aurons choisi au mieux q et r grâce à ces considérations, nous arriverons à $qr = G_0$, ce que nous vérifierons à l'aide des remarques suivantes :

- 1° $g_0 = \gamma_0$ est une limite inférieure de G_0 , dans tous les cas.
- 2° Si les symétries du groupe G sont deux à deux conjuguées, on peut affirmer que $2g_0 = 2\gamma_0$ est une limite inférieure de G_0 .

En effet, l'ensemble de quatre points homologues à distance finie obtenus par deux symétries conjuguées se réduit à deux points s'il s'agit de points à l'infini.

- 3° Si les axes des renversements du groupe γ s'associent trois par trois pour former des trièdres trirectangle conduisant à des symétries deux à deux conjuguées, on peut affirmer que $4g_0 = 4\gamma_0$ est une limite inférieure de G_0 .

En effet, supposons, comme c'est possible, que trois axes de renversement formant un trièdre trirectangle correspondent aux pentes $0, \infty; +1, -1; +i, -i$; les deux premières donnent deux symétries conjuguées vraies par rapport aux axes de coordonnées; les deux suivantes, deux symétries vraies par rapport aux bissectrices de ces axes; les deux dernières deux symétries conjuguées par rapport aux droites isotropes passant par l'origine; il est facile de voir que les substitutions qui correspondent à l'une

de ces deux dernières symétries sont $x = -iy'$, $y = ix'$, c'est-à-dire qu'on passe de M à M' par une rotation de 90° autour du centre O qui transforme M en M_1 , puis par une homothétie de centre O et de rapport i qui transforme M_1 en M' . Mais la rotation de 90° autour de O s'obtient aussi en composant une symétrie par rapport à un axe de coordonnées avec une symétrie par rapport à une bissectrice, puisque ces deux axes de symétrie font un angle de 45° . Donc si l'on prend un système de seize points homologues dans les six symétries considérées, il est constitué par quatre systèmes de quatre points en ligne droite avec O analogue au système formé par M_1 , M' et leurs symétriques par rapport à O . Pour un point à l'infini, il n'y a plus que quatre homologues au lieu de seize; $4g_0$ est bien une limite inférieure de G_0 .

18. *Disposition I.* — Il existe une rosace de p diamètres concourants. Si p est impair, il n'existe pas de diamètres conjugués; si p est pair, ils sont deux à deux conjugués.

Nous supposons que les renversements diédraux correspondent à des symétries réelles, donc vraies. Nous supposons aussi que l'un des axes de renversement donne les coefficients angulaires $0, \infty$, le premier de ces nombres correspondant au point a de la symétrie. Ox sera donc axe de symétrie. Sur la sphère, tous les points z ont pour colatitudes $0, \frac{2\pi}{p}, \frac{4\pi}{p}, \dots$. Prenons comme formes invariantes : 1° celle qui correspond aux extrémités du diamètre de la sphère perpendiculaire au plan du polygone. Ces extrémités ne sont pas des points z ; la forme sera $f_q = \sqrt{2} = x^2 + y^2$; 2° celle qui correspond aux points de la sphère qui, dans le plan du polygone, ont pour colatitudes $\frac{\pi}{p}, \frac{3\pi}{p}, \dots$. Ces points sont milieux de points z et ne sont jamais des points z . Ils donnent dans le plan sur lequel on considère les symétries les pentes

$$\tan \frac{\pi}{2p}, \quad \tan \frac{3\pi}{2p}, \quad \dots;$$

la forme s'écrit donc

$$\begin{aligned} f_r = \psi_p &= A \prod \left[y - x \tan(2k+1) \frac{\pi}{2p} \right] \\ &= B \prod \left[y \cos(2k+1) \frac{\pi}{2p} - x \sin(2k+1) \frac{\pi}{2p} \right] \end{aligned}$$

ou, en coordonnées polaires,

$$B \varphi^p \prod \sin \left[\theta - (2k+1) \frac{\pi}{2p} \right].$$

A un facteur constant près, la forme ψ_p s'écrit

$$\psi_p = x^p - C_p^2 x^{p-2} y^2 + C_p^4 x^{p-4} y^4 - \dots,$$

car les racines en $\frac{y}{x}$ de cette forme sont

$$\tan \frac{\pi}{2p}, \quad \tan \frac{\pi + \pi}{p}, \quad \dots$$

On voit que $qr = 2p$; mais, si p est impair,

$$\gamma_0 = 2p, \quad G_0 \geq \gamma_0 = 2p;$$

donc $qr = G_0$; et si p est pair,

$$\gamma_0 = p, \quad G_0 \geq 2\gamma_0 = 2p;$$

done, on a encore $qr = G_0$. Dans tous les cas, $P(\gamma_2, \psi_p) = 0$ est l'équation cherchée, en se bornant, ainsi que nous l'avons dit dans le paragraphe précédent, aux symétries de première espèce.

Introduisons les symétries de seconde espèce : 1° p impair. Tous les axes de renversement sont congruents. Si une symétrie est de seconde espèce, elles le sont toutes. Or, les pentes des axes de symétrie sont

$$\tan 0, \quad \tan \frac{\pi}{p}, \quad \tan \frac{2\pi}{p}, \quad \dots$$

et l'équation du faisceau des axes est

$$\varphi_p(x, y) = C_p^1 x^{p-1} y - C_p^3 x^{p-3} y^3, \dots$$

L'équation cherchée des courbes admettant ces droites comme axes de symétrie de seconde espèce est donc

$$\varphi_p(x, y) \cdot P(\gamma_2, \psi_p) = 0.$$

2° p pair. Les axes de renversement sont de deux en deux congruents. De même les axes de symétrie. En posant

$$p = 2p',$$

les uns ont pour pentes

$$\text{tang } 0, \quad \text{tang } \frac{\pi}{p}, \quad \text{tang } \frac{2\pi}{p}, \quad \dots,$$

les autres

$$\text{tang } \frac{\pi}{2p}, \quad \text{tang } \frac{3\pi}{2p}, \quad \dots$$

Les équations des faisceaux de ces deux systèmes d'axes sont, avec les mêmes notations que plus haut,

$$\varphi_{p'}(x, y') = 0 \quad \text{et} \quad \psi_{p'}(x, y') = 0.$$

Trois hypothèses sont à faire suivant que l'un de ces systèmes seulement est de seconde espèce ou que tous les axes sont de seconde espèce. Les équations cherchées des courbes admettant ces axes pour axes de seconde espèce sont donc

$$\begin{aligned} \varphi_{p'} P(\chi_2, \psi_p) &= 0, \\ \psi_{p'} P(\chi_2, \psi_p) &= 0, \\ \varphi_{p'} \psi_{p'} P(\chi_2, f_p) &= 0. \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\psi_p + i\varphi_p = (x + iy)^p, \quad \psi_p - i\varphi_p = (x - iy)^p,$$

on voit que

$$\psi_p^2 + \varphi_p^2 = (x^2 + y^2)^p = \chi_2^p.$$

Ainsi φ_p^2 est un polynôme en χ_2 et en ψ_p ; cela était certain *a priori*, car la courbe $\varphi_p^2 = 0$ admet tous les diamètres de la disposition I pour diamètres de première espèce.

Pour le cas où $p = 2p'$, les identités

$$\psi_{p'}^2 - \varphi_{p'}^2 = \psi_p, \quad \psi_{p'}^2 + \varphi_{p'}^2 = (x^2 + y^2)^{p'} = \chi_2^{p'}$$

fournissent en fonction de ψ_p et de χ_2 les équations des carrés des faisceaux des diamètres des deux familles.

19. *Disposition II.* — Nous placerons les $2p$ axes de renversement diédraux comme dans la disposition I. Les deux points de la sphère représentés par la forme χ_2 sont des points z ; il est donc nécessaire de prendre

$$f_q = \chi_2 = (x^2 + y^2)^2.$$

La forme f_r formée par le même procédé qu'au paragraphe précédent sera ψ_{2p} .

Nous aurons $qr = 8p$. Si p est impair,

$$\gamma_0 = 4p, \quad G_0 \geq 2\gamma_0 = 8p;$$

donc $G_0 = 8p$. L'équation cherchée est

$$P(\chi_i, \psi_{2p}) = 0.$$

Si p est pair, $\gamma_0 = 2p$, mais les axes de renversement forment des trièdres trirectangles; donc

$$G_0 \geq 4\gamma_0 = 8p;$$

par suite, $G_0 = 8p$ et l'équation s'écrit encore

$$P(\chi_i, \psi_{2p}) = 0.$$

Occupons-nous maintenant des symétries de seconde espèce.

1° p impair. Tous les axes de renversement diédraux sont congruents. Les axes de symétrie qui leur correspondent le sont aussi. Mais il convient de mettre à part les diamètres qui correspondent au renversement axial, d'où les trois équations possibles :

$$\begin{aligned} \varphi_{2p}(x, y) P(\chi_i, \psi_{2p}) &= 0, \\ (x^2 + y^2) P(\chi_i, \psi_{2p}) &= 0, \\ (x^2 + y^2) \varphi_{2p}(x, y) P(\chi_i, \psi_{2p}) &= 0. \end{aligned}$$

2° p pair. Écrivons, sans insister, les sept équations possibles en introduisant les symétries de seconde espèce. Nous gardons les mêmes notations que dans la disposition I :

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2) P(\chi_i, \psi_{2p}) &= 0, \\ \varphi_p P(\chi_i, \psi_{2p}) &= 0, \\ \psi_p P(\chi_i, \psi_{2p}) &= 0, \\ \varphi_p \psi_p P(\chi_i, \psi_{2p}) &= 0, \\ (x^2 + y^2) \varphi_p P(\chi_i, \psi_{2p}) &= 0, \\ (x^2 + y^2) \psi_p P(\chi_i, \psi_{2p}) &= 0, \\ (x^2 + y^2) \varphi_p \psi_p P(\chi_i, \psi_{2p}) &= 0. \end{aligned}$$

20. *Disposition III.* — Les axes quaternaires correspondront aux pentes 0, ∞ ; 1, -1 ; i , $-i$. Les extrémités de ces axes ne sont

pas des points α . La forme correspondante est

$$f_9 = f_6 = xy(x^2 - y^2)(x^2 + y^2).$$

Prenons les extrémités des axes ternaires (les diagonales du cube). Leurs longitudes sont les multiples impairs de $\frac{\pi}{4}$. Leurs colatitudes se réduisent à λ et $\pi - \lambda$, avec $\tan \lambda = \sqrt{2}$.

Les huit coefficients angulaires correspondants dans le plan P sont

$$\tan \frac{\lambda}{2} e^{(2p+1)\frac{\pi}{4}}, \quad -\cot \frac{\lambda}{2} e^{(2p+1)\frac{\pi}{4}},$$

p prenant les valeurs 0, 1, 2, 3, de sorte que la forme correspondante est

$$\begin{aligned} f_8 &= \left(y^4 + \tan \frac{\lambda}{2} x^4 \right) \left(y^4 + \cot \frac{\lambda}{2} x^4 \right) \\ &= y^8 + \left(\tan \frac{\lambda}{2} + \cot \frac{\lambda}{2} \right) x^4 y^4 + x^8. \end{aligned}$$

Or, puisque $\tan \lambda = \sqrt{2}$ et que l'on a

$$\tan \frac{\lambda}{2} - \cot \frac{\lambda}{2} = \frac{\tan^2 \frac{\lambda}{2} - 1}{\tan \frac{\lambda}{2}} = \frac{-2}{\tan \frac{\lambda}{2}},$$

$\tan \frac{\lambda}{2}$ et $-\cot \frac{\lambda}{2}$ sont racines de l'équation

$$z^2 + \frac{2}{\tan \lambda} z - 1 = z^2 + \sqrt{2} z - 1 = 0.$$

La somme des quatrième puissances s'obtient immédiatement par les formules de Newton. Elle est égale à 14. On a donc

$$f_p = f_8 = x^8 + 14 x^4 y^4 + y^8.$$

Or

$$qr = 48, \quad \gamma_0 = 24, \quad G_0 \geq 2\gamma_0 = 48.$$

Done

$$G_0 = 48.$$

L'équation générale cherchée, les symétries étant toutes de première espèce, est donc

$$P(f_6, f_8) = 0.$$

Tous les axes binaires qui correspondent sur la sphère aux dia-

mètres sont congruents. Si une symétrie est de seconde espèce, elles le seront toutes, nous avons donc à chercher l'équation du faisceau de l'ensemble des 12 diamètres. Nous les associons pour cela en trois groupes de 4, le module de la pente correspondante étant le même dans chaque groupe; c'est-à-dire que sur la sphère nous associons les extrémités des axes binaires ayant même colatitute. Quand la colatitute est $\frac{\pi}{2}$, les longitudes sont les multiples impairs de $\frac{\pi}{4}$. Quand la colatitute est $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$, la longitude est multiple de $\frac{\pi}{2}$.

Le faisceau des diamètres est donc

$$Q = (x^4 + y^4) \left(x^4 \tan^4 \frac{\pi}{8} - y^4 \right) \left(x^4 \cot^4 \frac{\pi}{8} - y^4 \right) = 0$$

ou encore

$$Q = (x^4 + y^4) \left[x^8 - \left(\tan^4 \frac{\pi}{8} + \cot^4 \frac{\pi}{8} \right) x^4 y^4 + y^8 \right] = 0,$$

$\tan^4 \frac{\pi}{8}$ et $-\cot^4 \frac{\pi}{8}$ sont racines de l'équation

$$\rho^2 + \frac{2}{\tan^4 \frac{\pi}{4}} \rho - 1 = \rho^2 + 2\rho - 1 = 0.$$

On trouve immédiatement que

$$\tan^4 \frac{\pi}{8} + \cot^4 \frac{\pi}{8} = 34.$$

Donc

$$\varphi = (x^4 + y^4)(x^8 - 34x^4y^4 + y^8) = x^{12} - 33x^8y^4 - 33x^4y^8 + y^{12} = 0.$$

Les courbes algébriques admettant ces symétries comme symétries de seconde espèce auront donc une équation de la forme

$$\varphi \cdot P(f_6, f_8) = 0.$$

A titre de vérification, on peut remarquer que φ^2 doit être un polynome en f_6 et en f_8 . On trouve en effet que

$$\varphi^2 = (f_8)^3 - 108(f_6)^4.$$

21. *Disposition IV.* — Les points de la sphère qui correspondent à la forme f_6 sont des points α . Nous remplacerons

donc f_6 par son carré

$$f_{12} = x^2 y^2 (x^4 - y^4)^2,$$

et nous conserverons f_8 .

Nous aurons donc

$$qr = 96, \quad \gamma_0 = 24, \quad G_0 \geq 4\gamma_0; \quad \text{donc} \quad G_0 = 96.$$

L'équation générale cherchée, les symétries étant toutes de première espèce, est donc

$$P(f_8, f_{12}) = 0.$$

Si l'on introduit les symétries de seconde espèce, les équations possibles sont

$$\varphi \cdot P(f_8, f_{12}) = 0,$$

$$f_6 P(f_8, f_{12}) = 0,$$

$$\varphi \cdot f_6 P(f_8, f_{12}) = 0.$$

On remarquera les formes simples que prennent, en coordonnées polaires, les polynômes f_6 , f_8 et, par suite, celles des équations des courbes avec les dispositions III et IV,

$$f_6 = \frac{1}{4} r^6 \sin^4 \theta,$$

$$f_8 = r^8 \left[1 - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right].$$

22. *Disposition V.* — Nous prendrons, comme première forme, celle du 12^e degré, f_{12} qui correspond aux extrémités des six axes d'ordre 5; pour deuxième forme, celle du 20^e degré, f_{20} qui correspond aux extrémités des dix axes ternaires. Ces extrémités ne sont jamais des points z. Nous avons ici

$$qr = 240, \quad \gamma_0 = 60;$$

mais, ainsi que nous le verrons dans un instant, les symétries correspondent à des trièdres trirectangles formés par les axes de renversement, et $G_0 \geq 4\gamma_0 = 240$. Donc $G_0 = 240$. L'équation générale cherchée, en supposant que les symétries soient toutes de première espèce, est

$$P(f_{12}, f_{20}) = 0.$$

Comme tous les axes binaires sont congruents, si l'une des symé-

tries est de seconde espèce, elles sont toutes de seconde espèce.

Soit $\varphi = 0$ le faisceau des 30 diamètres, l'équation cherchée, en supposant les symétries de seconde espèce, est

$$\varphi \cdot P(f_{12}, f_{20}) = 0.$$

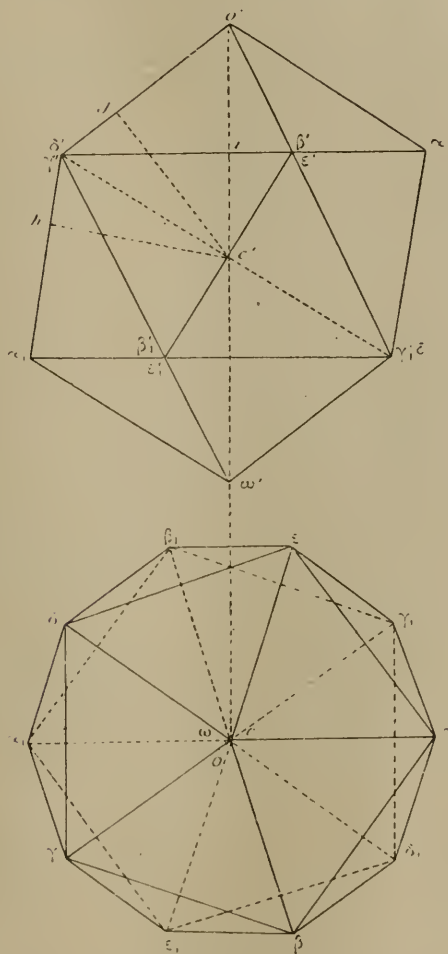
Il nous reste à calculer f_{12} , f_{20} et φ .

Pour cela, nous orientons l'icosaèdre par rapport à la sphère π et aux axes ωXYZ de la manière suivante :

Deux sommets opposés de l'icosaèdre sont au point de contact O de π et du plan (p) et au point diamétralement opposé ω , centre de la projection stéréographique. Ces sommets correspondent aux coefficients angulaires 0 et ∞ ; un sommet A de l'icosaèdre, consécutif au sommet O , est dans le plan du grand cercle qui correspond aux coefficients angulaires réels, et ce point A correspond à un coefficient angulaire positif. L'icosaèdre se trouve ainsi placé et nous sommes conduits à la figure classique donnant les projections de l'icosaèdre sur un plan perpendiculaire à une diagonale et sur un plan de symétrie passant par une diagonale.

Soient o, o' ; α, α' les projections de O et de A . L'arête $O\alpha$, $O'\alpha'$ est de front; donc le plan perpendiculaire au milieu de cette arête, qui est un plan de symétrie de l'icosaèdre, est debout et est par suite plan de symétrie de la projection verticale. La projection verticale admet c' pour centre de symétrie, elle a un axe de symétrie, perpendiculaire à $o'\alpha'$, donc elle en a un aussi qui est parallèle à $o'\alpha'$. Plaçons ces axes; pour cela, remarquons que du sommet A on déduit, par des rotations autour de l'axe vertical $O\omega$, quatre autres sommets, ce qui donne en projection horizontale le pentagone $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ et en projection verticale la ligne horizontale $\alpha'\beta'\gamma'$; de même, de O , par des rotations autour de $c\alpha$, $c'\alpha'$, on déduit les sommets o, o' ; β, β' ; δ, δ' ; γ, γ' ; ϵ, ϵ' , dont les projections verticales sont en ligne droite. Par suite, l'axe perpendiculaire à $c'\alpha'$ passe au point de rencontre β' des droites $\alpha'\beta'\gamma'$, $o'\beta'\gamma'$; cet axe est $\beta'c'\epsilon'$. Nous venons de trouver, de plus, deux arêtes $\gamma\delta$, $\gamma'\delta'$; $\gamma\epsilon$, $\gamma'\epsilon'$ debout et non situées dans le plan de symétrie perpendiculaire à $o\alpha$, $o'\alpha'$; donc ces deux arêtes sont symétriques par rapport à ce plan et, comme elles sont aussi symétriques par rapport à C , le plan debout $\gamma'c'\gamma'_1$ est un plan de symétrie de l'icosaèdre et de sa projection verticale.

Avant d'aller plus loin, remarquons que nous avons mis en évidence trois arêtes $o\alpha$, $o'\alpha'$; $\beta\varepsilon_1$, $\beta'\varepsilon'_1$; $\gamma\delta$, $\gamma'\delta'$ dont les directions forment un trièdre trirectangle; les axes de renversement perpendiculaires aux milieux de ces arêtes forment l'un de ces systèmes trirectangles d'axes de renversement dont il a été parlé plus haut.



Fixons maintenant les dimensions de la figure. Les arêtes $o\alpha$, $o'\alpha'$; $\beta\varepsilon_1$, $\beta'\varepsilon'_1$ sont de front, donc

$$o'\alpha' = \beta'\varepsilon'_1 = 2\beta c'.$$

Et comme les triangles $o' \alpha' i$, $\beta' c' i$ sont semblables, $\alpha' i = 2 i c'$; d'où la construction suivante : on prend $\alpha' i = 2 c' i$; puis $c' o' = c' \alpha'$. Enfin $c' \gamma'$ parallèle à $o' \alpha'$ et $c' \beta'$ perpendiculaire à $o' \alpha'$. On a la projection verticale. La projection horizontale s'en déduit puisque le rayon de la circonférence circonscrite au contour apparent horizontal est égal à $i' \alpha'$.

Ceci va nous servir à trouver les tangentes des colatitudes des divers axes de l'icosaèdre. Ces colatitudes sont égales aux angles

$$o' c' \alpha' = \lambda, \quad o' c' \beta' = \frac{\lambda}{2}, \quad o' c' \gamma' = \lambda_1, \quad o' c' j = \mu, \quad o' c' h = \nu,$$

ou à leurs suppléments; en appelant $c' j$ et $c' h$ les perpendiculaires à $o' \gamma'$ et $\gamma' \alpha'_1$, on a de suite

$$\text{tang } \lambda = 2, \quad \frac{2}{\text{tang } \lambda} = 1;$$

on en déduit par le calcul classique

$$\text{tang } \frac{\lambda}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \frac{2}{\text{tang } \frac{\lambda}{2}} = \sqrt{5}+1.$$

Puis, comme

$$\beta' c' \gamma' = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{2}{\text{tang } \lambda_1} = \sqrt{5}-1.$$

Comme $j o' = 2 j \gamma'$, on a

$$\text{tang } \mu = 2 \text{ tang } (\lambda_1 - \mu) = 2 \frac{\text{tang } \lambda_1 - \text{tang } \mu}{1 + \text{tang } \lambda_1 \text{ tang } \mu};$$

la racine positive de cette équation en $\text{tang } \mu$ donne

$$\text{tang } \mu = 3 - \sqrt{5}, \quad \frac{2}{\text{tang } \mu} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Enfin on a

$$\mu + \nu = 2 \gamma_1 = \pi - \gamma,$$

ce qui conduit à

$$\frac{2}{\text{tang } \nu} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Calculons f_{12} ; o et ω donnent respectivement les pentes o et ∞ et les formes y et x . Les sommets α , α' ; β , β' ; γ , γ' ; δ , δ' ;

$\varepsilon, \varepsilon'$ ont une colatitude λ et des longitudes multiples de $\frac{2\pi}{5}$, d'où les pentes

$$\tan \frac{\lambda}{2} e^{\frac{2k\pi i}{5}}$$

et la forme

$$y^5 - \tan^5 \frac{\lambda}{2} x^5.$$

Les sommets opposés donnent les pentes

$$-\cot \frac{\lambda}{2} e^{\frac{2k\pi i}{5}}$$

et la forme

$$y^5 + \cot^5 \frac{\lambda}{2} x^5$$

et l'on a

$$\begin{aligned} f_{12} &= xy \left[y^5 - \tan^5 \frac{\lambda}{2} x^5 \right] \left[y^5 + \cot^5 \frac{\lambda}{2} x^5 \right] \\ &= xy \left[y^{10} - \left(\tan^5 \frac{\lambda}{2} - \cot^5 \frac{\lambda}{2} \right) x^5 y^5 - x^{10} \right], \end{aligned}$$

et nous sommes ramenés à calculer la somme des puissances cinquièmes des racines de l'équation

$$y^2 + \frac{2}{\tan \lambda} y - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad y^2 + y - 1 = 0.$$

On trouve

$$f_{12} = xy [y^{10} + 10x^5 y^5 - x^{10}].$$

Calculons f_{20} . Les faces se déduisant de $\alpha_1' \gamma_1' \delta_1'$ par des rotations autour de $O\omega$ donnent la forme

$$y^{5-1} - \tan^5 \frac{\lambda}{2} x^5.$$

Celles qui se déduisent de même de $\alpha_1 \gamma_1 \delta_1$ donnent

$$y^5 + \tan^5 \frac{\lambda}{2} x^5.$$

Enfin les deux systèmes de faces opposées donnent

$$y^5 - \cot^5 \frac{\lambda}{2} x^5 \quad \text{et} \quad y^5 - \cot^5 \frac{\lambda}{2} x^5.$$

Donc

$$f_{20} = \left[y^{10} + \left(\tan^5 \frac{\mu}{2} - \cot^5 \frac{\mu}{2} \right) x^5 y^5 - x^{10} \right] \\ \times \left[y^{10} - \left(\tan^5 \frac{\nu}{2} - \cot^5 \frac{\nu}{2} \right) x^5 y^5 - x^{10} \right]$$

et l'on a à calculer la somme des puissances cinquièmes des racines pour les deux équations conjuguées

$$\rho^2 + \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \rho - 1 = 0.$$

On trouve

$$f_{20} = [y^{10} - (114 + 50\sqrt{5})x^5y^5 - x^{10}] [y^{10} - (114 - 50\sqrt{5})x^5y^5 - x^{10}], \\ f_{20} = [y^{10} - 114x^5y^5 - x^{10}]^2 - 5 \cdot 50^2 x^{10}y^{10} \\ = y^{20} - 228x^5y^{15} + 494x^{10}y^{10} + 228x^{15}y^5 + x^{20}.$$

Les axes binaires se partagent en trois familles : ceux qui se déduisent de l'axe perpendiculaire au milieu de ox , $o'x'$, ils donnent la forme

$$\left(y^5 - \tan^5 \frac{\lambda}{4} x^5 \right) \left(y^5 + \cot^5 \frac{\lambda}{4} x^5 \right);$$

ceux qui se déduisent de l'axe perpendiculaire au milieu de $\gamma\delta$, $\gamma'\delta'$, ils donnent la forme

$$\left(y^5 + \tan^5 \frac{\lambda_1}{4} x^5 \right) \left(y^5 - \cot^5 \frac{\lambda_1}{4} x^5 \right);$$

ceux qui sont dans le plan diamétral perpendiculaire à $O\omega$, ils donnent $y^{10} + x^{10}$.

Donc

$$\varepsilon = (y^{10} + x^{10}) \left[y^{10} - \left(\tan^5 \frac{\lambda}{4} - \cot^5 \frac{\lambda}{4} \right) x^5 y^5 - x^{10} \right] \\ \times \left[y^{10} - \left\{ \left(-\tan^5 \frac{\lambda_2}{4} \right)^5 + \left(\cot^5 \frac{\lambda_2}{4} \right)^5 \right\} x^5 y^5 - x^{10} \right],$$

et, à cause de la précaution prise dans l'écriture du second crochet,

nous avons à calculer la somme des puissances cinquièmes des racines des équations conjuguées

$$\varphi^2 + (1 \pm \sqrt{5})\varphi - 1 = 0.$$

On trouve

$$\begin{aligned} \varphi &= (y^{10} + x^{10}) \{ y^{10} + (261 + 125\sqrt{5})x^5y^5 - x^{10} \} \\ &\quad \times \{ y^{10} + (261 - 125\sqrt{5})x^5y^5 - x^{10} \}, \\ \varphi &= (y^{10} + x^{10})^3 (y^{10} + 261x^5y^5 - x^{10})^2 - 5 \cdot 125^2 x^{10}y^{10}, \\ \varphi &= y^{30} + 522x^5y^{25} - 10005x^{10}y^{20} - 10005x^{20}y^{10} - 522x^{25}y^5 + x^{30}. \end{aligned}$$

Comme vérification de ces calculs, on a

$$\varphi^2 = (f_{20})^2 + 1728(f_{12})^5.$$

Bien entendu, dans ce cas, comme dans les précédents, l'association entre un diamètre de pente a et la direction conjuguée de pente d se fait de suite quand on tient compte de la relation

$$ad' = -1.$$

23. On peut également se proposer de trouver les équations tangentielles des courbes admettant les diamètres des dispositions I à V; on y arrive sans nouveaux calculs grâce à la remarque suivante : toute symétrie est susceptible de deux définitions corrélatives. En effet, la symétrie (Λ, D) est la transformation ponctuelle qui fait correspondre, à tout point M , un point M' tel que la droite MM' passe par le point fixe à l'infini d et que le conjugué de d par rapport à MM' soit sur Λ ; mais c'est aussi la transformation tangentielle qui fait correspondre à toute droite Δ une droite Δ' tel que le point commun à $\Delta\Delta'$ soit sur Λ et que la conjuguée de Λ par rapport à $\Delta\Delta'$ passe par le point d .

Donc, si l'on transforme la symétrie (Λ, D) par la transformation par polaires réciproques par rapport à une conique C ayant son centre sur Λ , on trouve une symétrie (Λ_1, D_1) , Λ_1 étant la polaire par rapport à C du point à l'infini d et d_1 étant le pôle, à l'infini, du diamètre Λ de C .

Si donc l'équation $f(x, y) = 0$ représente une courbe admettant la symétrie (Λ, D) ; $f(u, v) = 0$ représente une courbe admettant

la symétrie (A_1, D_1) dans laquelle

$$a_1 = -\frac{1}{d}, \quad d_1 = -\frac{1}{a}.$$

Donc, si dans les équations trouvées aux paragraphes précédents, on remplace x par u et y par v , on a les équations tangentielles cherchées. En effet, à la symétrie (A, D) de la courbe ponctuelle correspond (A_1, D_1) de la courbe tangentielle telle que $a_1 d = -1$, $ad_1 = -1$; mais $ad' = -1$, $a'd = -1$ et par suite $d_1 = d'$, $a_1 = a'$ et, étant donnés les axes que nous avons choisis, a' et d' sont relatifs à une symétrie (A', D') de la courbe ponctuelle.

Il n'y a pas lieu de chercher les équations tangentielles des courbes admettant des symétries de deuxième espèce, puisque ces courbes renferment des droites, lesquelles n'ont pas d'équations tangentielles. Le changement indiqué de x en u et y en v dans les équations des courbes admettant des symétries de deuxième espèce donne des courbes qui sont formées, en tout ou en partie, par des points à l'infini. Une courbe qui admet une symétrie de deuxième espèce ne peut pas être considérée comme une courbe, à la fois du point de vue ponctuel et du point de vue tangentiel.

24. Nous pouvons maintenant traiter la question posée au paragraphe 1. Pour cela, remarquons que si, pour l'une des dispositions, l'équation générale des courbes correspondantes est

$$F(f_q, f_r) = 0,$$

le degré m de ces courbes est nécessairement de la forme $\lambda q + \mu r$; λ et μ étant deux entiers positifs ou nuls. Il suit de là que les courbes admettant pour diamètres de première espèce les diamètres des dispositions étudiées ont un degré m donné par le Tableau suivant :

Pour p diamètres de la disposition I :

- 1^o p impair, m quelconque au moins égal à p ;
- 2^o p pair, m pair au moins égal à p .

De plus, dans les deux cas, m pair et inférieur à p donne des courbes décomposables ou des coniques.

Pour $2p + 2$ diamètres de la disposition II :

1° p impair, m pair au moins égal à $2p$;

2° p pair, m multiple de 4 et au moins égal à $2p$.

De plus, dans les deux cas, m multiple de 4 et inférieur à $2p$ donne des courbes décomposables.

Pour les 12 diamètres de la disposition III : m pair, au moins égal à 6, et différent de 10.

Pour les 18 diamètres de la disposition IV : m multiple de 4 et au moins égal à 8.

Pour les 30 diamètres de la disposition V : m multiple de 4, au moins égal à 12, et différent de 16 et 28.

On pourrait dresser un Tableau analogue relatif au cas des symétries de deuxième espèce; nous ne le ferons pas, notre but étant de nous occuper des courbes indécomposables de degré supérieur à deux. En regardant le Tableau précédent, on voit de suite les diverses dispositions de diamètres que peut présenter une telle courbe. Par exemple, on trouve :

Pour $m = 22$: p diamètres (Disp. I), p quelconque au plus égal à 22;

ou $2p + 2$ diamètres (Disp. II), p impair au plus égal à 11;

ou 12 diamètres (Disp. III).

Pour $m = 20$: p diamètres (Disp. I), p quelconque au plus égal à 20;

ou $2p + 2$ diamètres (Disp. II), p quelconque au plus égal à 10;

ou 12 diamètres (Disp. III);

ou 18 diamètres (Disp. IV);

ou 30 diamètres (Disp. V).

Ce Tableau fournit de suite, en particulier, le nombre maximum de diamètres pour chaque degré. Énonçons le résultat :

Le nombre maximum des diamètres de première espèce d'une courbe algébrique indécomposable de degré m ($m \geq 3$) est égal à m , si m est impair, et les diamètres ont alors la disposition I:

Il est égal à $m + 2$, si m est pair, et les diamètres ont alors la disposition II.

Il y a exception pour $m = 6, 8, 12, 16, 20, 24$.

Pour $m = 6$, le maximum est fourni par les 12 diamètres de la disposition III.

Pour $m = 8$, le maximum est fourni par les 18 diamètres de la disposition IV.

Pour $m = 12, 20, 24$, le maximum est fourni par les 30 diamètres de la disposition V.

Pour $m = 16$, le maximum est 18; mais ces diamètres peuvent avoir les dispositions II ou IV.

SURFACES APPLICABLES SUR LE PARABOLOÏDE DE RÉVOLUTION;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES SURFACES APPLICABLES SUR LE PARABOLOÏDE DE RÉVOLUTION; CAS SPÉCIAL OU CES SURFACES SONT RÉELLES.

1, Darboux indique au Tome 3 de la *Théorie des Surfaces* (p. 362 et suiv.) comment s'obtiennent toutes les surfaces applicables sur le parabolôïde de révolution et, en particulier, celles d'entre elles qui sont *réelles*. Cette recherche est équivalente à celle des courbes à torsion constante. La solution de l'un ou l'autre problème doit permettre de réaliser un progrès important dans la recherche des surfaces à courbure totale constante, car les lignes asymptotiques de ces surfaces ont leur torsion constante et sont les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles du second ordre qui définit ces surfaces.

La théorie des surfaces minima se rattache de deux façons différentes à ce problème : M. Cosserat a montré que la recherche des surfaces minima circonscrites à une sphère équivaut à celle des courbes à torsion constante. D'autre part, Darboux termine l'étude déjà citée en montrant que, par dégénérescence de courbes à torsion constante ou de surfaces applicables sur le parabolôïde,

dérivent des courbes minima et des développées de surfaces minima.

J'ai moi-même, dans un Mémoire récompensé par l'Académie en 1916 et publié aux *Annales de l'École Normale supérieure* (1919 et 1920), étudié les courbes à torsion constante, et plus spécialement, celles qui sont réelles et algébriques. Je me servirai constamment des résultats de ce Mémoire. Le lecteur pourra consulter les travaux antérieurs sur les courbes à torsion constante; ils sont dus à MM. Königs, Lyon, Fouché, Fabry et Cosserat; Darboux en a condensé l'essentiel au Tome IV de la *Théorie des Surfaces* (p. 429) et y donne les indications bibliographiques. En même temps que mon Mémoire, l'Académie a récompensé le travail de mon camarade M. Darmois ⁽¹⁾; le rapport sur nos travaux est inséré aux *Comptes rendus* de décembre 1916.

Quant au parabolôïde lui-même, la question a été envisagée, à un point de vue tout différent de celui que je développerai, par deux auteurs, MM. Thybaut et Servant. Dans sa thèse ⁽²⁾, M. Thybaut a étudié la déformation du parabolôïde le plus général et montre le lien de ce problème, spécialement quand le parabolôïde est de révolution, avec la recherche de surfaces minima ou isothermiques particulières.

Les travaux de M. Servant forment l'objet de diverses Notes insérées aux *Comptes rendus* en 1902, 1903, 1904 et d'un Mémoire paru en 1911 au *Bulletin de la Société philomathique de Paris*.

Dans le travail que je présente, je retrouve d'abord tous les résultats de M. Darboux par une méthode légèrement différente, qui ne suppose chez le lecteur aucune étude préalable et qui a, de plus, l'avantage de mettre en évidence diverses particularités curieuses, au point de vue de la *réalité*, sur les couples de surfaces réelles applicables l'une sur l'autre. Je m'occupe ensuite plus spécialement des surfaces algébriques réelles, indiquant le moyen d'obtenir celles qui ont un centre, un plan ou un axe de symétrie, ou encore un axe de rotation. Je terminerai par l'étude détaillée des surfaces algébriques unicursales déduites de la cubique de

⁽¹⁾ La Thèse de M. Darmois sera insérée aux *Annales de Toulouse*, 1911.

⁽²⁾ *Annales de l'École Normale*, années 1897 et 1900.

M. Lyon et des résultats de M. Thybaut : ce sera l'objet d'un Mémoire complémentaire.

2. Soit $\mathcal{Q}$ le paraboloïde de révolution d'équation $x^2 + y^2 = 2 p z$ en coordonnées rectangulaires ou $r^2 = 2 p z$ en coordonnées semi-polaires. Je désignerai souvent le paramètre p par 2τ . L'élément linéaire

$$(1) \quad ds^2 = \left(1 + \frac{r^2}{p^2}\right) dr^2 + r^2 d\theta^2$$

devient

$$(2) \quad ds^2 = du^2 + \frac{H-1}{2} dv^2$$

en écrivant

$$(3) \quad \begin{cases} du = dr \sqrt{1 + \frac{r^2}{p^2}}, & v = p\theta, \\ \frac{H-1}{2} = \frac{r^2}{p^2}, & du = \frac{p}{4} dH \sqrt{\frac{H+1}{H-1}}. \end{cases}$$

Le produit des rayons de courbure principaux est égal à

$$p^2 \left(1 + \frac{r^2}{p^2}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \tau^2 (H+1)^2.$$

La carte de $\mathcal{Q}$ sur un plan peut s'obtenir par les formules

$$(4) \quad \begin{cases} X = \theta, & dY = \sqrt{1 + \frac{r^2}{p^2}} \frac{dr}{r}, \\ ds^2 = r^2 (dX^2 + dY^2). \end{cases}$$

3. Sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, traçons une courbe $(\mathfrak{W})$ arbitraire ⁽¹⁾, lieu du point $m(c, c', c'')$, puis une seconde courbe $(\mathfrak{W}_1)$ lieu du point $m_1(c_1, c'_1, c''_1)$; désignons par ε l'un des trois nombres $+1$, -1 ou 0 .

⁽¹⁾ Dans tout le cours de ce Mémoire, il sera sous-entendu que la courbe $(\mathfrak{W})$ est une courbe analytique; autrement dit, c, c', c'' sont des fonctions analytiques d'une variable complexe z ; ces trois fonctions sont liées par l'identité $c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$.

Les formules

$$(5) \begin{cases} x = \frac{i\tau}{2} \int c'' dc' - c' dc'' - \frac{i\tau}{2} \int c_1'' dc_1' - c_1' dc_1'' + \frac{\varepsilon\tau i}{2} (c' c_1'' - c'' c_1'), \\ y = \frac{i\tau}{2} \int c dc'' - c'' dc - \frac{i\tau}{2} \int c_1 dc_1'' - c_1'' dc_1 + \frac{\varepsilon\tau i}{2} (c'' c_1 - c c_1''), \\ z = \frac{i\tau}{2} \int c' dc - c dc' - \frac{i\tau}{2} \int c_1' dc_1 - c_1 dc_1' + \frac{\varepsilon\tau i}{2} (c c_1' - c' c_1) \end{cases}$$

définissent trois surfaces : S pour $\varepsilon = +1$, S' pour $\varepsilon = -1$, Σ pour $\varepsilon = 0$.

Les deux premières sont applicables sur $\mathfrak{Q}$ et, *réciroquement, toute surface applicable sur $\mathfrak{Q}$ peut s'obtenir par ce procédé*. Pour l'instant, ne nous préoccupons pas encore de la réalité : on voit aussitôt que, si ε est pris égal à 1, S changera de forme si $(\mathfrak{W})$ ou $(\mathfrak{W}_1)$ sont remplacées par d'autres courbes sphériques; si $(\mathfrak{W}')$ et $(\mathfrak{W}'_1)$ désignent les symétriques de $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}_1)$ par rapport à l'origine, il est bien clair que l'échange simultané de $(\mathfrak{W})$ avec $(\mathfrak{W}')$ et de $(\mathfrak{W}_1)$ avec $(\mathfrak{W}'_1)$ ne change pas la surface S, tandis que S se trouve remplacée par S', si l'on ne fait que l'un de ces deux échanges. Cette simple remarque permet de déduire toutes les formules relatives à S' des formules correspondantes relatives à S en y remplaçant c_1, c'_1, c''_1 par $-c_1, -c'_1, -c''_1$.

Pour cette même raison nous devons considérer le cône C, qui a son sommet à l'origine et pour directrice $(\mathfrak{W})$ ou $(\mathfrak{W}')$ indifféremment, et le cône analogue C_1 relatif à $(\mathfrak{W}_1)$. Si l'intersection de chacun de ces deux cônes avec la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ se décompose en deux courbes analytiquement distinctes, symétriques par rapport à l'origine, les surfaces S et S' sont deux surfaces analytiquement distinctes; au contraire, si, pour l'un des deux cônes ou pour tous les deux, la directrice sphérique est indécomposable analytiquement, $(\mathfrak{W})$ par exemple et $(\mathfrak{W}')$ constituant les deux moitiés d'une même courbe analytique, S et S' sont les deux nappes d'une même surface analytique.

La surface Σ est une surface de translation; c, c', c'' sont fonctions d'un paramètre α ; c_1, c'_1, c''_1 fonctions d'un paramètre β . A un couple (α, β) correspondent un point M de S, un point M' de S' et un point μ de Σ milieu de MM'. La surface Σ est engendrée par la translation d'une courbe $(\mathfrak{A})$ de rayon de torsion constant et égal à $\frac{i\tau}{2}$ ou par la translation d'une courbe $(\mathfrak{A}_1)$ de torsion

constante aussi, égale à celle de $(\mathcal{A})$ changée de signe. Ces deux courbes sont définies par les formules

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}) \quad & \begin{cases} x = \frac{i\tau}{2} \int c'' dc' - c' dc'', \\ y = \frac{i\tau}{2} \int c' dc'' - c'' dc', \\ z = \frac{i\tau}{2} \int c' dc - c dc'; \end{cases} \\ (\mathcal{A}_1) \quad & \begin{cases} x = \frac{-i\tau}{2} \int c_1'' dc_1' - c_1' dc_1'', \\ y = \frac{-i\tau}{2} \int c_1' dc_1'' - c_1'' dc_1', \\ z = \frac{-i\tau}{2} \int c_1' dc_1 - c_1 dc_1'. \end{cases} \end{aligned}$$

Échanger $(\mathcal{A})$ avec $(\mathcal{A}_1)$ ne change pas $(\mathcal{A})$, donc ne change pas non plus Σ .

La normale en M à S a pour paramètres directeurs $c + c_1$, $c' + c_1'$, $c'' + c_1''$; la normale en M' à S' correspond à $c - c_1$, $c' - c_1'$, $c'' - c_1''$. La droite MM' touche S en M , S' en M' et reste normale à une surface W ; elle est parallèle à l'intersection des plans osculateurs de $(\mathcal{A})$ et $(\mathcal{A}_1)$ aux points de paramètre α et β : on a donc une construction géométrique intéressante de S et S' : on construit d'abord la surface de translation Σ au moyen de deux courbes génératrices $(\mathcal{A})$ et $(\mathcal{A}_1)$ de rayon de torsion constant $\frac{i}{2}$ pour l'une, $\frac{-i}{2}$ pour l'autre. En chaque point μ de Σ on prend l'intersection des plans osculateurs des deux génératrices qui s'y croisent, c'est la droite qui engendre la congruence dont S et S' sont les surfaces focales.

4. Tous ces résultats établis par Darboux se retrouvent aisément. J'ai le droit (§ 3) de me borner à S ; la différentiation des formules (5) où l'on fait $\varepsilon = +1$ donne

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{2}{i\tau} dx = (c' + c_1')(dc_1'' - dc'') - (c'' + c_1'')(dc_1' - dc'), \\ \frac{2}{i\tau} dy = (c'' + c_1'')(dc_1 - dc) - (c + c_1)(dc_1'' - dc''), \\ \frac{2}{i\tau} dz = (c + c_1)(dc_1' - dc') - (c' + c_1')(dc_1 - dc). \end{cases}$$

Ces formules donnent le résultat annoncé pour la normale en M à S et le contact de MM' avec S; les résultats de M. Lelievre montrent en plus que les lignes $\alpha = \text{const.}$ et $\beta = \text{const.}$ sont les asymptotiques.

Définissons les variables H et v par les formules

$$(7) \quad H = cc_1 + c'c'_1 + c''c''_1,$$

$$(8) \quad dv = \frac{\tau}{H-1} \begin{vmatrix} c & c_1 & dc_1 - dc \\ c' & c'_1 & dc'_1 - dc' \\ c'' & c''_1 & dc''_1 - dc'' \end{vmatrix}.$$

On voit d'abord que dv est bien une différentielle totale, car la condition pour qu'il en soit ainsi peut s'écrire

$$(9) \quad \begin{vmatrix} c & c_1 & \frac{dc}{dz} & \frac{dc_1}{d\beta} \\ c' & c'_1 & \frac{dc'}{dz} & \frac{dc'_1}{d\beta} \\ c'' & c''_1 & \frac{dc''}{dz} & \frac{dc''_1}{d\beta} \\ 1-H & H-1 & -\frac{\partial H}{\partial z} & \frac{\partial H}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0.$$

Or, dans ce déterminant (9), la dernière ligne est égale à la somme des trois premières multipliées respectivement par $c - c_1$, $c' - c'_1$, $c'' - c''_1$; la vérification est donc faite.

On peut d'autre part écrire

$$(10) \quad \frac{\tau}{i^2} dx = \frac{dH}{H-1} (c'c''_1 - c''c'_1) - \frac{c-c_1}{H-1} \begin{vmatrix} c & c_1 & dc_1 - dc \\ c' & c'_1 & dc'_1 - dc' \\ c'' & c''_1 & dc''_1 - dc'' \end{vmatrix}.$$

On a en effet

$$(c - c_1)^2 + (c' - c'_1)^2 + (c'' - c''_1)^2 = 2 - 2H,$$

$$(c - c_1)(dc - dc_1) + (c' - c'_1)(dc' - dc'_1) + (c'' - c''_1)(dc'' - dc''_1) = -dH.$$

En remplaçant, au second membre de (10), dH par cette valeur, puis ordonnant par rapport aux différences $dc_1 - dc$, $dc'_1 - dc'$, $dc''_1 - dc''$, nous obtenons sans effort la valeur de dx donnée par la formule (6). J'écris

$$(11) \quad du = \frac{\tau}{2} dH \sqrt{\frac{H+1}{H-1}};$$

la formule (10) devient

$$(12) \quad dx = \frac{i(c'c_1'' - c''c_1')}{\sqrt{H^2 - 1}} du + \frac{i(c_1 - c)}{\sqrt{2(H - 1)}} \sqrt{\frac{H - 1}{2}} dv;$$

le ds^2 de la surface S est donc

$$(13) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + \frac{H - 1}{2} dv^2.$$

La comparaison des formules (11) et (13) avec les formules (2) et (3) montre bien que S et $\mathcal{Q}$ sont applicables l'une sur l'autre; le point (r, θ) de $\mathcal{Q}$ correspondant au point M de S s'obtient en écrivant ($p = 2\tau$)

$$(14) \quad \frac{r^2}{\rho^2} = \frac{H - 1}{2}, \quad \theta = \frac{v}{p},$$

H et v étant les fonctions de z et β que nous avons appris à former dans ce paragraphe.

Suivant une remarque antérieure, nous passerons de S à S' en remplaçant partout c_1, c_1', c_1'' , par $-c_1, -c_1', -c_1''$, ce qui revient à écrire

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} H' &= -cc_1 - c'c_1' - c''c_1'' = -H, \\ dv' &= \frac{-\tau}{H+1} \begin{vmatrix} c & c_1 & dc_1 + dc \\ c' & c_1' & dc_1' + dc' \\ c'' & c_1'' & dc_1'' + dc'' \end{vmatrix}, \\ du' &= -\frac{\tau}{2} dH \sqrt{\frac{H-1}{H+1}}, \\ \frac{2}{i\tau} dx' &= (c_1' - c_1')(dc'' + dc_1'') - (c_1'' - c_1'')(dc' + dc_1') \\ &= \frac{-dH}{H+1} (c'c_1'' - c''c_1') + \frac{c+c_1}{H+1} \begin{vmatrix} c & c_1 & dc_1 + dc \\ c' & c_1' & dc_1' + dc' \\ c'' & c_1'' & dc_1'' + dc'' \end{vmatrix}, \\ ds'^2 &= dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = du'^2 + \frac{H'-1}{2} dv'^2. \end{aligned} \right.$$

L'application de $\mathcal{Q}$ sur S' s'effectue par les formules

$$(16) \quad \frac{r^2}{\rho^2} = -\frac{H+1}{2}, \quad \theta = \frac{v'}{p} \quad (p = 2\tau).$$

3. Songeons maintenant aux conditions de réalité : $\mathcal{Q}$ est réel, si τ est une constante réelle. Si $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}_1)$ sont deux courbes sphériques conjuguées et si les intégrales

$$\int c'' dc' - c' dc'', \quad \int c dc'' - c'' dc', \quad \int c' dc - c dc'$$

sont prises d'un point m_0 fixe de $(\mathfrak{W})$ jusqu'à un point variable m en suivant toujours $(\mathfrak{W})$, tandis que les intégrales

$$\int c_1'' dc_1' - c_1' dc_1'', \dots$$

sont prises le long de l'arc conjugué sur $(\mathfrak{W}_1)$, les points M, M', μ sont réels; en posant $z = \lambda + \mu i$, les coordonnées de M, M', μ s'obtiennent immédiatement au moyen des paramètres réels λ, μ par formules dégagées de toute imaginaire; les trois surfaces S, S', Σ sont donc réelles. Dorénavant je me bornerai à ce cas; il sera sous-entendu que $(\mathfrak{W}_1)$ est la courbe conjuguée de $(\mathfrak{W})$; je pourrai donc dire qu'à toute courbe sphérique $(\mathfrak{W})$, *réelle ou imaginaire*, correspond (sauf translation) un couple, et un seul, de deux surfaces réelles S, S' applicables sur le paraboloïde $\mathcal{Q}$. Les coordonnées (c, c', c'') d'un point de $(\mathfrak{W})$ sont des fonctions analytiques de la variable complexe z : si l'on représente cette variable z , suivant l'usage, par un point réel d'un plan, le point figuratif de z donne une représentation plane commode de chacune des trois surfaces S, S', Σ .

Qu'arrive-t-il, si, au lieu de partir d'une courbe $(\mathfrak{W})$, nous partons d'une courbe à torsion constante supposée connue par un procédé quelconque, *réelle ou imaginaire*? Si la torsion de cette courbe n'est pas une imaginaire pure, nous effectuons d'abord sur elle une homothétie convenable de façon que le rayon de torsion devienne imaginaire pure; soit $\frac{i\tau}{2}$ la valeur du rayon de torsion de la courbe $(\mathfrak{A})$ ainsi obtenue. $(\mathfrak{A})$ est alors une courbe essentiellement imaginaire, que la courbe à torsion constante initiale soit réelle ou imaginaire; nous associons à $(\mathfrak{A})$ la courbe imaginaire conjuguée $(\mathfrak{A}_1)$, la surface Σ se trouve parfaitement définie, sans intégration. Les quantités (c, c', c'') s'obtiennent en chaque point de $(\mathfrak{A})$ par différentiations, puisque ce sont les cosinus directeurs de la binormale; les quantités conjuguées c_1, c_1', c_1'' s'en déduisant et par suite S et S' elles-mêmes. Si donc τ est donné, on

pourra encore dire qu'à toute courbe à torsion constante connue, correspond, sauf translation, un couple, et un seul, de deux surfaces S et S' applicables sur le parabolôïde $\mathcal{Q}$ de paramètre 2τ , obtenues sans intégration.

Dans les travaux antérieurs, il semble au contraire presque implicitement admis que seules les courbes à torsion constante imaginaires doivent être conservées; il importait de dissiper cette équivoque : nous verrons dans le Chapitre suivant que toute courbe sphérique (15) réelle (toujours analytique, bien entendu) donne des surfaces S et S' à centre. Nous allons immédiatement reconnaître une circonstance tout à fait curieuse de l'application de $\mathcal{Q}$ sur chacune des deux surfaces réelles S ou S' , circonstance qui avait échappé à l'attention des géomètres au même titre, et sans doute pour la même raison, que l'emploi de courbes à torsion constante réelles.

6. A chaque point réel de S correspond un point réel de $\mathcal{Q}$; la surface S supposée réalisée au moyen d'un canevas de fil flexible, mais inextensible, peut être déformée de façon à recouvrir une certaine étendue de forme plus ou moins compliquée de $\mathcal{Q}$; ce recouvrement se fait sans coupure ni couture.

Au contraire, tout point réel de S' admet sur $\mathcal{Q}$ un homologue imaginaire, de sorte qu'au point de vue expérimental rien ne peut déceler que les surfaces S' et $\mathcal{Q}$ soient applicables l'une sur l'autre.

Cette circonstance qui, au premier abord, m'avait paru tout à fait exceptionnelle, en réalité est très générale dans l'application de deux surfaces réelles : je renverrai le lecteur aux Notes que j'ai publiées aux *Comptes rendus* (17 mars 1919, 31 mars 1919, 15 mars 1920) et au Mémoire inséré au *Bulletin des Sciences mathématiques* (1920).

La vérification de la propriété énoncée est facile; je sépare le réel et l'imaginaire en posant

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = \gamma + i\gamma_1, \quad c' = \gamma' + i\gamma'_1, \quad c'' = \gamma'' + i\gamma''_1, \\ c_1 = \gamma - i\gamma_1, \quad c'_1 = \gamma' - i\gamma'_1, \quad c''_1 = \gamma'' - i\gamma''_1, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 - \gamma_1^2 - \gamma_1'^2 - \gamma_1''^2 = 1, \\ \gamma\gamma_1 + \gamma'\gamma'_1 + \gamma''\gamma''_1 = 0, \\ \text{II} : cc_1 + c'c'_1 + c''c''_1 = \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 + \gamma_1^2 + \gamma_1'^2 + \gamma_1''^2 \\ \quad = 1 + 2(\gamma_1^2 + \gamma_1'^2 + \gamma_1''^2); \end{array} \right.$$

d'où résulte finalement

$$(18) \quad \frac{H-1}{2} = \gamma_1^2 + \gamma_1'^2 + \gamma_1''^2.$$

La fonction H est donc, pour les points réels de S et S' , réelle, positive et même supérieure à 1. Elle ne peut devenir égale à 1 que si (15) admet un ou plusieurs points réels.

Cela posé, la fonction v est évidemment réelle pour les points réels de S , donc les formules (14) donnent un point réel de $\mathfrak{Q}$ correspondant à un point réel de S .

Au contraire, la fonction v' est évidemment imaginaire pure pour les points réels de S' : posons $v' = i v_1$ de façon à pouvoir écrire les formules (16) sous la forme

$$(19) \quad \frac{r}{p} = i \sqrt{\frac{H+1}{2}}, \quad \theta = i \frac{v_1}{p},$$

le point de $\mathfrak{Q}$ correspondant à un point réel de S' est donc toujours imaginaire. Nous remarquerons qu'il peut y avoir avantage à écrire l'élément linéaire de S' sous la forme

$$(20) \quad ds'^2 = du'^2 + \frac{H+1}{2} dv_1^2, \quad dv' = \frac{-i}{2} dH \sqrt{\frac{H-1}{H+1}}.$$

7. Envisageons l'ensemble, non dénombrable, des courbes sphériques (15); il lui correspond un ensemble de même puissance de surfaces réelles S et un autre de surfaces S' ; deux surfaces prises l'une dans le premier, l'autre dans le second de ces deux ensembles ne sont applicables *physiquement* l'une sur l'autre par aucune région si petite qu'elle soit, mais elles restent *analytiquement* applicables l'une sur l'autre : il suffit pour le voir de prendre $\mathfrak{Q}$ comme intermédiaire. Je désigne par S et $\bar{S}$ deux surfaces du premier ensemble, S' et $\bar{S}'$ les surfaces associées du second, H, v, v_1 et $\bar{H}, \bar{v}, \bar{v}_1$ les fonctions déjà considérées. L'application de S sur $\bar{S}$ s'effectue par les formules

$$(21) \quad H = \bar{H}, \quad v = \pm \bar{v} + \text{constante arbitraire};$$

celle de S' sur $\bar{S}'$, par les formules

$$(22) \quad H = \bar{H}, \quad v_1 = \pm \bar{v}_1 + \text{constante arbitraire}.$$

La présence de la constante arbitraire tient à cette circonstance évidente que $\mathcal{Q}$ et par suite toutes les surfaces applicables sur $\mathcal{Q}$ admettent une infinité d'applications sur elles-mêmes. Si en un point M de S et en un point $\bar{M}$ de $\bar{S}$ les deux fonctions H et $\bar{H}$ sont égales, il existe donc *deux, et deux applications seulement*, de S sur $\bar{S}$ où M vient s'appliquer sur $\bar{M}$; de même pour S' et $\bar{S}'$.

Si nous posons maintenant le problème suivant : « Deux surfaces S et $\bar{S}$ étant données, existe-t-il des applications *physiques* de S sur $\bar{S}$? » La réponse sera aisée, il suffira d'étudier le champ de variation réelle de H et de $\bar{H}$: si ces deux champs ont une partie commune, il résulte de ce qui précède qu'on peut, et d'une infinité de façons, déformer S ou $\bar{S}$ de façon que chacune d'elles recouvre la totalité ou une partie de l'autre : $\bar{S}'$ et S' posséderont cette propriété en même temps que $\bar{S}$ et S . Mais si les champs de variation réelle pour H et $\bar{H}$ n'ont aucune partie commune, il n'y aura aucune portion réelle de S susceptible de recouvrir $\bar{S}$ (et de même pour S' et $\bar{S}'$).

Si par exemple les courbès sphériques $(\mathfrak{M})$ et $(\mathfrak{M})$ sont toutes deux algébriques, les surfaces S et $\bar{S}$ correspondantes, qu'elles soient algébriques ou transcendentes, peuvent se recouvrir physiquement au moins sur certaines régions, car chacune des fonctions algébriques c , c' , c'' a son module, sa partie réelle et sa partie imaginaire susceptibles d'augmenter au delà de toutes limites; donc H et $\bar{H}$ sont tous deux susceptibles d'augmenter au delà de toutes limites; les surfaces S et $\bar{S}$ peuvent se recouvrir sur les régions correspondant aux points à l'infini de $\mathcal{Q}$.

Je donne maintenant un cas bien différent. Supposons que je choisisse pour les fonctions $c(\alpha)$ et $c'(\alpha)$ deux de ces séries, qui ont été signalées par M. Freedholm, admettant leur cercle de convergence comme coupure, à savoir

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = \Lambda + \sum_1^{\infty} a^n \alpha^{n^2}, \\ c' = \Lambda' + \sum_1^{\infty} b^n \alpha^{n^2}, \end{array} \right.$$

où A et A' sont deux constantes quelconques et a et b deux quantités réelles comprises entre 0 et 1. Les deux fonctions c et c' ne sont définies que si $|z| \leq 1$ et l'on a, dans tout le champ d'existence de c et c' ,

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(|A| - \frac{a}{1-a} \right)^2 \leq \gamma^2 + \gamma_1^2 \leq \left(|A| + \frac{a}{1-a} \right)^2, \\ \left(|A'| - \frac{b}{1-b} \right)^2 \leq \gamma'^2 + \gamma_1'^2 \leq \left(|A'| + \frac{b}{1-b} \right)^2. \end{array} \right.$$

La fonction $c'' = \sqrt{1 - c^2 - c'^2}$ a un module facile à limiter au moyen des modules de c et c' , donc

$$H = (\gamma^2 + \gamma_1^2) + (\gamma'^2 + \gamma_1'^2) + (\gamma''^2 + \gamma_1''^2)$$

reste compris entre deux limites faciles à évaluer en fonction de A , A' , a et b ⁽¹⁾. Une telle courbe sphérique (c , c' , c'') définit ainsi une surface S et une surface S' , possédant chacune un bord constituant une ligne d'arrêt de la surface, d'étendue finie toutes deux et admettant une forme parfaitement régulière; une telle surface S ne recouvre qu'une étendue finie de $\mathcal{Q}$. Si maintenant, laissant ou non a et b fixes, je donne à A et A' d'autres valeurs numériques, je définis une autre surface S ou $\bar{S}$ de même nature, et il est presque évident que je pourrai disposer de A et A' de façon que S et $\bar{S}$ ne puissent se recouvrir physiquement, car si A et A' grandissent indéfiniment les deux limites, inférieure et supérieure, trouvées précédemment pour H augmentent elles-mêmes indéfiniment.

Je n'insiste pas davantage sur ces applications de la théorie des fonctions analytiques à l'étude des surfaces applicables sur le parabolôïde. Mais je fais remarquer l'importance exceptionnelle que présente, dans l'étude de la déformation d'une surface, le parabolôïde de révolution : cela tient à ce que *toutes* les surfaces applicables sur $\mathcal{Q}$ peuvent s'obtenir par des quadratures; l'analyse déjà citée de Darboux établit ce point, j'y renvoie le lecteur:

(1) Les inégalités bien connues, relatives au module d'une somme, appliquées à l'égalité $c''^2 = 1 - c^2 - c'^2$, donnent par exemple

$$0 \leq \gamma''^2 + \gamma_1''^2 \leq 1 + (\gamma^2 + \gamma_1^2) + (\gamma'^2 + \gamma_1'^2).$$

dans ce qui précède, je n'ai vérifié que la réciproque de cette proposition de Darboux.

On sait que dans le cas général les surfaces applicables sur une surface donnée ou représentant un ds^2 donné *a priori* dépendent d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. Il y aurait lieu de chercher quelles sont, en dehors du paraboloïde de révolution, les surfaces pour lesquelles la déformation se ramène à des quadratures ⁽¹⁾.

8. Sur la surface S les courbes $c = \text{const.}$ sont les transformées des méridiens de $\mathcal{Q}$, les courbes $H = \text{const.}$ sont les transformées des parallèles, je les appellerai, pour abrégér, *méridiens* et *parallèles* de S. Les formules (6), (12), (15) montrent alors que le tableau

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{i(c_1 - c)}{\sqrt{2(H-1)}}, & \frac{i(c'_1 - c')}{\sqrt{2(H-1)}}, & \frac{i(c''_1 - c'')}{2\sqrt{(H-1)}}, \\ \frac{i(c'c'_1 - c''c'_1)}{\sqrt{H^2-1}}, & \frac{i(c''c_1 - cc'_1)}{\sqrt{H^2-1}}, & \frac{i(cc'_1 - c'c'_1)}{\sqrt{H^2-1}}, \\ \frac{c + c_1}{\sqrt{2(H+1)}}, & \frac{c' + c'_1}{\sqrt{2(H+1)}}, & \frac{c'' + c''_1}{\sqrt{2(H+1)}} \end{cases}$$

donne pour la surface S : en première ligne, les cosinus directeurs de la tangente au parallèle qui passe en M; en seconde, ceux de la tangente au méridien, à savoir MM'; en troisième, ceux de la normale en M à S. Considérons maintenant la surface S', ses parallèles ($H = \text{const.}$), ses méridiens ($c_1 = \text{const.}$) : ce même tableau donne encore les tangentes analogues, mais la normale correspond à la première ligne et le parallèle à la dernière.

La droite MM' engendre une congruence dont S et S' sont les surfaces focales, et cette congruence est bien une congruence de normales puisque les deux normales à S et S', en M et M' respectivement sont orthogonales.

Sur S, les courbes $c = \text{const.}$, $c_1 = \text{const.}$ forment deux familles

(1) Je montre en fin de Mémoire que les développées de surface minima donnent une solution encore plus précise; toutes les surfaces provenant de la déformation d'une quelconque de ces développées admettent aussi la même définition géométrique et l'on sait obtenir, explicitement, sans signe de quadrature, toutes ces surfaces.

conjuguées, de même sur S' . Les asymptotiques de S et S' sont les courbes $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$; elles sont imaginaires. Or si nous posons $z = \lambda + \mu i$, chaque point de S ou S' correspond à un point λ, μ du plan de la variable complexe z . Dans cette correspondance ponctuelle, les asymptotiques de S et S' ont pour transformées les droites isotropes du plan (λ, μ) , donc tout système conjugué tracé sur S ou S' a pour homologue, dans le plan (λ, μ) , un système orthogonal et réciproquement ⁽¹⁾.

Calculons maintenant le produit des rayons de courbure principaux en M : le calcul a été fait au paragraphe 2 pour $\mathfrak{Q}$, donc il est inutile de le refaire pour S ; désignons ce produit par ρ , on a $\rho = \tau^2 (H + 1)^2$; en tenant compte de la remarque du paragraphe 3, la quantité analogue ρ' , au point M' , est $\rho' = \tau^2 (H - 1)^2$; il était évident que, les lignes asymptotiques de S et S' étant imaginaires, la courbure totale de S ou S' devait être positive.

Extrayons les racines carrées positives :

$$(26) \quad \begin{cases} \sqrt{\rho} = \tau(H + 1), & \sqrt{\rho} - \sqrt{\rho'} = 2\tau = p, \\ \sqrt{\rho'} = \tau(H - 1), & \rho - \rho' = 4\tau^2 H, \\ \sqrt{\rho} \cdot \sqrt{\rho'} = \tau^2 (H^2 - 1) = MM'^2. \end{cases}$$

La formule $\sqrt{\rho} - \sqrt{\rho'} = p$ exprime une propriété intéressante : en chaque point M de S l'expression $\sqrt{\rho}$ est supérieure à la quantité analogue du point M' : la différence est constante et égale au paramètre de $\mathfrak{Q}$.

La formule $\sqrt{\rho} \sqrt{\rho'} = MM'^2$ n'est autre que la propriété bien connue relative aux développées d'une surface W ; elle montre ici que la différence $\sqrt{\rho} - \sqrt{\rho'}$ ne contient en réalité qu'un radical;

⁽¹⁾ La correspondance ponctuelle obtenue en associant au point M de S le point M' de S' conserve les réseaux conjugués. Soient α le point de $\mathfrak{Q}$ correspondant à M dans l'application de S sur $\mathfrak{Q}$ et α' le point analogue relatif à S' . Si Θ et Θ_1 désignent les arcs de $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}_1)$, l'équation $\Theta = \Theta_1 = \text{const.}$ donne le réseau conjugué commun à S et $\mathfrak{Q}$ dans la correspondance (M, α) et à S' et $\mathfrak{Q}$ dans la correspondance (M', α') ; or M et M' correspondent aux mêmes valeurs de Θ et Θ_1 : on a donc un réseau conjugué commun à S, S' et $\mathfrak{Q}$ dans l'une quelconque des correspondances ponctuelles $(M, \alpha), (M', \alpha'), (M, M'), (M, \alpha'), (M', \alpha), (\alpha, \alpha')$. Ces résultats découlent de propriétés signalées par M. Thybaut et que je reprendrai ultérieurement.

si nous élevons au carré cette formule $\sqrt{\rho} - \sqrt{\rho'} = p$, on aura

$$(27) \quad \begin{cases} \rho + \rho' - 2MM'^2 = p^2, \\ H = \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho' - 2MM'^2}. \end{cases}$$

9. Jusqu'ici nous avons montré comment la connaissance d'une courbe sphérique $(\mathfrak{W})$ conduisait au couple des deux surfaces réelles S et S' .

Nous savons, d'après Darboux, que, réciproquement, toute surface applicable sur un parabolôïde de révolution dérive par le procédé indiqué d'une certaine courbe $(\mathfrak{W})$.

Imaginons donc qu'une surface réelle connue, obtenue par tel procédé que l'on pourra imaginer, soit applicable sur un parabolôïde de révolution, de paramètre provisoirement inconnu; provisoirement nous ne savons pas encore si la surface est une surface S ou une surface S' . Nous allons reconnaître que, par de simples opérations algébriques, n'exigeant que des extractions de racines carrées, des différentiations et des éliminations, nous pouvons calculer p , choisir à bon escient le nom S ou S' , déterminer la courbe $(\mathfrak{W})$ et la courbe $(\mathfrak{W}_1)$, déterminer la surface complémentaire de la proposée et la surface Σ , tracer sur Σ le réseau de translation $(\mathfrak{A})$ et $(\mathfrak{A}_1)$, tracer sur S et S' les asymptotiques et les parallèles. Quant au tracé des méridiens, il exigera deux quadratures ⁽¹⁾.

En effet, par un point *quelconque* $\overline{M}$ de la surface donnée passe un parallèle et un seul, dont les équations s'obtiennent rationnellement : en effet, le long de cette courbe, la courbure totale de la surface conserve la valeur qu'elle a en $\overline{M}$; les paramètres directeurs de la tangente au parallèle de $\overline{M}$, et par suite aussi de la tangente au méridien, s'obtiendront donc rationnellement au moyen des coefficients qui figurent dans l'équation de la surface et des coordonnées du point $\overline{M}$. Ce calcul donne donc la congruence des droites $\overline{M}$, $\overline{M}'$

(¹) Il n'est peut-être pas superflu de faire remarquer que le parabolôïde $\mathfrak{Q}$ étant d'une part une surface de révolution, d'autre part une surface de translation engendrée par deux courbes planes placées dans des plans rectangulaires, nous avons *a priori* deux classes particulières de surfaces applicables sur le parabolôïde : surfaces de révolution ou hélicoïdales et surfaces de translation.

et sur chacune les coordonnées du second point focal $\overline{M}$ exprimées rationnellement au moyen de celles de $\overline{M}$; autrement dit, la seconde surface focale elle-même est connue : la comparaison des valeurs de $\bar{z}$ et $\bar{z}'$ en $\overline{M}$ et M' permet donc d'attribuer les noms S et S' , M et M' aux éléments qui le méritent. Le paramètre inconnu p est obtenu par la racine carrée

$$p = \sqrt{\bar{z} + \bar{z}' - 2MM'^2}.$$

Si l'on songe que les deux équations $x^2 + y^2 = \pm 2pz$ représentent des paraboloides égaux, on ne doit pas s'étonner que seul p^2 soit donné rationnellement. La seconde formule (27) donne Π rationnellement. Appelons u, v, w les paramètres directeurs de la tangente au parallèle de M ou de la normale en M' à S' ; u', v', w' les paramètres directeurs de la tangente au parallèle de M' ou de la normale en M à S . D'après le tableau (25), on aura, η et η' désignant $+1$ ou -1 ,

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{i(c_1 - c)}{\sqrt{2(\Pi - 1)}} = \frac{\eta u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, & \dots \\ \frac{c + c_1}{\sqrt{2(\Pi + 1)}} = \frac{\eta' u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}, & \dots \end{cases}$$

avec quatre nouvelles racines carrées

$$\sqrt{\Pi - 1}, \quad \sqrt{\Pi + 1}, \quad \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \quad \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}$$

que nous prenons positivement.

Si l'on se rappelle que

$$\begin{aligned} x_M - x_{M'} &= i\tau(c'e_1'' - c''e_1') \\ &= \frac{\tau}{2} \begin{vmatrix} c_1' + c' & c_1'' + c'' \\ i(c_1' - c') & i(c_1'' - c'') \end{vmatrix} \\ &= \eta_1 \eta' \frac{wv' - cw'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}} \tau \sqrt{(\Pi^2 - 1)}, \end{aligned}$$

on voit que l'on pourra prendre η_1 arbitrairement égal à $+1$ ou -1 et la formule précédente fixera le signe de η_1' . Cette détermination faite, on déduit de (28) par additions et soustractions $c, c', c'', c_1, c_1', c_1''$; l'ensemble de ces valeurs n'admet au total que deux systèmes de solutions égales et de signes contraires : on devait, en

effet, trouver deux courbes conjuguées $(\mathfrak{W})$, $(\mathfrak{W}_1)$ ou les deux courbes symétriques $(\mathfrak{W}')$, $(\mathfrak{W}'_1)$.

Si donc a et b sont les paramètres curvilignes dont dépendent sur S les coordonnées de M , on a obtenu algébriquement

$$c = f(a, b), \quad c' = \varphi(a, b), \quad c'' = \psi(a, b).$$

L'une ou l'autre des trois équations équivalentes $f(a, b) = \text{const.}$ ou $\varphi(a, b) = \text{const.}$ ou $\psi(a, b) = \text{const.}$ détermine sur S et S' une famille d'asymptotiques, et sur Σ une famille de courbes à torsion constante $(\mathfrak{A})$; les lignes imaginaires conjuguées donnent les secondes asymptotiques ou les courbes $(\mathfrak{A}_1)$. Conformément aux prévisions, tous les éléments géométriques ont été obtenus par différentiations, éliminations et calculs algébriques n'exigeant, au plus, que cinq radicaux carrés. Seule, la détermination des méridiens ou l'application effective des S sur $\mathfrak{Q}$ exige deux quadratures.

10. La construction géométrique rappelée au paragraphe 3 montre bien que si l'on imprime à la sphère, portant les deux courbes $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}_1)$ *conjuguées*, le déplacement *réel* le plus général autour de l'origine, $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}_1)$ ne cessent pas d'être conjuguées et les deux surfaces S et S' ne font que participer au déplacement général de la figure. Si sur la courbe $(\mathfrak{W})$ on a posé

$$(29) \quad u = \frac{c + ic'}{1 - c''}, \quad v = -\frac{c + ic'}{1 + c''},$$

les quantités u et v sont fonctions du paramètre z et le déplacement le plus général et *réel* correspond à effectuer sur u et v la même substitution homographique

$$(30) \quad u = \frac{mu' + n}{-n_0 u' + m_0}, \quad v = \frac{mv' + n}{-n_0 v' + m_0},$$

où m et n sont deux constantes quelconques dont m_0 et n_0 sont les conjuguées.

Mais qu'arrive-t-il si nous imprimons à la sphère, autour de son centre, un déplacement arbitraire *non réel*? La courbe $(\mathfrak{W})$ est remplacée par une courbe $(\overline{\mathfrak{W}})$; nous associons à cette

courbe $(\overline{\mathfrak{W}})$, puisque nous nous bornons aux surfaces réelles, la courbe conjuguée $(\overline{\mathfrak{W}}_1)$, laquelle se déduit de $(\mathfrak{W}_1)$, non pas par le mouvement considéré, mais par le mouvement conjugué. Nous allons chercher quelle relation existe entre la surface primitive S (ou S') et la surface finale $\overline{S}$ (ou $\overline{S}'$). L'opération qui fait passer de $(\mathfrak{W})$ à $(\overline{\mathfrak{W}})$ se traduit par une substitution

$$(31) \quad U = \frac{\Lambda u + B}{C u + D}, \quad V = \frac{\Lambda v + B}{C v + D},$$

où A, B, C, D sont des constantes arbitraires, réelles ou imaginaires; comme on peut réduire l'une d'elles à l'unité, cette substitution (31) met en jeu six paramètres réels. Il est facile de voir que cette substitution (31) équivaut à deux opérations successives :

$$(32) \quad \begin{cases} u = \frac{mu + n}{-n_0 u' + m_0}, & v = \frac{mv' + n}{-n_0 v' + m_0}, \\ U = \lambda u' + \mu + \nu i, & V = \lambda v' + \mu + \nu i, \end{cases}$$

dont la première est un déplacement réel; dans la seconde, λ, μ, ν sont trois constantes réelles.

En effet, si C est nul, D ne l'est pas, nous pouvons le supposer égal à 1, et la substitution (31) peut s'écrire, en appelant α l'argument de Λ ,

$$U = (\Lambda e^{-i\alpha}) u e^{i\alpha} + B, \quad V = (\Lambda e^{-i\alpha}) v e^{i\alpha} + B,$$

ou encore

$$(33) \quad \begin{cases} u = u' e^{-i\alpha}, & v = v' e^{-i\alpha}, \\ U = (\Lambda e^{-i\alpha}) u' + B, & V = (\Lambda e^{-i\alpha}) v' + B; \end{cases}$$

la première opération est précisément une rotation réelle autour de Oz et le résultat est obtenu dans ce cas.

Si C n'est pas nul, nous écrivons, pour remplacer (31),

$$(33) \quad \begin{cases} u = \frac{mu' + n}{-n_0 u' + m_0}, & v = \frac{mv' + n}{-n_0 v' + m_0}, \\ U = \frac{\Lambda(mu' + n) + B(-n_0 u' + m_0)}{C(mu' + n) + D(-n_0 u' + m_0)}, & V = \dots \end{cases}$$

Choisissons m et n de sorte que $Cm - Dn_0$ soit nul, ce qui est possible d'une infinité de façons : d'après ce qui précède, nous

aurons donc le droit d'écrire, avec ces valeurs de m et n ,

$$(35) \quad \begin{cases} u = \frac{mu' + n}{-n_0u' + m_0}, & v = \frac{mv' + n}{-n_0v' + m_0}, \\ u' = u'' e^{i\alpha}, & v' = v'' e^{i\alpha}, \\ U = \lambda u'' + \mu + \nu i, & V = \lambda v'' + \mu + \nu i. \end{cases}$$

Or, remplacer (u, v) par (u', v') puis (u', v') par (u'', v'') revient à effectuer successivement deux déplacements réels autour de l'origine, de sorte que, définitivement, nous avons passé de (u, v) à (u'', v'') par un déplacement réel, puis de (u'', v'') à (U, V) par l'une de ces substitutions à trois paramètres réels, qui est du type de la seconde opération (32). Nous avons donc bien établi que la substitution (31) se ramène dans tous les cas aux opérations (32). Remarquons encore qu'on peut écrire (31) sous la forme

$$(31') \quad u = \frac{DU - B}{-CU + A}, \quad v = \frac{DV - B}{-CV + A},$$

qui, somme toute, ne diffère de (31) que par l'échange de u avec U , v avec V , et par les valeurs numériques données aux coefficients; donc la substitution (31) ou (31'') est encore équivalente aux deux opérations successives

$$(36) \quad \begin{cases} u = Lu' + M + Ni, & v = Lv' + M + Ni, \\ U = \frac{pu' + q}{-q_0u' + p_0}, & V = \frac{pv' + q}{-q_0v' + p_0}, \end{cases}$$

qui sont encore du même type que les opérations (32), mais dans l'ordre inverse, et avec des coefficients numériques différents.

Donc remplacer (u, v) par (U, V) revient d'abord, si l'on adopte la forme (36), à remplacer (u, v) par (u', v') ; la surface S est alors remplacée par une surface $\bar{S}$ dépendant des constantes L, M, N qui sont des paramètres de *forme* et non plus des paramètres de *déplacement*; quand on remplace ensuite (u', v') par (U, V) , la surface $\bar{S}$ ne subit plus qu'un déplacement, transformation banale.

Nous nous sommes donc débarrassés des trois paramètres de déplacement qui entrent en jeu dans (31) et il ne nous reste plus

que trois paramètres de forme. Cette réduction serait possible de bien d'autres façons : on aurait pu, par exemple, dire qu'un déplacement *imaginaire* tel que (31) revient à une première rotation *réelle* d'amplitude arbitraire autour d'un diamètre réel arbitraire de la sphère suivie d'une seconde *rotation d'amplitude imaginaire pure* autour d'un nouveau diamètre réel arbitraire de la sphère; ces deux opérations peuvent, d'ailleurs, être remplacées par deux opérations de même espèce, mais prises en ordre inverse. L'opération que j'ai conservée

$$u = Lu' + M + Ni, \quad v = Lv' + M + Ni,$$

où L, M, N sont réelles, est peut-être plus appropriée au problème actuel ⁽¹⁾. En tous les cas, le résultat fondamental est établi : *Toute surface S applicable sur le paraboloïde $\mathcal{Q}$ fait connaître immédiatement une nouvelle série de surfaces $\bar{S}$ applicables sur $\mathcal{Q}$, non égales à la surface initiale, dépendant de trois paramètres de forme. De plus, la surface $\bar{S}$ correspondant à des valeurs données de L, M, N s'obtient, quand S est connue, sans intégration, précisément par les opérations énoncées au paragraphe précédent; les coordonnées de chaque point de $\bar{S}$ s'obtiennent algébriquement au moyen des coordonnées du point correspondant de S . Si donc S est algébrique, $\bar{S}$ l'est aussi et réciproquement.*

En effet, S étant connue, nous avons eu successivement $p, c, c', c'', c_1, c'_1, c''_1$ et le réseau des courbes de translation tracées sur Σ . On a ensuite

$$u = \frac{c + ic'}{1 - c''}, \quad v = \frac{c + ic'}{1 + c''}.$$

Les formules (A) données au paragraphe 3 donnent, pour une

⁽¹⁾ M. Goursat, aux *Acta mathematica*, t. XI, a précisément étudié cette même transformation appliquée aux surfaces minima. D'autre part, S fait connaître un couple des surfaces minima se correspondant comme focales d'une même congruence rectiligne, avec conservation des asymptotiques et des lignes de longueur nulle. Les surfaces $\bar{S}$ fournissent alors les divers couples de surfaces minima qui se déduisent du premier par la transformation de M. Goursat.

courbe $(\mathcal{A})$ de Σ ,

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{1 - uv}{u - v}, \quad c' = i \frac{1 + uv}{u - v}, \quad c'' = \frac{u - v}{u - v}, \\ x + iy = -\tau \int \frac{v^2 du + u^2 dv}{(u - v)^2}, \\ x - iy = -\tau \int \frac{du + dv}{(u - v)^2}, \\ z = -\tau \int \frac{u dv + v du}{(u - v)^2}. \end{array} \right.$$

Cheminons donc sur la surface Σ connue, le long d'une courbe $(\mathcal{A})$, ce qui est possible, ces courbes étant connues, on a

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x + iy}{-\tau} = \int \frac{v^2 du + u^2 dv}{(u - v)^2}, \quad \frac{c + ic'}{2} = \int \frac{v^2 du - u^2 dv}{(u - v)^2}, \\ \frac{x - iy}{\tau} = \int \frac{du + dv}{(u - v)^2}, \quad \frac{c - ic'}{2} = \int \frac{dv - du}{(u - v)^2}, \\ \frac{z}{\tau} = \int \frac{u dv + v du}{(u - v)^2}, \quad c'' = \int \frac{u dv - v du}{(u - v)^2}. \end{array} \right.$$

On en conclut, par addition et soustraction, la valeur des six intégrales :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{du}{(u - v)^2}, \quad \int \frac{v du}{(u - v)^2}, \quad \int \frac{v^2 du}{(u - v)^2}, \\ \int \frac{dv}{(u - v)^2}, \quad \int \frac{u dv}{(u - v)^2}, \quad \int \frac{u^2 dv}{(u - v)^2}. \end{array} \right.$$

Pour obtenir la surface $\bar{S}$ il suffit de savoir calculer les coordonnées d'un point de la courbe $(\bar{\mathcal{A}})$, c'est-à-dire les intégrales analogues à (39) où u et v sont remplacées par u' et v' : or, on constate immédiatement que chacune des six intégrales

$$\int \frac{du'}{(u' - v')^2}, \quad \int \frac{v' du'}{(u' - v')^2}, \quad \dots$$

est une expression linéaire à coefficients constants des intégrales (39); la proposition est donc établie.

CHAPITRE II.

ÉTUDE SPÉCIALE DES SURFACES ALGÈBRIQUES. SYMÉTRIES. POINTS À L'INFINI.
SURFACES TRANSCENDANTES DE RÉVOLUTION OU HÉLICOÏDALES.

1. Je me bornerai désormais aux surfaces S ou S' non seulement réelles, mais *algébriques*. Les résultats du paragraphe 9 du Chapitre précédent prouvent bien que S , S' , Σ sont ensemble algébriques ou transcendentes. La condition nécessaire et suffisante pour que ces trois surfaces soient algébriques est que la courbe $(\mathcal{A})$ soit algébrique elle-même : autrement dit, la courbe $(\mathfrak{W})$, ou le cône C , non seulement sont algébriques, mais satisfont encore aux conditions que j'ai étudiées au Mémoire déjà cité sur les courbes à torsion constante ⁽¹⁾.

Les résultats obtenus confirment une fois de plus la nécessité de distinguer le cas où $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}')$ sont distinctes et celui où elles ne forment qu'une même courbe analytiquement indécomposable.

Soit d'abord le premier cas : à un point M de S s'associent les points $m(c, c', c'')$ de $(\mathfrak{W})$ et $m_1(c_1, c'_1, c''_1)$ de $(\mathfrak{W}_1)$ ou bien les deux points diamétralement opposés m' et m'_1 de $(\mathfrak{W}')$ et $(\mathfrak{W}'_1)$. Adoptons par exemple m, m_1 ; décrivons sur S à partir de M un circuit fermé continu quelconque : les points m, m_1 suivis par continuité restent sur $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}_1)$ sans pouvoir passer sur $(\mathfrak{W}')$ ou $(\mathfrak{W}'_1)$; donc, au retour en M , on retrouve le couple m, m_1 ; portons sur la normale en M un vecteur MU de projections $c + c_1, c' + c'_1, c'' + c''_1$ et par suite de longueur $\sqrt{2(H+1)}$: si le circuit fermé est *réel*, ce vecteur ne s'annule pas, et, suivi par continuité, se retrouve au retour porté sur la direction initiale et non sur la direction opposée. Il résulte de là, qu'au point de vue réel, la surface S a deux côtés bien distincts; au point de vue analytique pur, cela n'est pas nécessairement vrai, car le radical $\sqrt{H+1}$ ne sera pas, en général, une expression rationnelle par rapport aux coordonnées de M .

⁽¹⁾ *Annales de l'École Normale supérieure*, 1919; voir en particulier le Chapitre II de ce Mémoire, p. 172 à 305.

Pour la surface S' , je considère de même le vecteur $i(c_1 - c)$, $i(c'_1 - c')$, $i(c''_1 - c'')$, soit $M'U'$, de longueur $\sqrt{2(H-1)}$; pour les points réels de S et S' , nous savons que H est positif et supérieur à 1, sauf le cas où la courbe $(\mathfrak{W})$ admet un ou plusieurs points réels, qui lui sont communs avec $(\mathfrak{W}_1)$. Si donc nous supposons que $(\mathfrak{W})$ n'admet aucun point réel, la surface S' a, comme S , deux côtés distincts au point de vue réel, mais non au point de vue analytique. Si $(\mathfrak{W})$, sans être réelle au sens vulgaire, admet des points réels, chacun de ces points donne un point réel et *régulier* de S , un point réel et *singulier* de S' ; nous pourrions éviter de faire passer le circuit fermé de S ou S' par ces points, en nombre fini, et alors une telle circulation ne change pas le sens de demi-normale adopté pour S' . Si la courbe $(\mathfrak{W})$ est réelle au sens vulgaire, chacune des surfaces S et S' admet un même point réel ω pour centre de symétrie, ω étant point conique de S et S' ; les deux côtés de S sont encore distincts au point de vue pratique. Quant à S' , exactement comme dans le cas où $(\mathfrak{W})$ admet des points réels isolés, ce ne sera plus que par convention que les deux côtés de la surface seront distingués par le vecteur $M'U'$. Je reviendrai sur ce cas.

2. On obtient des résultats bien distincts si le cône C , et par suite, le cône conjugué C_1 coupent la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ suivant une courbe indécomposable ⁽¹⁾. Nous avons d'abord remarqué que S et S' constituent les deux nappes d'une même surface analytique (supposée de plus, ici, algébrique). Ces deux nappes se distinguent pratiquement par ce fait que S peut recouvrir $\mathcal{Q}$, tandis que S' ne le peut. Nous trouverons bientôt d'autres raisons plus intuitives, à simple aspect. Considérons maintenant un point M réel de S , qui correspond à un point m de $(\mathfrak{W})$ et au point m_1 , imaginaire conjugué de m , pris sur $(\mathfrak{W}_1)$ ou encore au

⁽¹⁾ La surface S étant connue, en suivant la marche du paragraphe 9 du Chapitre précédent, on forme les expressions H ; $u^2 + v^2 + w^2$; $u'^2 = v'^2 + w'^2$ qui sont rationnelles par rapport aux coordonnées de M . Pour que $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}')$ soient analytiquement distinctes, il faut et il suffit que les deux expressions $\frac{H-1}{u^2+v^2+w^2}$ et $\frac{H+1}{u'^2+v'^2+w'^2}$ soient les carrés d'expressions rationnelles convenablement choisies.

couple des deux points diamétralement opposés m' et m'_1 . Les coordonnées c, c', c'' du point m étant fonctions du paramètre complexe z , je joins, dans le plan de cette variable complexe z , les points figuratifs de m et m' par une courbe arbitraire; nous supposons que m décrive l'arc sphérique correspondant, m_1 restant le conjugué de m ; nous décrivons sur S un circuit réel partant de M et y revenant; au retour, nous obtenons pour c, c', c'' suivies par continuité les déterminations opposées; le vecteur MU déjà considéré, porté sur la normale, de longueur $\sqrt{2(H+1)}$ toujours non nulle, est retrouvé au retour, avec des projections égales et de signe contraire: donc ce circuit, continu et réel, tracé sur S , a changé le sens de la demi-normale suivie par continuité; la surface S n'a donc qu'un côté.

Pour S' , le résultat est le même, la démonstration est identique, si $(\mathfrak{W})$ n'a qu'un nombre fini ou nul de points réels: on trace le circuit dans le plan (z) de façon à éviter ces points, de sorte que $\sqrt{H-1}$ ne s'annule pas. Si $(\mathfrak{W})$ est une courbe réelle au sens vulgaire, comme précédemment S et S' admettent un centre commun et le résultat relatif à S' aura besoin d'être revu à part.

Les exemples les plus simples sont donnés dans mon Mémoire de l'École Normale: page 336, cône C réel du degré 6, coupant la sphère suivant deux courbes $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}')$ distinctes de degré 6; page 331, cône C réel de degré 5 coupant la sphère suivant une courbe unique de degré 10; page 308, en courbes sphériques imaginaires, cubique de M. Lyon, qui sera étudiée plus loin en détail, $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}')$ sont deux courbes distinctes du second degré; pages 332 à 335 divers exemples de cônes du degré 5 donnant une courbe $(\mathfrak{W})$ indécomposable du degré 10 et imaginaire.

3. Revenons au premier cas: $(\mathfrak{W})$ distincte de $(\mathfrak{W}')$; S et S' sont analytiquement distinctes, chacune est connexe, ainsi que Σ (rappelons que nous supposons S et S' réelles et algébriques). En effet, à un point M quelconque de S correspond un point et un seul m de $\mathfrak{W}$, de même à un point N correspond un point n ; c, c', c'' étant fonctions de la variable complexe z , marquons dans le plan (z) les points figuratifs de m et n : il existe manifestement une infinité de chemins finis et continus joignant m à n et par

suite une infinité de chemins réels finis reliant sur S les points réels M et N sans quitter S . Même remarque pour S' et Σ .

Si $(\mathfrak{B})$ n'est pas analytiquement distincte de $(\mathfrak{B}')$, S et S' ne sont pas analytiquement distinctes : soient M et M' deux points réels associés de S et S' ; à ce couple correspondent un premier couple de points imaginaires conjugués m et m_1 sur $(\mathfrak{B})$ et $(\mathfrak{B}_1)$ et le second couple m' , m'_1 . On peut dire (Chap. I, § 3) que M correspond à m et m_1 ou bien à m' et m'_1 ; mais on peut dire aussi que M' correspond (avec $\varepsilon = +1$) à m et m'_1 ou à m' et m_1 . Mais alors, pour passer d'un chemin continu de M à M' , il faut disposer de α et β de façon :

Soit à partir de m sur $(\mathfrak{B})$ et m_1 sur $(\mathfrak{B}_1)$ pour aboutir respectivement à m et m'_1 ;

Soit à partir de m et m_1 pour aboutir à m' et m_1 ;

Soit à décrire sur $(\mathfrak{B})$ et $(\mathfrak{B}_1)$ les arcs diamétralement opposés à ceux que nous venons de considérer.

Dans aucun des cas, les arcs décrits sur $(\mathfrak{B})$ et $(\mathfrak{B}_1)$ ne sont imaginaires conjugués l'un de l'autre; donc on a bien, sur la surface analytique (S, S') , circulé d'une façon continue de M en M' sans quitter cette surface, mais le chemin est nécessairement imaginaire sur une certaine étendue. S et S' sont donc bien deux nappes de surface distinctes, séparées l'une de l'autre; si elles sont réalisées matériellement, ce fait sautera aux yeux. Elles peuvent peut être se traverser soit le long d'une ligne double, soit en un point conique (dans le cas d'un centre de symétrie, par exemple), mais la variation continue du plan tangent permettra, si cet accident se produit, de discriminer S et S' . En tout cas la même démonstration que précédemment montre que l'on peut joindre d'un trait continu sur S deux points réels quelconques M et N de cette nappe S ; de même sur S' . Et il est clair qu'un point réel M de S et un point réel N' de S' ne peuvent être joints par un arc réel. Nous avons vu, plus haut, qu'il y avait lieu sur S de distinguer deux sortes de circuits fermés : ceux qui ne changent pas le sens de la demi-normale et ceux qui le changent.

4. Cherchons maintenant à quelles conditions S, S', Σ admettent un centre, un plan ou un axe de symétrie ou encore un axe de rotation.

Il suffit de songer à la congruence des droites MM' pour voir qu'une telle propriété ne peut appartenir à l'une des trois surfaces, sans appartenir aussi aux deux autres.

Je mettrai à contribution le beau Mémoire de M. Goursat (*Annales de l'École Normale*, 1887) sur les surfaces admettant les symétries d'un polyèdre régulier. Je généraliserai d'abord la notion de surfaces *simples* ou *doubles* de cet auteur : il réserve le nom de *surfaces simples* à celles, telles que la sphère, le tore, les surfaces minima simples, etc., dont on peut séparer analytiquement, en chaque point, les deux directions opposées portées par la normale. Sur les surfaces doubles, au contraire, une circulation convenablement choisie, à partir d'un point quelconque pour y revenir, échange ces deux directions : mais pour les unes, telles que les surfaces minima algébriques doubles, ou la surface réglée d'équation

$$y^2(1-z) = x^2(1+z),$$

cette circonstance peut se réaliser avec des circuits réels, tandis que pour les autres, tel l'ellipsoïde, elle ne se réalise qu'avec des circuits imaginaires. En me plaçant cette fois au point de vue du profane, je pourrai donc convenir de faire passer dans la catégorie des surfaces simples les surfaces doubles dont le sens de la normale reste inaliéré par les circulations réelles. C'est cette nouvelle définition que j'adopte maintenant.

Soit alors une surface simple, qui admet un centre (ou un plan, ou un axe) de symétrie. Considérons en chaque point la normale dirigée du côté adopté une fois pour toutes sur toute l'étendue de la surface; soient deux points M, N qui se correspondent dans cette symétrie. Si les deux demi-normales en M, N résultent effectivement l'une de l'autre par cette symétrie, je dirai que la symétrie est de *première espèce*; si au contraire la symétrique de la demi-normale en M est directement opposée à la demi-normale de N , je dirai que la symétrie est de *deuxième espèce*. Ceci est d'ailleurs la définition et le langage de M. Goursat transposés ici. On retrouve les mêmes conséquences : par exemple, si une surface simple S admet un plan de symétrie P et si l'un des morceaux de l'intersection de S et P est géodésique pour S , P est plan de symétrie de première espèce; l'intersection d'une surface simple S

avec un plan de symétrie de deuxième espèce est nécessairement ligne multiple, etc.

J'adopte aussi les conventions de M. Goursat pour l'emploi des mots : *fonction réelle*, *ligne* ou *surface réelle*. Une surface est dite *réelle*, si elle est identique à sa conjuguée : le cône isotrope $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ au point de vue de M. Goursat est réel. Quand ce sera nécessaire, j'adopterai l'écriture : réel (r) ou réel (g) quand il s'agira de la réalité au sens du profane ou de la réalité au sens de M. Goursat.

§. Cela nous guidera dans l'étude de la symétrie par rapport à un point ω .

Nous savons que le rayon de torsion d'une courbe est une quantité possédant un signe propre : une symétrie par rapport à un point ou un plan en change le signe, une symétrie par rapport à une droite le laisse inaltéré.

Soient donc les trois points associés M, M', μ de S, S' Σ et les symétriques respectifs N, N', ν par rapport au centre ω . En μ se croisent sur Σ deux courbes $(\mathcal{A}^\mu)$ et $(\mathcal{A}'_1)$ de rayon de torsion $\frac{i\tau}{2}$ et $\frac{-i\tau}{2}$ respectivement; en ν se croisent deux courbes à torsion constante symétriques, dans leur ensemble, des précédentes par rapport à ω . La remarque précédente nous montre donc que $(\mathcal{A}^\mu)$ a pour symétrique $(\mathcal{A}^\nu_1)$. La symétrie remplace la normale $(c + c_1, c' + c'_1, c'' + c''_1)$ par une droite, parallèle de même sens ou non, on en conclut donc qu'elle produit l'un des deux échanges ci-dessous :

$$(1) \quad \begin{cases} c, & c', & c''; & c_1, & c'_1, & c''_1; \\ c_1, & c'_1, & c''_1; & c, & c', & c''. \end{cases}$$

ou

$$(2) \quad \begin{cases} c, & c', & c''; & c_1, & c'_1, & c''_1, \\ -c_1, & -c'_1, & -c''_1; & -c, & -c', & -c''. \end{cases}$$

La courbe $(\mathcal{A})$, lieu du point (c, c', c'') , se trouve, dans le premier cas, lieu également du point (c_1, c'_1, c''_1) et coïncide donc avec $(\mathcal{A}_1)$; dans le second cas elle coïncide avec $(\mathcal{A}'_1)$. De toutes façons, C et C_1 coïncident, C est réel (r) ou (g).

Quand le cône C est réel (r), la courbe $(\mathcal{A})$ est réelle (r), donc coïncide nécessairement avec $(\mathcal{A}_1)$; si $(\mathcal{A})$ et $(\mathcal{A}')$ sont distinctes,

le fait que $(\mathfrak{W})$ coïncide avec $(\mathfrak{W}_1)$ et non $(\mathfrak{W}_1)$ entraîne que C soit réel $(\mathfrak{G})$ seulement. Mais si le cône C est réel $(\mathfrak{G})$, il peut arriver, suivant le cas, que $(\mathfrak{W})$ coïncide soit avec $(\mathfrak{W}_1)$, soit avec $(\mathfrak{W}'_1)$.

Réciproquement, supposons C et C_1 coïncidant : les surfaces S, S', Σ , *pourvu qu'elles soient algébriques*, ont un centre commun de symétrie. Considérons la section σ de C par le plan $z=1$ et le point $P(\xi, \tau_1, 1)$ où la droite Om perce le plan $z=1$. J'écris pour S, S' ou Σ

$$(3) \quad x = \frac{i\tau}{2} \int_Q^P \frac{d\tau_1}{\xi^2 + \tau_1^2 + 1} - \frac{i\tau}{2} \int_{Q_1}^{P_1} \frac{d\tau_1}{\xi^2 + \tau_1^2 + 1} + \frac{\varepsilon i\tau}{2} (c'c'_1 - c''c'_1),$$

où Q est un point fixe de σ , Q_1 le point conjugué, situé aussi sur σ en vertu de l'hypothèse; P et P_1 sont les points $(\frac{c}{c''}, \frac{c'}{c''}, 1)$ et $(\frac{c_1}{c''_1}, \frac{c'_1}{c''_1}, 1)$ conjugués sur σ .

Échangeons P avec P_1 , nous avons un nouveau point de la surface

$$(4) \quad x_1 = \frac{i\tau}{2} \int_Q^{P_1} \frac{d\tau_1}{\xi^2 + \tau_1^2 + 1} - \frac{i\tau}{2} \int_{Q_1}^P \frac{d\tau_1}{\xi^2 + \tau_1^2 + 1} - \frac{\varepsilon i\tau}{2} (c'c'_1 - c''c'_1).$$

En ajoutant

$$(5) \quad x + x_1 = \frac{i\tau}{2} \left(\int_Q^P + \int_P^{Q_1} + \int_{Q_1}^{P_1} + \int_{P_1}^Q \right) = i\tau \int_Q^{Q_1}.$$

Ceci prouve que $x + x_1$ est une constante, d'ailleurs réelle, car $\int_Q^{Q_1}$ a pour conjuguée $\int_{Q_1}^Q$, de sorte que $\int_Q^{Q_1}$ est une imaginaire pure. Le raisonnement est le même pour $y + y_1; z + z_1$; donc nous avons bien vérifié l'existence d'un centre commun aux trois surfaces. La démonstration suppose bien que les intégrales curvilignes n'aient qu'une détermination, les limites étant données; si les surfaces étaient transcendentes, notre raisonnement serait en défaut, au moins dans certains cas. Il existe des surfaces transcendentes à centre (surfaces de révolution); pour de telles surfaces il est toujours nécessaire, mais non suffisant, que C soit réel (c) ou (c_1) .

Revenons aux surfaces algébriques et supposons C réel (c) . Les

points m et m_1 peuvent, sans cesser d'être conjugués, tendre vers un même point réel de la courbe $(\mathfrak{M})$: quand m et m_1 sont confondus, les trois points M , M' , μ se trouvent confondus tous avec ω : la normale en M à S est devenue la parallèle à la droite Om , binormale de $(\mathfrak{A})$. Donc le centre ω est un point conique de S , le cône des tangentes en ω étant constitué par les parallèles aux tangentes de la courbe $(\mathfrak{A})$ (ou supplémentaire de C) ; quant à la surface S' , la normale, étant toujours parallèle à la droite mm_1 , devient à la limite parallèle à la tangente en m à $(\mathfrak{M})$: cette tangente est parallèle à la normale principale de $(\mathfrak{A})$: donc le point ω est aussi conique pour S' , le cône des tangentes est supplémentaire du cône directeur des normales principales de $(\mathfrak{A})$ [ou du cône directeur des tangentes de $(\mathfrak{M})$]. Quant au plan tangent à Σ , tant que m et m_1 sont distincts ou non diamétralement opposés, le plan tangent à Σ est parallèle aux tangentes en $(\mathfrak{A})$ aux points correspondants à m et m_1 : à la limite on trouve donc le plan osculateur, donc ω est aussi conique pour Σ et le cône circonscrit à Σ au point ω est celui déjà trouvé pour S .

Dans l'hypothèse qui vient d'être examinée, C réel (c) , peu importe que $(\mathfrak{M})$ soit ou non distincte de $(\mathfrak{M}')$; le point ω est point conique réel non isolé de S , S' , et Σ . Si nous supposons maintenant $(\mathfrak{M})$ réelle (g) seulement, distincte ou non de $(\mathfrak{M}')$, C aussi est réel (g) seulement, le point ω , toujours réel, est point conique isolé de S , S' , et Σ , les cônes des tangentes étant toujours ceux que nous avons indiqués.

La dernière hypothèse, enfin, est que $(\mathfrak{M})$ coïncide avec $(\mathfrak{M}_1')$, mais non avec $(\mathfrak{M}_1)$, ce qui entraîne que $(\mathfrak{M})$ et $(\mathfrak{M}')$ soient distinctes ; C est encore réel (g) ; le point ω , réel, est conique isolé encore pour S , S' , Σ : mais cette fois le cône supplémentaire de C ayant ω pour sommet est circonscrit en ω à S' et non à S , il reste circonscrit à Σ et le cône directeur des tangentes de $(\mathfrak{M})$ est circonscrit à S et non S' .

6. Si nous supposons $(\mathfrak{M})$ et $(\mathfrak{M}')$ distinctes de sorte que S et S' soient surfaces simples, la considération des vecteurs MU et $M'U'$ suivis par continuité jusqu'à la position NV ou $N'V'$, qu'ils prennent en N et N' , montre que la symétrie est de première espèce pour S' et de seconde pour S si $(\mathfrak{M})$ coïncide avec $(\mathfrak{M}_1)$, qu'elle

soit réelle (ϵ) ou (g). Si ($\mathfrak{M}$) coïncide avec ($\mathfrak{M}'_1$), c'est l'inverse qui a lieu : première espèce pour S , seconde pour S' .

Si nous supposons que ($\mathfrak{M}$) est réelle au sens vulgaire, les cosinus c , c' , c'' sont fonctions d'une variable complexe $z = \lambda + \mu i$ que nous pouvons supposer choisie de sorte que les points réels de ($\mathfrak{M}$) correspondent aux valeurs réelles de z ; de la sorte un point réel M de S étant figuré, comme nous l'avons dit, par le point (λ, μ) dans le plan (z), le point symétrique N est figuré par le point $(\lambda, -\mu)$. Si donc nous circulons sur S depuis M jusqu'en N , nous circulons dans le plan (z) depuis le point (λ, μ) jusqu'au point $(\lambda, -\mu)$, donc nous rencontrons nécessairement l'axe réel du plan (z) et sur S nous passons en ω ; de même sur S' on ne peut passer de M' à N' sans passer en ω . Le centre ω partage donc S (ou S') en deux régions symétriques l'une de l'autre, telles que deux points de chacune peuvent être joints par un chemin réel, fini, restant toujours sur cette région, tandis que pour aller d'un point de l'une à un point de l'autre, on doit nécessairement passer au point ω .

Au paragraphe 2 de ce Chapitre j'ai signalé une certaine difficulté à définir un côté sur la surface S' , quand ($\mathfrak{M}$) est réelle (ϵ), parce que le vecteur $M'U'$ de projections $i(c_1 - c)$, $i(c'_1 - c')$, $i(c''_1 - c'')$ s'annule précisément en passant en ω : en tout cas, chacune des deux régions définies sur S' et séparées par ω a un côté bien défini au point de vue du profane, qui est celui à adopter ici : l'une de ces régions correspond sur le plan (z) au demi-plan $\mu > 0$, l'autre au demi-plan $\mu < 0$. Si j'introduis donc cette convention, peut-être un peu arbitraire, que le côté de la surface est défini en chaque point par ce vecteur $M'U'$, la définition ne cesse de valoir qu'en ω ; dans ces conditions je peux continuer à définir l'espèce de la symétrie pour S' sans introduire de contradiction.

Remarquons qu'en un point voisin de ω sur S , l'expression $\sqrt{R'R''}$ ou $\tau(H+1)$ tend vers 2τ ou p quand ce point tend vers ω ; sur S' , la même expression $\sqrt{R'R''}$ tend vers zéro et ceci peut expliquer pourquoi ω est, si l'on peut dire, plus singulier sur S' que sur S .

7. Il importe maintenant de voir comment, en supposant ($\mathfrak{M}$)

unicursale, nous reconnaitrons si $(\mathfrak{W})$ coïncide avec $(\mathfrak{W}_1)$. Rappelons que sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ les coordonnées d'un point (c, c', c'') peuvent s'exprimer au moyen de deux arbitraires (α, β) ou (u, v) par les formules

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{c + ic'}{1 - c''} = \frac{1 + c''}{c - ic'}, & \beta = \frac{c - ic'}{1 - c''} = \frac{1 + c''}{c + ic'}, \\ c + ic' = \frac{2\alpha}{1 + \alpha\beta}, & c - ic' = \frac{2\beta}{1 + \alpha\beta}, & c'' = \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta + 1}; \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} u = \frac{c + ic'}{1 - c''} = \frac{1 + c''}{c - ic'}, & v = -\frac{c + ic'}{1 + c''} = -\frac{1 - c''}{c - ic'}, \\ c + ic' = \frac{-2uv}{u - v}, & c - ic' = \frac{2}{u - v}, & c'' = \frac{u + v}{u - v}. \end{cases}$$

On a évidemment $\alpha = u$, $\beta = \frac{-1}{v}$; suivant le cas il y a avantage à employer (α, β) ou (u, v) .

Soient $\alpha_0, \beta_0, u_0, v_0$ les conjuguées de α, β, u, v . Quand on passe d'un point $m(c, c', c'')$ au point conjugué $m_1(c_1, c'_1, c''_1)$, il faut remplacer (α, β) par (β_0, α_0) ou (u, v) par $(\frac{-1}{v_0}, \frac{-1}{u_0})$.

Dire que $(\mathfrak{W})$ est unicursale, c'est dire que l'on peut regarder (α, β) comme les coordonnées d'un point d'une certaine courbe plane unicursale; on aura

$$\alpha = f(q), \quad \beta = \varphi(q),$$

où f et φ sont des fractions rationnelles d'une variable q ; appelons q_0 l'imaginaire conjuguée de q , f_0 et φ_0 les fractions rationnelles obtenues en remplaçant dans f et φ les coefficients des diverses puissances de q par les coefficients conjugués; on a

$$\alpha_0 = f_0(q_0) \quad \text{et} \quad \beta_0 = \varphi_0(q_0).$$

Dire que $(\mathfrak{W})$ coïncide avec $(\mathfrak{W}_1)$, c'est dire que la courbe plane (α, β) et la courbe plane (β_0, α_0) coïncident. Ceci entraîne

$$(8) \quad \varphi_0(q) \equiv f\left(\frac{Aq + B}{Cq + D}\right), \quad f_0(q) \equiv \varphi\left(\frac{Aq + B}{Cq + D}\right),$$

A, B, C, D étant des constantes numériques telles que

$$AD - BC \neq 0.$$

Si A_0, B_0, C_0, D_0 sont les conjuguées de A, B, C, D , on a aussi

$$(9) \quad \varphi(q) \equiv f_0 \left(\frac{A_0 q + B_0}{C_0 q + D_0} \right), \quad f(q) \equiv \varphi_0 \left(\frac{A_0 q + B_0}{C_0 q + D_0} \right).$$

Enfin, dans (8), remplaçons q par $\frac{B-Dq}{Cq-A}$, ce qui revient à mettre les identités (8) sous la forme équivalente

$$(10) \quad \varphi_0 \left(\frac{B-Dq}{Cq-A} \right) \equiv f(q), \quad f_0 \left(\frac{B-Dq}{Cq-A} \right) \equiv \varphi(q).$$

La comparaison de (9) et (10) donne

$$(11) \quad \begin{cases} f(q) \equiv \varphi_0 \left(\frac{B-Dq}{Cq-A} \right) \equiv \varphi_0 \left(\frac{A_0 q + B_0}{C_0 q + D_0} \right), \\ \varphi(q) \equiv f_0 \left(\frac{B-Dq}{Cq-A} \right) \equiv f_0 \left(\frac{A_0 q + B_0}{C_0 q + D_0} \right). \end{cases}$$

Comme la représentation paramétrique $[f(q), \varphi(q)]$ est supposée normale, les identités (11), où q est quelconque, entraînent

$$\frac{B-Dq}{Cq-A} \equiv \frac{A_0 q + B_0}{C_0 q + D_0}.$$

Il est donc nécessaire et suffisant que la courbe (α, β) soit donnée par les formules

$$(12) \quad \begin{cases} \alpha = f(q), \\ \beta = f_0 \left(\frac{B-Dq}{Cq-A} \right), \end{cases}$$

où les constantes A, B, C, D satisfont aux relations

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{-A}{D_0} = \frac{-D}{A_0} = \frac{B}{B_0} = \frac{C}{C_0}, \\ AD - BC \neq 0. \end{cases}$$

Le point (c, c', c'') , correspondant à q [$\alpha = f(q), \beta = \varphi(q)$], a pour conjugué le point $[\varphi_0(q_0), f_0(q_0)]$ qui, d'après notre point de départ (8), correspond à $\frac{Aq_0 + B}{Cq_0 + D}$; pour que la courbe (c, c', c'') , qui est réelle, d'après les conditions (12) et (13) soit réelle (v), il faut et il suffit que l'égalité

$$(14) \quad q = \frac{Aq_0 + B}{Cq_0 + D}$$

admette une infinité de solutions (q, q_0) , où q et q_0 sont conjuguées; sinon la courbe $(\mathfrak{W})$ sera simplement réelle $(\mathfrak{G})$. Les conditions (13) sont faciles à résoudre, mais la remarque faite sur l'égalité (14) va nous permettre de trouver d'une façon intuitive les formes canoniques réduites des équations (12) et (13). Remarquons que $AA_0 = DD_0$ prouve que A et D ont même module; chacun des rapports (13) a pour module l'unité; multiplions A, B, C, D par $e^{i\alpha}$ où α est un argument réel; A_0, B_0, C_0, D_0 sont multipliées par $e^{-i\alpha}$, donc chacun des rapports (13) est multiplié par $e^{2i\alpha}$ et l'on peut disposer de α pour que la valeur commune des rapports (13) soit l'unité, d'où $D = -A_0$, B et C réels. L'égalité (14) devient donc $Cq q_0 - A_0 q - A q_0 - B = 0$. Si donc, dans le plan de la variable complexe q , on pose

$$q = x + iy, \quad q_0 = x - iy,$$

on peut écrire, au lieu de (14),

$$(15) \quad C(x^2 + y^2) - (A + A_0)x - i(A - A_0)y - B = 0,$$

équation à coefficients réels en x, y : si cette équation représente un cercle réel [(c) bien entendu], à chaque point (x, y) de ce cercle correspond une valeur de $q, (x + iy)$, donnant un point réel de la courbe $(\mathfrak{W})$; si l'équation (15) représente un cercle imaginaire, la courbe $(\mathfrak{W})$ est réelle $(\mathfrak{G})$ simplement.

Or on peut toujours, sur le paramètre q adopté, faire une substitution homographique arbitraire $q = \frac{\lambda Q + \mu}{\nu Q + \rho}$, où λ, μ, ν, ρ sont des constantes arbitraires, *réelles ou non*. Si l'on pose $q = x + iy$, $Q = X + iY$, cette transformation établit entre les deux plans $(x, y), (X, Y)$ une correspondance ponctuelle *réelle* bien connue transformant un cercle en cercle; les droites de l'un ou l'autre plan se transforment également en cercles. Étant donnés deux plans, choisissant dans l'un trois points a, b, c arbitrairement, dans l'autre trois points A, B, C arbitrairement, on détermine d'une façon unique les coefficients de la substitution homographique λ, μ, ν, ρ en écrivant que a et A se correspondent, ainsi que b et B ou c et C , et le cercle circonscrit au triangle abc a pour transformé le cercle circonscrit au triangle ABC .

Si donc la courbe $(\mathfrak{W})$ est réelle (c), on fera correspondre le

cercle (15) à l'axe réel du plan (X, Y) ou, si l'on préfère, supposons purement et simplement ce cercle déjà réduit à l'axe réel : on a $B = C = 0$, Λ imaginaire pure et par suite, la forme réduite

$$(16) \quad z = f(q), \quad \beta = f_0(q).$$

Si la courbe (15) est réelle (G), le cercle (15) est imaginaire (mais à coefficients réels) et on peut lui faire correspondre par la même transformation réelle le cercle $X^2 + Y^2 + 1 = 0$; on peut donc simplement supposer $\Lambda = \Lambda_0 = 0$, $B = -C$, et l'on a la forme réduite

$$(17) \quad z = f(q), \quad \beta = f_0\left(\frac{-1}{q}\right).$$

Avec les équations (16), si l'on a posé $q = x + yi$, les points M, M', μ qui correspondent au système (x, y) ont pour symétriques les points N, N', ν qui correspondent au système $(x, -y)$. Avec les équations (17), deux points conjugués sur (15) correspondent aux valeurs q et $\frac{-1}{q_0}$; si donc on considère encore l'ensemble M, M', μ qui correspond au système (x, y) , l'ensemble symétrique N, N', ν correspond au système $\frac{-x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}$.

On peut encore remarquer que, dans le cas où la courbe (15) est réelle (c), on peut être amené à supposer que le cercle (15) se réduit non à l'axe réel $y = 0$, mais au cercle $x^2 + y^2 - 1 = 0$, auquel cas on trouve une forme réduite équivalente à (16), soit

$$(16') \quad z = f(q), \quad \beta = f_0\left(\frac{1}{q}\right).$$

En posant toujours $q = x + iy$, le système (x, y) correspond à M, M', μ et le système $\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}$ au système N, N', ν .

Enfin, dans une étude, où interviendraient plusieurs séries de symétries, on pourrait être conduit à garder la forme générale (12), qui s'écrirait

$$(12') \quad z = f(q), \quad \beta = f_0\left(\frac{B + \Lambda_0 q}{Cq - \Lambda}\right),$$

où B et C sont réels, Λ et Λ_0 imaginaires conjugués : si l'on a $\Lambda\Lambda_0 + BC > 0$, il s'agit d'une courbe (15) réelle (c); si l'on a

$AA_0 + BC < 0$, il s'agit d'une courbe $(\mathfrak{H})$ réelle $(\mathfrak{G})$. Cette quantité $AA_0 + BC$ ne peut être nulle; les points q et $\frac{Aq_0 + B}{Cq_0 - A_0}$ sont conjugués sur $(\mathfrak{H})$; dans le plan de la variable q , les points symétriques sont figurés par deux points inverses par rapport au cercle (15) .

Quant aux exemples de surfaces algébriques S, S', Σ à centre de ce type, je ne puis que renvoyer à mon Mémoire de l'*École Normale*: toutes les courbes à torsion constante réelle $(\mathfrak{r})$ qui y sont déterminées donnent autant de surfaces du type (16) . J'ai de plus indiqué, page 326, un type

$$(18) \quad x = q^p \frac{q^m + B_1 C_1}{B_1 q^m + C_1}; \quad \beta = \frac{-1}{q^p} \frac{1 + B_1 C_1 q^m}{B_1 + C_1 q^m},$$

où m est un entier pair, p un entier impair, rentrant dans le type canonique (17) ; page 346, il y a encore un autre exemple du même type, où le cône C est du degré 6.

8. Voyons maintenant le cas où $(\mathfrak{H})$ coïncide avec $(\mathfrak{H}'_1)$, mais non $(\mathfrak{H}_1)$. Soit le tableau des coordonnées (x, β) ou (u, v) des points $m, m'; m_1, m'_1$:

$$\begin{array}{ccccccccc} m \dots & x & \beta & u & v, & m_1 \dots & \beta_0 & z_0 & \frac{-1}{v_0} & \frac{-1}{u_0}, \\ m' \dots & \frac{-1}{\beta} & \frac{-1}{x} & v & u, & m'_1 \dots & \frac{-1}{\alpha_0} & \frac{-1}{\beta_0} & \frac{-1}{u_0} & \frac{-1}{v_0}. \end{array}$$

Les courbes planes unicursales (x, β) et $\left(\frac{-1}{x_0}, \frac{-1}{\beta_0}\right)$ doivent coïncider. Si l'on a posé $x = f(q)$, $\beta = \varphi(q)$, où f et φ sont des fractions rationnelles, nous obtenons comme plus haut une série d'identités

$$(19) \quad \frac{-1}{f_0(q)} \equiv f\left(\frac{Aq + B}{Cq + D}\right), \quad \frac{-1}{\varphi_0(q)} \equiv \varphi\left(\frac{Aq + B}{Cq + D}\right),$$

puis

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(q)f_0\left(\frac{Dq - B}{-Cq + A}\right) \equiv -1, \quad \varphi(q)\varphi_0\left(\frac{Dq - B}{-Cq + A}\right) \equiv -1, \\ f(q)f_0\left(\frac{A_0q + B_0}{C_0q + D_0}\right) \equiv -1, \quad \varphi(q)\left(\frac{A_0q + B_0}{C_0q + D_0}\right) \equiv -1. \end{array} \right.$$

La comparaison des identités (20) montre que $\frac{Dq+B}{-Cq+A}$ et $\frac{A_0q+B_0}{C_0q+D_0}$ coïncident, d'où il résulte comme plus haut que $\frac{Aq+B}{Cq+D}$ peut être ramenée à la forme q ou $\frac{-1}{q}$. La forme q est inacceptable ici, parce que le produit $f(q)f_0(q)$ est nécessairement positif pour q réel; il ne reste donc que la forme canonique correspondant aux deux identités

$$(21) \quad f(q)f_0\left(\frac{-1}{q}\right) = -1, \quad \varphi(q)\varphi_0\left(\frac{-1}{q}\right) = -1.$$

Dans le plan de la variable q ($q = x + iy$), deux points symétriques sur une de nos surfaces correspondent à deux points x, y et $\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}$ qui se correspondent dans une inversion de pôle origine et de puissance égale à -1 .

La solution générale de l'identité (21) s'obtient en prenant pour f une fraction de la forme

$$(22) \quad f \equiv q^p \frac{\Lambda q^m + \Lambda_1 q^{m+1} + \dots + \Lambda_m}{\Lambda' - \Lambda'_1 q + \dots + (-1)^m \Lambda'_m q^m},$$

où p et m sont deux entiers quelconques de parité différente et Λ_j, Λ'_j deux constantes conjuguées; φ est une fraction rationnelle du même type pour laquelle on prend les entiers p_1, m_1 distincts ou non de p et m . Bien entendu, il reste à écrire que la courbe (1) est algébrique. Dans le *Mémoire de l'École Normale*, page 328, le lecteur trouvera un exemple de ce type. J'ai indiqué au Chapitre V (1) une courbe de cette espèce, de genre arbitrairement grand, possédant à cet égard des propriétés curieuses.

9. Soit maintenant à étudier la symétrie par rapport à un plan que nous prendrons pour plan zOx . Comme précédemment, on verra qu'en passant de M, M', μ aux points symétriques N, N', ν , on a l'un des deux échanges

$$(24) \quad \begin{cases} c, & c', & c''; & c_1, & c'_1, & c''_1; \\ c_1, & -c'_1, & c''_1; & c, & -c', & c'' \end{cases}$$

(1) Voir pages 136-138 du Tome de 1920 des *Annales de l'École Normale*.

ou

$$(25) \quad \begin{cases} c & c', & c''; & c_1, & c'_1, & c''_1; \\ -c_1, & c'_1, & -c''_1; & -c, & c', & -c''. \end{cases}$$

Les deux cônes C, C_1 sont symétriques l'un de l'autre par rapport au plan zOx et à l'axe Oy . Si $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}')$ sont distinctes, la condition est plus précise et entraîne que $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}_1)$ soient symétriques l'une de l'autre, soit par rapport à zOx , soit par rapport à Oy . La réciproque se démontre comme plus haut, en supposant S et S' algébriques. Quand $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}')$ sont distinctes, on a pour l'espèce de la symétrie le résultat suivant :

$(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}_1)$ symétriques par rapport à xOz ; ce plan est plan de symétrie de première espèce pour S , de deuxième pour S' .

$(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}_1)$ symétriques par rapport à Oy ; les genres de symétrie pour S ou S' sont inversés.

Cherchons les conditions analytiques qui expriment que $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}_1)$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à zOx ; le point m a pour coordonnées (x, β) , le point n symétrique de m par rapport à xOz a pour coordonnées (β, x) , le point m_1 pour coordonnées (β_0, z_0) . Ici le point n et le point m_1 doivent décrire tous deux $(\mathfrak{W}_1)$; autrement dit, la courbe plane (x, β) coïncide avec la courbe plane (z_0, β_0) . S'il s'agit de courbes unicursales, on aura $x=f(q)$, $\beta=\varphi(q)$ et le raisonnement déjà employé montre que l'on peut se borner à deux types canoniques caractérisés par les identités

$$(26) \quad f(q) \equiv f_0(q), \quad \varphi(q) \equiv \varphi_0(q)$$

ou

$$(27) \quad f_0(q) \equiv f\left(\frac{-1}{q}\right), \quad \varphi_0(q) \equiv \varphi\left(\frac{-1}{q}\right).$$

Dans le premier cas, les fractions f et φ ont leurs coefficients réels et prennent des valeurs réelles pour les valeurs réelles de q ; pour ces valeurs réelles de q , c et c'' sont réelles, c' est une imaginaire pure; la courbe $(\mathfrak{W})$ a pour projection sur le plan xOz une courbe réelle (v) dont la totalité ou une partie est extérieure au cercle $x^2 + z^2 = 1$, et cette partie extérieure donne sur S une géodésique située dans le plan de symétrie xOz et sur S' une ligne de rebroussement tout entière dans ce plan. En posant

$q = x + iy$, le couple (x, y) et le couple $(x, -y)$ fournissent les points symétriques. Dans le second cas, la géodésique réelle et l'arête de rebroussement réelle disparaissent sur S ou S' ; leur intersection avec le plan de symétrie se compose uniquement de lignes multiples; en posant $q = x + iy$, les points symétriques correspondent à (x, y) et $\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2-y^2}$.

Comme exemple du premier cas, je citerai la cubique de M. Lyon, dérivant de la courbe (13) définie en coordonnées (u, v) par les expressions paramétriques $u = t + K$, $v = t + K$, où K est une constante réelle. Dans un autre exemple, déjà cité ici.

$$(28) \quad x = \frac{q^3 + \sqrt[3]{5} q^2}{\sqrt[3]{5} q^3 - 1}, \quad y = \frac{1 + \sqrt[3]{5} q^3}{\sqrt[3]{5} q^2 - q^5},$$

il se trouve que la fonction $\varphi(q)$ satisfait, de plus, à l'identité

$$\varphi(q) = f\left(\frac{1}{q}\right) = f_0\left(\frac{1}{q}\right),$$

ce qui prouve symétrie par rapport à l'origine; la courbe (c, c', c'') est réelle; la courbe (c, c'') projection sur xOz donne une portion réelle obtenue pour $q = e^{i\tau}$ intérieure au cercle $x^2 + z^2 = 1$ et une portion réelle obtenue pour q réel extérieure à ce cercle.

Comme exemple du second cas, je donnerai

$$(29) \quad u = \Lambda \frac{q^2 + \frac{1}{q^2}}{e^{i\alpha} q - \frac{e^{-i\alpha}}{q}}, \quad v = \Lambda \left(e^{-i\alpha} q - \frac{e^{i\alpha}}{q} \right),$$

où Λ et α sont des constantes réelles quelconques; on évitera pour α les valeurs $k\pi$, où k est un entier quelconque, car, pour une telle valeur, en posant $q - \frac{1}{q} = t$, on aurait seulement

$u = \Lambda \frac{t^2 + 2}{t}$, $v = \Lambda t$ qui ne rentre plus dans le type canonique (27), mais (26); il n'y a pas contradiction, parce que nos raisonnements supposent essentiellement la représentation paramétrique propre.

On peut remarquer que, pour le premier type, caractérisé par ce fait que (α, β) ou (u, v) sont des fonctions réelles du para-

mètre q , la substitution $u = LU + M$, $v = LV + M$, où L et M sont réels, introduit deux paramètres de forme et laisse subsister la symétrie par rapport à xOz .

10. Supposons maintenant que $(\mathfrak{M})$ et $(\mathfrak{M}_1)$ soient symétriques par rapport à Oy . Soit un point m de $(\mathfrak{M})$, qui a pour coordonnées sur la sphère (α, β) ou (u, v) ; le symétrique de m par rapport à xOz a pour coordonnées (β, α) ou $(\frac{-1}{v}, \frac{-1}{u})$, donc le symétrique de m par rapport à Oy a pour coordonnées $(\frac{-1}{\alpha}, \frac{-1}{\beta})$ ou $(\frac{-1}{u}, \frac{-1}{v})$. Le point m_1 , conjugué de m , a pour coordonnées (β_0, α_0) ou $(\frac{-1}{v_0}, \frac{-1}{u_0})$. Nous voyons donc l'avantage des coordonnées (u, v) : tout revient à exprimer que la courbe plane (u, v) coïncide avec la courbe plane (v_0, u_0) . Or ce problème a été résolu précisément dans l'étude de la symétrie par rapport à un point, les coordonnées (α, β) conduisant alors à ce même problème. Bornons-nous aux courbes unicursales; nous avons deux types canoniques réduits

$$(30) \quad u = f(q), \quad v = f_0(q),$$

$$(31) \quad u = f(q), \quad v = f_0\left(\frac{-1}{q}\right).$$

Comme plus haut, si l'on pose $q = x + iy$, deux points symétriques sur une même surface correspondent à (x, y) et $(x, -y)$ dans le type (30) et à (x, y) et $(\frac{-x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2})$ dans le type (31). Quand le type (30) est réalisé, on voit que les valeurs réelles de q donnent c' réelle, c et c'' imaginaires pures, la courbe obtenue sur S dans le plan zOx est ligne de rebroussement; la ligne obtenue sur S' est, au contraire, géodésique. Dans le cas (31), ces lignes réelles, de rebroussement ou géodésiques, disparaissent.

Il est facile de donner des exemples: la cubique de M. Lyon donne cette disposition, par rapport à yOz , il est vrai; si nous écrivons

$$u = t + K, \quad v = t - K,$$

faisons tourner la courbe de $\frac{\pi}{2}$ autour de Oz , ce qui revient à multiplier u et v par i et remplaçons en même temps it par q ; on a alors, dans la nouvelle position,

$$u = q + Ki, \quad v = q - Ki,$$

et comme on a supposé K réel, on a bien un exemple du type (30).

J'ai d'autre part signalé aux *Comptes rendus* (22 janvier 1917) et développé aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1919) comment on peut trouver explicitement la solution générale de l'identité de Bezout ($AD - BC \equiv 1$) en polynomes entiers en x . A une solution (A, B, C, D) de cette identité correspondent une infinité de courbes imaginaires à torsion constante et de surfaces applicables sur le parabolôïde par les formules suivantes :

$$(32) \quad u = \frac{A}{B}, \quad v = \frac{C}{D};$$

$$(33) \quad u = \frac{A}{C}, \quad v = \frac{B}{D};$$

$$(34) \quad u = \frac{A + Bm}{C + Dm}, \quad v = \frac{A + Bm'}{C + Dm'};$$

$$(35) \quad u = \frac{A + Cm}{B + Dm}, \quad v = \frac{A + Cm'}{B + Dm'},$$

où m et m' sont deux constantes différentes; à chacune des courbes ainsi obtenues, on peut appliquer la transformation

$$U = Lu + M + iN, \quad V = Le + M + iN,$$

déjà signalée; d'ailleurs, si m tend vers zéro, ainsi que $\frac{1}{m'}$, la courbe (34) se réduit à la courbe (33) et la courbe (35) à la courbe (32). Nous obtenons ainsi deux séries de surfaces dépendant de paramètres réels de forme. Supposons maintenant les polynomes A, B, C, D à coefficients réels; pour m et m' réels, les quatre courbes écrites de (32) à (35) conduisent à des surfaces admettant xOz comme plan de symétrie et rentrant dans le type canonique (26); il en sera encore de même en prenant ensuite N nul. Si A, B, C, D sont réels et si m et m' sont pris imaginaires conjuguées, la condition $m' \neq m$ empêchera que la partie imaginaire de m ou m' soit nulle; alors les deux courbes (34) et (35) donneront des surfaces admettant xOz pour plan de symétrie,

mais du type (30), et cela subsistera encore ensuite si l'on prend $N = 0$.

Il me reste à donner un exemple précis du type (31). Quelques tâtonnements m'ont conduit à essayer une courbe

$$u = \frac{q^3}{Aq^4 + Bq^2 + C}, \quad v = \frac{-q}{A' + B'q^2 + Cq^4},$$

où A et A' sont deux constantes conjuguées, ainsi que B et B' . C étant réel; $q = 0$, $q = \infty$ donne sur la courbe (15) deux cycles isotropes d'indice 2 exactement, pour lesquels, d'après mes résultats sur les courbes à torsion constante, il n'y a plus aucune condition à écrire. En écrivant que les autres cycles isotropes sont obtenus uniquement pour $q = +i$ ou $-i$ et ont pour indice 6, toutes les conditions d'indice ou de résidu donnent aisément la courbe

$$(36). \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{q^3}{C \left[\left(5 + 8i\sqrt{\frac{2}{3}} \right) q^4 + \left(-2 + 8i\sqrt{\frac{2}{3}} \right) q^2 + 1 \right]}, \\ v &= \frac{-q}{C \left[5 - 8i\sqrt{\frac{2}{3}} - \left(2 + 8i\sqrt{\frac{2}{3}} \right) q^2 + q^4 \right]}. \end{aligned} \right.$$

L'axe des z étant axe de symétrie pour (15) et par suite pour S , S' , Σ , on en déduit que le plan yOz lui aussi est plan de symétrie de S , S' , Σ ; effectivement, en remplaçant u , v , q par iu , iv , iq , ce qui revient à faire tourner les axes de 90° autour de Oz , les nouvelles équations (36) sont de la forme $u = f(q)$, $v = f_0\left(\frac{1}{q}\right)$, ce qui correspond au type canonique (30) sous une forme équivalente.

11. Il ne reste plus à étudier que le cas où S , S' , Σ admettent un axe de rotation, autour duquel une rotation d'amplitude $\frac{2\pi}{m}$ les reproduit, m étant un entier supérieur ou égal à 2. Pour $m = 2$, on a un axe de symétrie. Cette fois une rotation ne changeant pas le signe de la torsion, si l'on considère les trois points associés M , M' , μ et les points N , N' , ν s'en déduisant par la rotation, la courbe ($\mathcal{A}^u$) vient coïncider avec la courbe ($\mathcal{A}^v$); donc, la courbe

($\mathfrak{W}$) ou bien se reproduit par la rotation $\frac{2\pi}{m}$ autour de l'axe, ou bien vient se superposer à ($\mathfrak{W}'$). Ces deux cas ne se distinguent que si ($\mathfrak{W}$) est distincte de ($\mathfrak{W}'$); dans le premier cas, avec notre terminologie, la rotation est de première espèce; seconde espèce dans le second cas. Or j'ai étudié en détail ces propriétés pour les courbes à torsion constante. Nous avons vu que la forme canonique pour la rotation de première espèce est, en supposant l'axe pris pour Oz ,

$$(37) \quad u = q^p f(q^m), \quad v = q^p \varphi(q^m),$$

où p est un entier premier avec m , f et φ deux fractions rationnelles, en se bornant aux courbes unicursales. Dans le cas de rotation de seconde espèce, la rotation répétée 1, 2, ... fois reproduit alternativement ($\mathfrak{W}$) et ($\mathfrak{W}'$); or m fois équivalent à une rotation d'amplitude 2π , qui donne ($\mathfrak{W}$); donc ($\mathfrak{W}$) ne coïncidant pas avec ($\mathfrak{W}'$), m est un entier pair; soit $m = 2m'$, la forme canonique est alors

$$(38) \quad u = q^p f(q^{m'}), \quad v = q^p f(-q^{m'}),$$

où p est un nombre entier quelconque impair premier avec m' .

Le cas de $m = 2$ dans le cas de la rotation de seconde espèce demande une étude spéciale, car le raisonnement conduisant à la forme canonique (38) suppose $m' > 1$; pour le cas de première espèce, il n'y a rien à changer. Donc, dans le cas de la symétrie par rapport à l'axe des z , il y a deux cas à distinguer quand ($\mathfrak{W}$) est distincte de ($\mathfrak{W}'$) suivant que ($\mathfrak{W}$) est à elle-même sa symétrique par rapport à Oz ou bien est symétrique de ($\mathfrak{W}'$) par rapport à Oz , auquel cas elle est symétrique d'elle-même par rapport à xOy : j'ai étudié en détail la symétrie des courbes ($\mathfrak{W}$) par rapport à un plan dans le *Mémoire de l'École Normale*; je n'y reviens pas.

La cubique de M. Lyon, par exemple, admet le plan xOy pour plan de symétrie, donc, S et S' admettent Oz pour axe de symétrie de seconde espèce. L'identité de Bezout, déjà employée avec succès pour des symétries planes, donne encore des résultats intéressants. Pour la symétrie de première espèce par rapport à Oz , j'aurai des solutions particulières en écrivant

$$(39) \quad \begin{cases} u = \frac{A(Q)}{qB(Q)}, & v = \frac{qC(Q)}{D(Q)}, \\ AD - Q.BC = 1, & Q = q^2, \end{cases}$$

A, B, C, D étant des polynomes en Q. La solution la plus simple correspond à

$$B \equiv C \equiv D \equiv 1, \quad A \equiv 1 + Q,$$

d'où

$$u = \frac{1+q^2}{q}, \quad v = q.$$

On aura une symétrie de seconde espèce en écrivant, avec ces mêmes polynomes,

$$(40) \quad u = \frac{\frac{1}{2}A(Q) + \frac{1}{2}qB(Q)}{D(Q) + qC(Q)}, \quad v = \frac{-\frac{1}{2}A(Q) + \frac{1}{2}qB(Q)}{D(Q) - qC(Q)},$$

car le changement de q en $-q$ remplace (u, v) par $(-v, -u)$; ce dernier point est diamétralement opposé au point $(-u, -v)$. Les mêmes polynomes $A(Q)$, $B(Q)$, $C(Q)$, $D(Q)$ donneront encore, en posant cette fois $Q = q^m$,

$$(41) \quad u = \frac{A(Q)}{q^r B(Q)}, \quad v = q^{m-r} \frac{C(Q)}{D(Q)},$$

une rotation de première espèce d'amplitude $\frac{2\pi}{m}$, pourvu que r soit un entier premier avec m ; la solution précédemment indiquée donne

$$u = \frac{1+q^m}{q^r}, \quad v = q^{m-r}.$$

Comme exemple intéressant qui condense les résultats obtenus pour la symétrie relative à un point, un plan, un axe ou pour une rotation d'amplitude $\frac{2\pi}{m}$, je rappelle l'exemple, connu depuis M. Fabry, que j'ai repris et étudié en détail (*Annales de l'École*, 1919, p. 323 et suiv.) :

$$(42) \quad u = q^p \frac{q^m + \sqrt[m]{\frac{m+p}{m-p}}}{-\sqrt[m]{\frac{m+p}{m-p}} q^{m+1}}, \quad v = q^p \frac{-q^m + \sqrt[m]{\frac{m+p}{m-p}}}{\sqrt[m]{\frac{m+p}{m-p}} q^{m+1}},$$

où m et p sont deux entiers premiers entre eux; si $m > p$, la courbe (15) est réelle (v); suivant les parités de p et m , on obtient diverses combinaisons intéressantes que je ne reproduirai pas ici :

on obtient en tout cas des exemples précis d'une rotation de première ou seconde espèce.

Dans ce qui précède, nous avons eu des exemples possédant diverses symétries et, par suite, aussi celles qui en résultent par leur composition. Représentons par exemple par (O) la symétrie par rapport au point O , par (Ox) la symétrie par rapport à Ox , par (yOz) la symétrie par rapport au plan yOz . Si la surface étudiée possède à la fois deux symétries, écrivons l'égalité symbolique qui résulte de leur composition; par exemple

$$(O)(xOz) = (Oy) \quad \text{ou} \quad (xOz)(O) = (Oy).$$

Si maintenant nous remplaçons chaque parenthèse de symétrie par le nombre $+1$ ou -1 suivant qu'il s'agit d'une symétrie de première espèce ou de seconde espèce, on voit immédiatement que l'égalité symbolique subsiste; cette règle servira à donner l'espèce d'une symétrie obtenue par composition de deux autres d'espèce connue.

12. Disons quelques mots des singularités des surfaces S et S' . Il y a lieu de considérer les singularités des courbes $(\mathfrak{A})$ ou $(\mathfrak{B})$. Ceci rentre dans l'étude spéciale des courbes à torsion constante.

D'autre part, S ou S' peuvent présenter des lignes multiples; nous l'avons déjà reconnu en étudiant les symétries planes, qui mettent en évidence des lignes multiples sur l'une au moins des deux surfaces S et S' .

Un autre exemple intéressant est fourni par un point commun aux deux courbes $(\mathfrak{B})$ et $(\mathfrak{B}_1)$; le cas où ces deux courbes coïncident a été étudié, on a eu un centre, point conique, je n'y reviens pas. Nous supposons $(\mathfrak{B})$ et $(\mathfrak{B}_1)$ distinctes; elles ont par hypothèse un point m commun où nous supposons de plus les tangentes distinctes; soient un point n de $(\mathfrak{B})$ qui tend vers m , n_1 un point de $(\mathfrak{B}_1)$ qui tend vers m ; soient N et N' les points de S et S' obtenus en associant n et n_1 ; quand n et n_1 tendent tous deux vers m , N et N' tendent vers des positions limites M et M' : la normale en M à S est parallèle à la droite Om , la normale en N' à S' , qui était parallèle à mn_1 , est susceptible d'avoir une position limite parallèle à telle direction que l'on voudra du plan tangent à la sphère en m ; le point M est régulier sur S , mais singulier sur

S' (1). Ce raisonnement est indépendant de la réalité de S , S' ou de M , M' . Il s'applique donc aussi aux points communs à $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}'_1)$, en échangeant les rôles de S et S' . Si l'on se borne aux surfaces réelles, $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}_1)$ sont conjuguées; les points communs à $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}'_1)$ donnent des points singuliers de S nécessairement imaginaires; un point commun à $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}_1)$ donnera un point singulier réel sur S' , s'il est à lui-même son conjugué, autrement dit s'il est réel. C'est ce qui arrive en particulier pour la cubique de M . Lyon :

$$\begin{aligned} (\mathfrak{W}) \quad c &= \frac{1+K^2-t^2}{2K}, & c' &= i \frac{1-K^2+t^2}{2K}, & c'' &= \frac{t}{K}; \\ (\mathfrak{W}_1) \quad c_1 &= \frac{1+K^2-t_1^2}{2K}, & c'_1 &= i \frac{1-K^2+t_1^2}{2K}, & c''_1 &= \frac{t_1}{K}, \end{aligned}$$

où K est réel; si $K > 1$, les deux valeurs $t = \pm \sqrt{K^2 - 1}$ donnent deux points réels communs à $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}_1)$ donnant deux points singuliers réels de S' .

13. Il reste maintenant à étudier les points à l'infini des surfaces S , S' , Σ . La discussion complète est très longue, mais le résultat obtenu est fort simple : marquons sur le cercle de l'infini les traces des génératrices isotropes de C ou C_1 ; les tangentes à ce cercle aux points correspondants donnent l'intersection complète de S et S_1 par le plan de l'infini. Pour la surface Σ , nous avons l'intersection complète en joignant de toutes les façons possibles une trace de la première série à une trace de la seconde; si donc C et C_1 ont une génératrice isotrope commune, la tangente au cercle de l'infini au point correspondant figure parmi les droites relatives à Σ .

Pour la surface Σ , il suffit de répéter mot à mot le raisonnement de Darboux pour les surfaces minima (2). Σ est en effet le lieu des milieux des cordes s'appuyant sur deux courbes à torsion constante et les points à l'infini de ces deux courbes sont, à l'exclusion de tout autre, tous les points communs au cercle de l'infini et à $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}_1)$.

(1) Comparons au tore, en supposant l'axe de révolution tangent à la circonférence méridienne. Le point de contact est alors une singularité analogue à celle signalée dans le texte pour S' .

(2) *Théorie des Surfaces*, t. I, 2^e édition, p. 434.

Rappelons qu'en posant $\xi = \frac{c}{c''}$, $\tau_1 = \frac{c'}{c''}$, $\lambda = \xi + i\tau_1$, $\mu = \xi - i\tau_1$;
 $\xi_1 = \frac{c_1}{c_1''}$, . . . , il y a avantage à employer les intégrales

$$(43) \quad \begin{cases} I_1 = \int \frac{d\lambda}{1 + \lambda_1 \mu}, & I_2 = \int \frac{d\mu}{1 + \lambda_1 \mu}, & I_3 = \int \frac{\lambda d\mu - \mu d\lambda}{1 + \lambda_1 \mu}; \\ I'_1 = \int \frac{d\lambda_1}{1 + \lambda_1 \mu_1}, & I'_2 = \int \frac{d\mu_1}{1 + \lambda_1 \mu_1}, & I'_3 = \int \frac{\lambda_1 d\mu_1 - \mu_1 d\lambda_1}{1 + \lambda_1 \mu_1}, \end{cases}$$

et l'on pourra écrire pour définir S et S'

$$(44) \quad \begin{cases} x + iy = \frac{\tau}{2} (I_1 - I'_1) + \frac{\varepsilon\tau}{2} [(c + ic')c''_1 - c''(c_1 + ic'_1)], \\ x - iy = \frac{-\tau}{2} (I_2 - I'_2) + \frac{\varepsilon\tau}{2} [(c_1 - ic'_1)c'' - c''_1(c - ic')], \\ z = \frac{\tau}{4} (I_3 - I'_3) + \frac{\varepsilon\tau}{4} [(c - ic')(c_1 + ic'_1) - (c + ic')(c_1 - ic'_1)]. \end{cases}$$

Les points à l'infini de S, S' proviennent exclusivement des génératrices isotropes de C et C₁; soit G une génératrice isotrope de C ou du moins un des cycles isotropes portés par G, si G est le support de plusieurs cycles isotropes. J'étudie les points, aussi bien imaginaires que réels, de S et S'; d'ailleurs la discussion est la même que l'on suppose S réelle ou imaginaire. Donc nous distinguons plusieurs cas :

1° Le point variable *m* qui décrit (ψ), ou, si l'on préfère, le point variable P qui décrit la courbe plane (ξ, τ₁, 1) est venu se placer sur un cycle isotrope G, tandis que *m*₁ vient sur une génératrice non isotrope de C₁. La discussion de ce cas s'étendra évidemment à celui qui s'obtient en renversant les rôles de C et C₁.

2° *m* est venu sur un cycle isotrope G, et *m*₁ est venu sur un cycle isotrope G₁, G et G₁ étant supposés conjugués.

3° *m* et *m*₁ viennent sur deux cycles isotropes non conjugués.

La méthode à suivre est la même dans tous les cas; je me contente, pour abrégér, d'indiquer les résultats dans le cas où la vérification est facile à effectuer. Dans les deux premières hypothèses je prends pour plan *xOy* le plan déterminé par G et la droite conjuguée. La droite G a pour équations *z* = 0, *x* + *iy* = 0. La

section du cône C par le plan $z = 1$ est représentée (il ne s'agit, je le répète, que de surfaces algébriques) par un développement qui a la forme

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = B t^{p+s} + B_1 t^{p+s+1} + \dots \\ \mu = \frac{A}{t^p} + \frac{A_1}{t^{p-1}} + \dots, \\ 1 + \lambda \mu = 1 + AB t^s + \dots \end{array} \right.$$

ou

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = B t^p + B_1 t^{p+1} + \dots \\ \mu = \frac{A}{t^p} + \frac{A_1}{t^{p-1}} + \dots \quad (AB = -1), \\ 1 + \lambda \mu = K t^r + K_1 t^{p+1} + \dots \end{array} \right.$$

p, s, r sont des entiers positifs non nuls dont j'ai montré l'importance dans le Mémoire de l'*École Normale* (Chap. II). Si la surface S est réelle, la section de C_1 par le plan $z = 1$ sera représentée par les développements analogues au moyen de t_1 , variable conjuguée de t ; λ_1 est la fonction conjuguée de μ et μ_1 celle de λ . L'équation du plan tangent en un point M de S pourra, par analogie avec les expressions ponctuelles (44), se mettre sous la forme

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} [c - ic' + c_1 - ic'_1][X + iY] + [c + ic' + c_1 + ic'_1][X - iY] + 2(c'' + c''_1)Z, \\ = [c - ic' + c_1 - ic'_1][x + iy] + [c + ic' + c_1 + ic'_1][x - iy] + 2(c'' + c''_1)z. \end{array} \right.$$

14. Cela posé, soit le premier cas. Le point m s'éloigne à l'infini ($t = 0$), et m_1 reste à distance finie. Les termes $I_1, I_2, I_3, c, c', c''$ présentent seuls une singularité polaire. Si le cycle $t = 0$ est du type (45) (degré p et classe $p + s$), on obtient sur S et S' les divers points à l'infini de la droite suivant laquelle le plan $x + iy = 0$ tangent le long de G au cône C coupe le plan de l'infini; ce plan $x + iy = 0$ est isotrope. Le plan tangent à S ou S' se déplace parallèlement au plan $x + iy = 0$ quand le point de contact varie sur cette droite. Si le cycle $t = 0$ est du type (46) (degré et classe égaux à p , indice égal à $2p + r$), on n'obtient sur S ou S' que le point à l'infini de la génératrice G, le plan tangent en ce point étant le plan de l'infini.

Soit maintenant le second cas; nous avons associé sur les deux cônes les cycles G et G_1 conjugués; je me borne au cas où S et S' sont réelles, de sorte que C et C_1 sont conjugués. Les deux cycles

sont donc du même type : si c'est le type (45), nous obtenons simplement le point à l'infini dans la direction $x = 0, y = 0$ perpendiculaire au plan GG_1 , le plan tangent étant le plan de l'infini ; remarquons que ce point réel à l'infini est à l'intersection des deux droites obtenues dans le plan de l'infini, pour les cycles de cette espèce, par la considération de m ou m_1 isolément. Si les deux cycles sont du type (46), nous obtenons les deux tangentes au cercle de l'infini à l'extrémité de G et G_1 , le plan tangent étant le plan de l'infini. Je donne la démonstration dans ce dernier cas, en me bornant même à supposer $r > 2p$, car il faudrait pour être complet envisager successivement $r > 2p$, $r = 2p$, $r < 2p$. Les conjuguées de $A, A_1, \dots, B, B_1, \dots, K$ étant $A', A'_1, \dots, K'$, on a (Mémoire de l'École Normale, p. 279 et suiv.)

$$(48) \quad \begin{aligned} I_1 &= \frac{Bp}{(p-r)K} \frac{1}{t^{r-p}} + \dots, & I_2 &= \frac{B'p}{(p-r)K'} \frac{1}{t_1^{r-p}} + \dots; \\ I_2 &= \frac{Ap}{(p+r)K} \frac{1}{t^{p+r}} + \dots, & I'_1 &= \frac{A'p}{(p+r)K'} \frac{1}{t_1^{p+r}} + \dots; \\ I_3 &= \frac{-2p}{rK} \frac{1}{t^r} + \dots, & I'_3 &= \frac{2p}{rK'} \frac{1}{t_1^r} + \dots; \\ c + ic' &= \frac{B}{\sqrt{K}} \frac{1}{t^{\frac{r}{2}-p}} + \dots, & c_1 - ic'_1 &= \frac{B'}{\sqrt{K'}} \frac{1}{t_1^{\frac{r}{2}-p}} + \dots; \\ c - ic' &= \frac{A}{\sqrt{K}} \frac{1}{t^{\frac{r}{2}+p}} + \dots, & c_1 + ic'_1 &= \frac{A'}{\sqrt{K'}} \frac{1}{t_1^{\frac{r}{2}+p}} + \dots; \\ c'' &= \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{1}{t^{\frac{r}{2}}} + \dots, & c''_1 &= \frac{1}{\sqrt{K'}} \frac{1}{t_1^{\frac{r}{2}}} + \dots. \end{aligned}$$

Rappelons en passant que la détermination de $\sqrt{K}$ peut être prise arbitrairement : si l'on prend pour $\sqrt{K'}$ le nombre conjugué de celui qui est adopté pour $\sqrt{K}$, c_1, c'_1, c''_1 se rapportent bien à la courbe $(\mathfrak{B}_1)$ et les formules (44) où $\varepsilon = +1$ donnent S ; mais si l'on prend pour $\sqrt{K'}$ la détermination égale et de signe contraire à celle précédemment choisie, c_1, c'_1, c''_1 se rapportent à $(\mathfrak{B}'_1)$ et les formules (44), où ε désigne toujours $+1$, se rapportent à S' et non à S ; de la sorte, bornons-nous à spécifier que K et K' sont conjuguées, mais ne précisons pas les déterminations adoptées pour $\sqrt{K}$ et $\sqrt{K'}$: nous étudierons du même coup S et S' . Cela posé, la

réunion des formules (44) et (48) donne

$$(49) \left\{ \begin{aligned} \frac{2}{\tau}(x + iy) &= \frac{Bp}{(p-r)K t^{r-p}} - \frac{A'p}{(p-r)K' t_1^{p+r}} \\ &+ \frac{B}{\sqrt{K}\sqrt{K'}} \frac{1}{t_1^{\frac{r}{2}} t^{\frac{r}{2}-p}} - \frac{A'}{\sqrt{K}\sqrt{K'}} \frac{1}{t_1^{\frac{r}{2}} t_1^{p+\frac{r}{2}}} + \dots, \\ \frac{2}{\tau}(x - iy) &= \frac{B'p}{(p-r)K' t_1^{r-p}} - \frac{Ap}{(p+r)K t^{p+r}} \\ &+ \frac{B'}{\sqrt{K}\sqrt{K'}} \frac{1}{t_1^{\frac{r}{2}} t_1^{\frac{r}{2}-p}} - \frac{A}{\sqrt{K}\sqrt{K'}} \frac{1}{t_1^{\frac{r}{2}} t^{p+\frac{r}{2}}} + \dots, \\ \frac{4}{\tau}z &= \frac{-2p}{K r t^r} - \frac{2p}{K' r t_1^r} \\ &+ \frac{AA'}{\sqrt{K}\sqrt{K'}} \frac{1}{t^{p+\frac{r}{2}} t_1^{p+\frac{r}{2}}} - \frac{BB'}{\sqrt{K}\sqrt{K'}} \frac{1}{t^{\frac{r}{2}-p} t_1^{\frac{r}{2}-p}} + \dots \end{aligned} \right.$$

Dans ces formules, on a mis en évidence au second membre que le terme de plus haut degré polaire parmi ceux qui contiennent soit t seul, soit t_1 seul, soit t et t_1 simultanément.

On voit alors que si t et t_1 tendent vers zéro en restant du même ordre infinitésimal, $x + iy$ et $x - iy$ sont par rapport à l'infiniment petit t d'ordre polaire $p + r$, et z d'ordre $2p + r$; on obtient donc le point à l'infini sur l'axe des z ; d'ailleurs, si l'on se borne aux points réels de S et S' , t et t_1 devant rester conjugués sont du même ordre infinitésimal. Supposons maintenant t et t_1 infiniment petits d'ordre différent; nous supposons t et t_1 fonctions d'une même variable auxiliaire; t sera donc infiniment petit d'ordre a et t_1 d'ordre a_1 ; supposons $a > a_1$. J'inscris en regard de $x + iy$, $x - iy$ et z les degrés des termes polaires mis en évidence :

$$\begin{array}{lll} x + iy; & (r-p)a; & (r+p)a_1; \quad \left(\frac{r}{2}-p\right)a + \frac{r}{2}a_1; \quad \left(\frac{r}{2}+p\right)a_1 + \frac{r}{2}a; \\ x - iy; & (r-p)a_1; & (r+p)a; \quad \left(\frac{r}{2}-p\right)a_1 + \frac{r}{2}a; \quad \left(\frac{r}{2}+p\right)a + \frac{r}{2}a_1; \\ z & ra; & ra_1; \quad \left(p + \frac{r}{2}\right)a + \left(p + \frac{r}{2}\right)a_1. \end{array}$$

On voit immédiatement qu'en vertu de $a > a_1$, le terme

$(r+p)a$ est le plus grand des nombres de la première et seconde ligne; il suffira donc de comparer $(r+p)a$ avec

$$\left(p + \frac{r}{2}\right)a + \left(p + \frac{r}{2}\right)a_1$$

pour obtenir le résultat suivant: $a > \left(\frac{2p}{r} + 1\right)a_1$, on obtient le point à l'infini de OG , ($x + iy = 0$, $z = 0$); $a = \left(\frac{2p}{r} + 1\right)a_1$, on obtient la droite à l'infini du plan

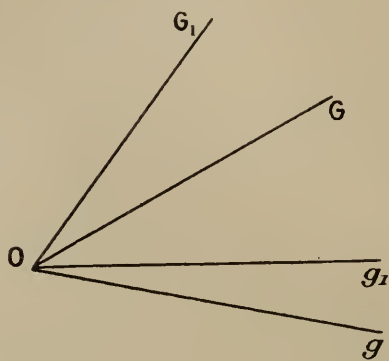
$$x + iy = 0; \quad \left(\frac{2p}{r} + 1\right)a_1 > a > a_1$$

on obtient le point à l'infini de Oz . Finalement, $a \geq a_1$ donne tous les points à l'infini du plan $x + iy = 0$ et $a_1 \leq a$ donne tous les points à l'infini du plan $x - iy = 0$. Quant au plan tangent, dont les coordonnées tangentielles sont mises en évidence par l'équation (47), le même procédé prouve que c'est le plan de l'infini.

15. J'arrive au troisième cas qui, nous le savons, ne peut donner que des points imaginaires. C'est de beaucoup le plus pénible et le plus long à discuter. Je suppose que le point m de $(\mathfrak{M})$ tend vers un point à l'infini relatif à un cycle isotrope Og de C , tandis que le point m_1 pris sur $(\mathfrak{M}_1)$ tend vers une position relative à un cycle isotrope OG_1 de C_1 , le cycle OG_1 étant distinct du cycle Og_1 conjugué de Og ; je considère en même temps le cycle OG de C conjugué de OG_1 . La droite OG_1 est distincte de Og_1 , si la droite Og ne porte qu'un cycle; bornons-nous au cas où les droites OG_1 et Og_1 sont distinctes. La droite OG_1 pourrait coïncider avec Og et par suite OG avec Og_1 , si le cône C admettait des couples de génératrices isotropes conjuguées; en particulier, ceci arrivera fatalement si C est réel (v) ou (G). Supposons encore OG_1 distincte de Og . Les quatre génératrices isotropes Og , Og_1 , OG , OG_1 sont donc quatre droites distinctes (fig. a). Je considère la droite Oz perpendiculaire au plan Ogg_1 de sorte que zOg , zOg_1 soient les deux plans isotropes tangents respectivement à C le long de Og et C_1 le long de Og_1 ; je considère de même

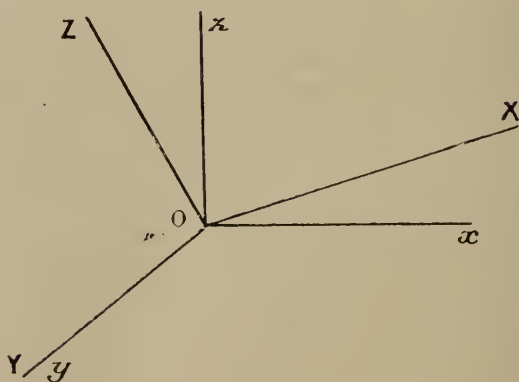
les plans analogues OZG , OZG_1 . Les plans Ogg_1 et OGG_1 sont réels, leur intersection sera la droite Oy ; Oz est une droite

Fig. a.



réelle, je définis ainsi un trièdre de coordonnées réel (fig. b) $Oxyz$, dans lequel Og a pour équations $z = 0$, $x + iy = 0$.

Fig. b.



Je prends maintenant OY coïncidant avec la direction Oy ; puis la droite indéfinie OZ déjà citée et la droite indéfinie OX perpendiculaire au plan ZOY ; les sens positifs seront définis sans ambiguïté sur OX et OZ par cette condition que OG_1 , dans le système $OXYZ$, ait pour équations $X + iY = 0$, $Z = 0$ et que les deux trièdres $OXYZ$ et $Oxyz$ aient même disposition. On aura, θ étant

l'angle (Oz, OZ) :

$$(50) \quad \begin{cases} x = X \cos \theta - Z \sin \theta, & X = \cos \theta + z \sin \theta, \\ y = Y, & Y = y, \\ z = X \sin \theta + Z \cos \theta, & Z = -x \sin \theta + z \cos \theta; \end{cases}$$

d'où l'on déduit, par exemple,

$$(51) \quad \begin{cases} x + iy = (X + iY) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (X - iY) \sin^2 \frac{\theta}{2} - Z \sin \theta, \\ x - iy = (X - iY) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (X + iY) \sin^2 \frac{\theta}{2} - Z \sin \theta, \\ z = \frac{(X + iY) \sin \theta}{2} + \frac{(X - iY) \sin \theta}{2} + Z \cos \theta. \end{cases}$$

Or les coordonnées d'un point d'une surface S ou S' résultent de la composition de trois vecteurs (A) , (B) , (C) :

$$\begin{aligned} (A) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \frac{\tau i}{2} \int c'' dc' - c' dc'', \\ & \frac{\tau i}{2} \int c \, dc'' - c'' dc, \\ & \frac{\tau i}{2} \int c' dc - c \, dc'; \end{aligned} \right. \\ (B) \quad & \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\tau i}{2} \int c_1'' dc_1' - c_1' dc_1'', \\ & -\frac{\tau i}{2} \int c_1 \, dc_1'' - c_1'' dc_1, \\ & -\frac{\tau i}{2} \int c_1' dc_1 - c_1 \, dc_1'; \end{aligned} \right. \\ (C) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \frac{\tau i}{2} (c' c_1'' - c'' c_1'), \\ & \frac{\tau i}{2} (c'' c_1 - c \, c_1''), \\ & \frac{\tau i}{2} (c \, c_1' - c' c_1). \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

J'introduis alors les coordonnées c, c', c'' d'un point m de $(\mathcal{V})$ et les projections de (A) dans le système $Oxy z$ par les formules déjà données (43) première ligne :

$$(A) \quad x + iy = \frac{\tau}{2} l_1, \quad x - iy = -\frac{\tau}{2} l_2, \quad z = \frac{\tau}{4} l_3,$$

λ, μ étant données par (45) ou (46); le paramètre t est celui qui tend vers zéro quand m s'éloigne à l'infini sur Og .

Je définis de même les coordonnées C, C', C'' d'un point m_1 de $(\mathcal{B}_1)$ et les projections de (B) dans le système $OXYZ$; il suffit de désigner par L, M les quantités analogues à λ, μ

$$\left(L = \frac{C + iC'}{C''}, \quad M = \frac{C - iC'}{C''} \right),$$

par I'_1, I'_2, I'_3 les intégrales

$$I'_1 = \int \frac{dL}{1 + LM}, \quad I'_2 = \int \frac{dM}{1 + LM}, \quad I'_3 = \int \frac{L dM - M dL}{1 + LM},$$

de la sorte (B) est défini dans le système $OXYZ$ par les formules

$$(B) \quad X + iY = \frac{\tau}{2} I'_1, \quad X - iY = \frac{\tau}{2} I'_2, \quad Z = \frac{\tau}{4} I'_3.$$

Les quantités L, M sont définies par des développements du type (45) ou (46) en fonction d'un paramètre t_1 qui tend vers zéro quand m_1 s'éloigne à l'infini; t_1 n'est plus une variable conjuguée de t . Les formules (51) permettent ensuite d'avoir les projections de (B) dans le système $Oxyz$. Quant au vecteur C , j'appelle c_1, c'_1, c''_1 les coordonnées dans $Oxyz$ du point m_1 ; les formules (51) donnent c_1, c'_1, c''_1 en fonction de C, C', C'' . Par suite, nous avons tous les éléments géométriques; pour le plan tangent on emploie la formule (47). Les développements en série sont donnés dans le *Mémoire de l'École Normale* (p. 278-281). Le reste n'est plus qu'une question de patience et se traite par la méthode que j'ai donnée un peu plus haut. Il faut encore distinguer plusieurs cas suivant que le cycle Og et le cycle OG_1 sont tous deux du type (45), ou du type (46), ou l'un d'un type, l'autre de l'autre.

Si l'on suppose les deux cycles du type (45) (classe supérieure au degré), on n'obtient sur S ou S' que le point à l'infini sur la droite d'intersection des deux plans isotropes πOg et ZOG_1 ; le plan tangent est le plan de l'infini.

Si l'on suppose les deux cycles du type (46) (classe et degré égaux), on obtient tous les points à l'infini des deux plans πOg et ZOG_1 , le plan tangent est le plan de l'infini.

Si l'on suppose que le cycle Og soit du type (45), tandis que OG_1

est du type (46), on obtient tous les points à l'infini du plan isotrope zOg .

Nous pouvons remarquer que l'on a avantage ici à introduire un troisième trièdre de référence, imaginaire cette fois, dont les trois faces sont : le plan OgG_1 , le plan isotrope zOg , le plan isotrope ZOG_1 : un seul changement de coordonnées appliqué aux trois vecteurs A, B, C donne les projections de ces vecteurs dans le trièdre en question.

Que OG_1 coïncide avec Og_1 , cela au fond importe peu, ce qui précède s'applique ; d'ailleurs, dans ce cas, on peut se dispenser de tout changement d'axes.

Mais que OG_1 coïncide avec Og , tout ce qui précède ne subsiste plus ; dans ce cas, on n'a pas besoin de changements d'axes ; on reconnaît aisément qu'on obtient le point à l'infini de la droite Og .

La discussion a donc fourni le résultat suivant : *les surfaces S et S' étant supposées algébriques*, les cônes C et C_1 ont des génératrices isotropes ; suivant chacune d'elles ils sont tangents au cône isotrope de même sommet ; ces plans tangents isotropes communs coupent le plan de l'infini suivant des droites qui constituent, par leur ensemble, le total de la section de S et S' par le plan de l'infini. Le plan tangent à l'un de ces points à l'infini est toujours le plan de l'infini, sauf pour les droites provenant d'un cycle isotrope dont la classe surpasse le degré.

Les seuls points réels à l'infini des surfaces S et S_1 sont sur les axes des plans réels obtenus en associant une génératrice isotrope de C à la génératrice conjuguée de C_1 ; en un tel point, le plan tangent est rejeté à l'infini.

16. Parmi les surfaces applicables sur le parabolôïde, il y en a une qui joue un rôle un peu exceptionnel, c'est précisément le parabolôïde lui-même. Les points à l'infini offrent la configuration trouvée précédemment. En prenant pour (13) la droite isotrope $x - iy = 0, z = 1$ et pour courbe (13₁) la droite conjuguée $x + iy = 0, z = 1$, on obtient le parabolôïde $\mathcal{P}$. La surface S' se réduit à l'axe des z , la surface Σ au plan $z = 0$. Les courbes (14) et (14₁) sont les droites isotropes $x - iy = \text{const.}$ ou $x + iy = \text{const.}$ du plan $z = 0$. On peut remarquer que le cône C se réduisant à un plan et la section σ à une droite, on peut parler du degré d'un cycle

porté par cette droite, mais non de la classe de ce cycle; c'est la raison pour laquelle le parabolôïde joue ce rôle exceptionnel. Le fait que $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}_1)$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à tous les plans contenant Oz ou encore que chacune d'elles reste invariante dans une rotation autour de Oz entraîne bien la conséquence que $\mathcal{Q}$ admette tous ces plans pour plans de symétrie de première espèce et Oz pour axe de rotation.

Ceci conduit à parler rapidement des surfaces de révolution et des hélicoïdes applicables sur $\mathcal{Q}$; les surfaces de révolution ou hélicoïdales applicables sur une surface de révolution donnée s'obtiennent, comme on sait, par des quadratures, ici, elles sont immédiates, et il est même assez curieux qu'aucun géomètre n'ait remarqué que l'on obtient, suivant le cas, des surfaces applicables effectivement sur $\mathcal{Q}$, ou des surfaces dont l'élément linéaire se présente bien sous la même forme d'écriture, si l'on peut dire, bien que ces surfaces ne puissent recouvrir aucune région du parabolôïde. Dans le cas actuel, les propriétés de ces surfaces particulières, en réalité très voisines des surfaces algébriques, se rattachent étroitement aux propriétés étudiées dans tout ce Chapitre. L'existence d'un mouvement de révolution ou d'un mouvement hélicoïdal laissant la surface invariante entraîne que $(\mathfrak{W})$ soit de révolution autour de l'axe du mouvement, donc que $(\mathfrak{W})$ soit un cercle réel $[(v)$ ou $(G)]$ ou imaginaire de la sphère; si la surface S est réelle, l'axe est nécessairement réel, nous le prenons pour axe Oz et nous épuisons tous les cas possibles en prenant (a et b désignant deux constantes réelles)

$$(52) \quad \begin{cases} c = \sin(a + bi) \cos(u + iv), \\ c' = \sin(a + bi) \sin(u + iv), \\ c'' = \cos(a + bi). \end{cases}$$

Nous avons aisément :

$$(S) \quad \begin{cases} x = -2\tau \cos a \operatorname{ch} b [\sin a \operatorname{ch} b \cos u \operatorname{sh} v + \cos a \operatorname{sh} b \sin u \operatorname{ch} v], \\ y = -2\tau \cos a \operatorname{ch} b [-\sin a \operatorname{ch} b \sin u \operatorname{sh} v + \cos a \operatorname{sh} b \cos u \operatorname{ch} v], \\ z = \frac{\tau}{2} [v(1 - \cos 2a \operatorname{ch} 2b) + u \sin 2a \operatorname{sh} 2b + (\sin^2 a + \operatorname{sh}^2 b) \operatorname{sh} 2v]; \end{cases}$$

$$(S') \quad \begin{cases} x = -2\tau \sin a \operatorname{sh} b [\sin a \operatorname{ch} b \sin u \operatorname{ch} v - \cos a \operatorname{sh} b \cos u \operatorname{sh} v], \\ y = -2\tau \sin a \operatorname{sh} b [\sin a \operatorname{ch} b \cos u \operatorname{ch} v + \cos a \operatorname{sh} b \sin u \operatorname{sh} v], \\ z = \frac{\tau}{2} [v(1 - \cos 2a \operatorname{ch} 2b) + u \sin 2a \operatorname{sh} 2b - (\sin^2 a + \operatorname{sh}^2 b) \operatorname{sh} 2v]. \end{cases}$$

Les courbes $v = \text{const.}$ sont des hélices circulaires d'axe Oz et de pas égal à $\pi \sin 2a \operatorname{sh} 2b$; les surfaces sont donc de révolution si $\sin 2a \operatorname{sh} 2b = 0$, ce qui entraîne trois cas :

1° $b = 0$; $c'' = \cos a$; la courbe $(\mathfrak{W})$ est un cercle réel (v) de la sphère; S est de révolution, S' se réduit à Oz . L'origine est centre de S et en même temps point conique de S ; $(\mathfrak{W})$ coïncide avec $(\mathfrak{W}_1)$, la symétrie par rapport à l'origine est de seconde espèce; le plan xOy est plan de symétrie de seconde espèce pour S et ne la coupe pas.

2° $a = 0$; $c'' = \operatorname{ch} b$; la courbe $(\mathfrak{W})$ est un cercle imaginaire, mais réel (g); S' est encore réduite à Oz , S étant encore applicable physiquement sur $\mathfrak{Q}$, admettant l'origine pour centre et point conique isolé (symétrie de seconde espèce); le plan xOy est encore plan de symétrie de seconde espèce pour S et la touche suivant un parallèle de rebroussement.

3° $a = \frac{\pi}{2}$; $c'' = -i \operatorname{sh} b$; la courbe $(\mathfrak{W})$ est l'un des deux cercles d'intersection de la sphère avec un cylindre de révolution réel (c) d'axe Oz et de rayon $\operatorname{ch} b$ supérieur à 1; $(\mathfrak{W})$ et $(\mathfrak{W}_1)$ sont symétriques l'une de l'autre, soit par rapport à l'origine, soit par rapport au plan xOy . La surface S se réduit cette fois à l'axe des z ; S' est de révolution, mais ne recouvre pas $\mathfrak{Q}$ physiquement. L'origine est centre de symétrie de seconde espèce pour S' ; le plan équatorial xOy est plan de symétrie de seconde espèce pour S' et la coupe suivant un parallèle de rebroussement.

Dans un Mémoire complémentaire, qui paraîtra prochainement dans ce même Recueil, j'étudierai les surfaces déduites de la cubique de Lyon et montrerai les conséquences curieuses que l'on peut déduire du travail de M. Thybaut.

pondre une fonction méromorphe $f_j(x)$, solution de l'équation aux différences finies ⁽¹⁾. Pour les grandes valeurs de la variable, ces fonctions sont représentées asymptotiquement par des séries de la forme

$$(9) \quad \frac{\alpha_i^x}{x^{\lambda_i}} \left[\Lambda_{0,i} + \frac{\Lambda_{1,i}}{x} + \dots + \frac{\Lambda_{\nu,i}}{x^\nu} + \dots \right].$$

Nous examinerons ici ce que deviennent ces résultats quand le polynôme B_0 admet une racine double au voisinage de laquelle les solutions de (7) sont irrégulières.

I.

Il nous faut tout d'abord rappeler comment se comportent les solutions de l'équation différentielle (7) au voisinage de cette racine double ⁽²⁾.

Posons

$$(10) \quad \gamma = \alpha - \frac{1}{t}, \quad \varphi(\gamma) = \psi(t).$$

On a

$$(11) \quad \frac{d^n \varphi}{du^n} = b_{n,0} t^{2n} \frac{d^n \psi}{dt^n} + b_{n,1} t^{2n-1} \frac{d^{n-1} \psi}{dt^{n-1}} + \dots \\ + b_{n,p} t^{2n-p} \frac{d^{n-p} \psi}{dt^{n-p}} + \dots + b_{n,n-1} t^{n+1} \frac{d\psi}{dt},$$

les coefficients $b_{n,p}$ étant définis par la formule

$$(12) \quad b_{n,p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} (n-1)(n-2)\dots(n-p).$$

L'équation (7) devient ainsi

$$(13) \quad M_0 \frac{dq \psi}{dt^q} + M_1 \frac{dq-1 \psi}{dt^{q-1}} + \dots + M_q \psi = 0,$$

⁽¹⁾ Voir *Sur la représentation des solutions d'une équation aux différences finies linéaire pour les grandes valeurs de la variable* (Acta mathematica, t. XXXVI).

⁽²⁾ Voir POINCARÉ, *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires* (Acta mathematica, t. VIII, 1886).

première solution de l'équation (13). On choisit les $q - 1$ solutions $\gamma(z)$ correspondant aux $q - 1$ racines non entières de l'équation déterminante relative à l'origine; le contour d'intégration se compose d'un lacet formé par un petit cercle entourant l'origine et de la demi-droite Ob ; on évite le point b par un demi-cercle tourné soit du côté des arguments croissants, soit du côté des arguments décroissants. Les $(q - 1)$ fonctions $\psi(t)$ déduites ainsi de la relation (16) sont solutions de l'équation (13).

Au total on a formé q solutions de (13) qui sont indépendantes. De plus, on sait former des séries, en général divergentes, qui représentent ces q fonctions pour les grandes valeurs de t .

Si l'on désigne par $-\omega$ l'argument avec lequel t devient infini dans son plan, par β l'argument de b , la fonction $\psi_1(t)$ est représentée asymptotiquement par :

$$(18) \quad \psi_1(t) = \frac{e^{-bt}}{t^{u+1}} \left[a_0 + \frac{a_1}{t} + \dots + \frac{a_n}{t^n} + \frac{\varepsilon}{t^n} \right]$$

quand l'argument ω reste dans les limites

$$\beta - \frac{3\pi}{2} < \omega < \beta + \frac{3\pi}{2}.$$

D'autre part, les fonctions $\psi(t)$, déduites de l'intégration le long du lacet entourant l'origine, sont représentées par des séries analogues, où b est nul, quand l'argument ω reste dans les limites

$$\beta - \frac{\pi}{2} < \omega < \beta + \frac{\pi}{2}.$$

Les dérivées des fonctions $\psi(t)$ sont représentées asymptotiquement par des séries analogues.

Dans le plan des γ considérons un petit cercle ayant le point α pour centre; soit d le point situé entre l'origine et le point α , où ce cercle coupe la droite $O\alpha$; on a

$$t = \frac{e^{i\pi}}{\gamma - \alpha}.$$

Quand le point t s'éloigne à l'infini dans son plan avec l'argument $-\omega$, le point γ décrit un rayon du cercle et tend vers le

point a ; l'argument ω' de $y - a$ est

$$\omega' = \pi + \omega.$$

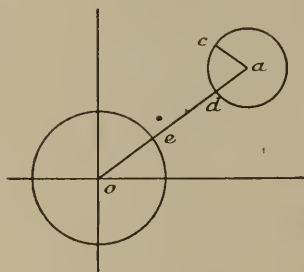
Considérons un rayon ac du cercle tel que

$$\beta - \frac{3\pi}{2} < \omega < \beta + \frac{3\pi}{2},$$

c'est-à-dire tel que

$$\beta + \pi - \frac{3\pi}{2} < \omega' < \beta + \pi + \frac{3\pi}{2}.$$

Fig. 1.



A la fonction $\psi_1(t)$ correspond par le changement de variable (10) une fonction $\varphi_1(y)$, telle que, quand y tend vers a le long de ac , on ait

$$\varphi_1(y) = e^{\frac{h}{y-a}} \frac{(y-a)^{\mu+1}}{e^{i\pi(\mu+1)}} [a_0 - a_1(y-a) \dots (-1)^n a_n(y-a)^n + \varepsilon(y-a)^n].$$

Si le rayon ac est choisi de telle sorte que

$$\beta + \pi - \frac{\pi}{2} < \omega' < \beta + \pi + \frac{\pi}{2},$$

le module de $\varphi_1(y)$, ainsi que celui de ses différentes dérivées, tend vers zéro comme $e^{-\frac{h}{r}}$, h étant un nombre positif et r le module de $y - a$, qui tend vers zéro.

II.

Pour former une solution de l'équation aux différences finies, on peut donc procéder de la façon suivante :

Le contour d'intégration S_1 est constitué par le rayon ac , l'arc

de cercle cd parcouru en sens direct et la portion de droite de [fig. 1]. Si I_1 est la fonction de x définie par

$$I_1 = \int_{S_1} x^{x-1} \varphi_1(x) dx,$$

on a

$$F[I_1] = M[\varphi_1(e)].$$

Supposons que le point e soit suffisamment voisin de l'origine pour que le cercle Γ de rayon Oe , ayant l'origine pour centre, ne contienne à son intérieur aucune racine finie de B_0 .

Quand l'équation fondamentale relative à l'origine, pour l'équation (7), admet les q racines simples $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_q$, on peut former q solutions indépendantes de (7) $v_1, v_2, \dots, v_q$, qui par une rotation dans le sens direct le long de Γ deviennent respectivement $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_q$ tels que

$$\overline{v}_1 = \varpi_1 v_1, \quad \overline{v}_2 = \varpi_2 v_2, \quad \dots, \quad \overline{v}_q = \varpi_q v_q.$$

Quand l'équation fondamentale admet des racines multiples, on peut former q solutions indépendantes $v_1, \dots, v_q$, qui se répartissent en autant de groupes qu'il y a de racines distinctes et les l solutions du groupe, correspondant à la racine ϖ_l d'ordre de multiplicité l , deviennent par une rotation le long de Γ dans le sens direct

$$\overline{v}_1 = \varpi_1 v_1, \quad \overline{v}_2 = \varpi_{2,1} v_1 + \varpi_2 v_2, \quad \dots, \quad \overline{v}_l = \varpi_{l,1} v_1 + \dots + \varpi_l v_l.$$

Dans les deux cas, on peut former q solutions indépendantes V_j , qui, par une rotation autour de l'origine le long de Γ dans le sens direct, deviennent $\overline{V}_j$ tel que

$$e^{2i\pi x} \overline{V}_j - V_j = v_j.$$

Ces fonctions V_j sont des fonctions linéaires des v_j , dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction de $e^{2i\pi x}$. Ces coefficients ne contiennent en dénominateur que des expressions de la forme $\varpi_j e^{2i\pi x} - 1$ (1).

On a donc

$$M[\overline{V}_j] - M[V_j] = M[v_j]:$$

(1) *Acta mathematica*, t. XXXVI.

et si l'on pose

$$I_2 = \int_{\Gamma} y^{x-1} [c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_q V_q] dy,$$

il vient

$$F[I_2] = M[c_1 v_1(e) + c_2 v_2(e) + \dots + c_q v_q(e)].$$

Si les constantes $c_1, c_2, \dots, c_q$ sont choisies de telle sorte, qu'au voisinage de e , on ait

$$\varphi_1(y) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_q v_q,$$

la fonction

$$(19) \quad f_1(x) = I_1 - I_2$$

est une solution de l'équation aux différences finies (1).

On aurait pu, au lieu du contour S_1 , choisir le contour S_2 constitué par le même rayon ac , l'arc cd joignant le point c au point d sur la circonférence parcourue cette fois en sens inverse et la portion de droite de ; la valeur de $S_1(y)$ au point e est alors

$$\overline{\varphi_1(y)} = c'_1 v_1 + c'_2 v_2 + \dots + c'_q v_q,$$

et la fonction $f_2(x)$

$$(18) \quad f_2(x) = \int_{S_2} y^{x-1} \varphi_1(y) dy - \int_{\Gamma} y^{x-1} [c'_1 V_1 + c'_2 V_2 + \dots + c'_q V_q] dy$$

est une seconde solution de l'équation aux différences finies.

Les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissent manifestement des propriétés générales des différentes solutions $f_j(x)$ de l'équation aux différences finies correspondant aux racines α_j de B_0 au voisinage desquelles les solutions de (7) sont régulières; elles sont méromorphes et leurs pôles, racines de l'équation

$$\omega e^{2i\pi x} = 1 = 0,$$

où ω est une racine de l'équation fondamentale de (7) relative à l'origine, sont situés sur des parallèles à l'axe des abscisses.

Il reste à rechercher la façon dont elles se comportent quand le point x s'éloigne à l'infini.

III.

Pour étudier les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, nous diviserons les contours d'intégration tels que S_1 en plusieurs parties.

Considérons tout d'abord une région du plan des y , voisine de a , et dans laquelle on a

$$\varphi_1(y) = e^{\frac{b}{y-a}}(y-a)^\mu [a_0 + a_1(y-a) + \dots + a_n(y-a)^n + \varepsilon(y-a)^n],$$

et posons

$$y = a(1 + e^{i\pi} z);$$

il vient

$$\int y^{x-1} \varphi_1(y) dy = -a^{x+\mu} e^{i\pi\mu} \int (1-z)^{x-1} e^{-\frac{k}{z}} z^\mu [a_0 - a_1 a z \dots] dz$$

avec

$$k = \frac{b}{a}.$$

Posons

$$z = \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} u,$$

et désignons par z_0 et y_0 le point du plan des z et celui du plan des y correspondant à $u = 1$.

Quand le point x s'éloigne à l'infini, le point y_0 tend vers le point a et le module de $y_0 - a$ tend vers zéro comme $\frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}$, ρ étant le module de x ; il vient

$$\begin{aligned} & \int y^{x-1} \varphi_1(y) dy \\ &= -a^{x+\mu} \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} e^{i\pi\mu} \\ & \quad \times \int \left[1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} u\right]^{x-1} u^\mu e^{-\left(\frac{kx}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[a_0 - a_1 a \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} u + \dots\right] du. \end{aligned}$$

L'intégrale du premier membre sera prise sur une portion de droite contenant le point y_0 ; l'intégrale du second membre sera prise alors sur une portion de droite contenant le point 1; or nous serons amené à poser

$$u = 1 + v,$$

le module maximum de v sur le chemin d'intégration tendant vers zéro comme une puissance négative de ρ , quand ρ augmente indéfiniment.

Le module de u reste donc fini sur tout le contour d'intégration et quand φ est suffisamment grand, on a

$$\left[1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} u\right]^{x-1} = e^{-\left(kx\right)^{\frac{1}{2}} u - \frac{ku^2}{2}} \left[1 + \frac{b_1(u)}{x^2} + \dots + \frac{b_n(u)}{x^{\frac{n}{2}}} + \dots\right],$$

la série du second membre étant convergente. Le coefficient $b_n(u)$ est un polynôme en u dont les termes ont tous un degré de même parité que n ; le terme de plus haut degré est de degré $3n$ et le terme de plus bas degré est de degré $n+2$. De même, quand φ est suffisamment grand, la fonction $\left[1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} u\right]^{-1}$ se développe suivant les puissances croissantes de $\frac{u}{x^{\frac{1}{2}}}$; on a donc

$$\left[1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} u\right]^{x-1} = e^{-\left(kx\right)^{\frac{1}{2}} u - \frac{ku^2}{2}} \left[1 + \frac{c_1(u)}{x^2} + \dots + \frac{c_n(u)}{x^{\frac{n}{2}}} + \dots\right].$$

Le coefficient $c_n(u)$ est un polynôme en u de degré $3n$, ne contenant que des termes dont le degré a même parité que n ; son terme de plus bas degré est de degré $n+2$; le reste de cette série convergente s'écrit

$$R_n = \frac{1}{x^{\frac{n}{2}}} \left[\frac{c_{n+1}(u)}{x^2} + \dots + \frac{c_{n+p}(u)}{x^{\frac{p}{2}}} + \dots \right].$$

Quand φ augmente indéfiniment, les termes de la série convergente entre parenthèses tendent vers zéro sur tout le parcours d'intégration puisque u reste fini; on a donc

$$R_n = \frac{\epsilon'}{x^2}$$

et

$$\left[1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} u\right]^{x-1} = e^{-\left(kx\right)^{\frac{1}{2}} u - \frac{ku^2}{2}} \left[1 + \frac{c_1(u)}{x^2} + \dots + \frac{c_n(u)}{x^{\frac{n}{2}}} + \frac{\epsilon'}{x^2}\right].$$

En multipliant par la série asymptotique figurant sous le signe $\int$

il vient finalement

$$\begin{aligned} \int y^{x-1} \varphi_1(y) dy \\ = -a^{x+\mu} \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} e^{i\pi\mu} \\ \times \int e^{-(kx)^{\frac{1}{2}} \left(u + \frac{1}{u}\right) - \frac{kx^2}{2}} u^\mu \left[a_0 + \frac{d_1(u)}{\frac{1}{x^2}} + \dots + \frac{d_n(u)}{\frac{n}{x^2}} + \frac{\varepsilon}{\frac{n}{x^2}} \right] dx, \end{aligned}$$

la quantité ε tendant uniformément vers zéro sur tout le parcours d'intégration. D'autre part, le polynôme $d_n(u)$ est de degré $3n$, ne contient que des termes dont le degré a même parité que n , et est au moins égal à n . On peut d'ailleurs remarquer que ce résultat serait encore valable si le module de u , au lieu de rester fini sur le contour d'intégration, était seulement astreint à rester inférieur à ρ^ν , ν étant un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}$ et ne dépendant que de n . En posant

$$u = 1 + v,$$

il vient

$$\begin{aligned} \int y^{x-1} \varphi_1(y) dy = -a^{x+\mu} \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} e^{i\pi\mu} e^{-2(kx)^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{2}} \\ \times \int e^{-(kx)^{\frac{1}{2}} \frac{v^2}{1+v} - \frac{k}{2} (v^2 + 2v)} (1+v)^\mu \\ \times \left[a_0 + \frac{d_1(1+v)}{\frac{1}{x^2}} + \dots + \frac{d_n(1+v)}{\frac{n}{x^2}} + \frac{\varepsilon}{\frac{n}{x^2}} \right] dv, \end{aligned}$$

et en posant

$$(kx)^{\frac{1}{2}} v = \lambda,$$

il vient

$$\int y^{x-1} \varphi_1(y) dy = P \int f(\lambda) d\lambda$$

avec

$$(20) \quad P = -a^{x+\mu} \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{1}{(kx)^{\frac{1}{2}}} e^{i\pi\mu - 2(kx)^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{2}}$$

Le module de λ sur le contour d'intégration est au plus égal à ρ^ν , ν étant un nombre positif inférieur à $\frac{1}{4}$; le module de v reste donc inférieur à l'unité dès que ρ est suffisamment grand et l'on peut

écrire

$$\begin{aligned} & - (kx)^{\frac{1}{2}} \frac{v^2}{1+v} - \frac{k^2}{2} (v^2 + 2v) \\ & = - (kx)^{\frac{1}{2}} v^2 [1 - v + v^2 - \dots] - \frac{k}{2} [v^2 + 2v] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & - (kx)^{\frac{1}{2}} \frac{v^2}{1+v} - \frac{k^2}{2} (v^2 + 2v) \\ & = - \lambda^2 \left[1 - \frac{\lambda}{(kx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda^2}{(kx)^{\frac{3}{2}}} - \dots \right] - \frac{k}{2} \left[\frac{2\lambda}{kx^{\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda^2}{(kx)^2} \right]; \end{aligned}$$

mais on a

$$e^{-\lambda^2 + \frac{\lambda^3}{(kx)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\lambda^4}{(kx)^{\frac{3}{2}}} + \dots} = e^{-\lambda^2} \left[1 + \frac{e_1(\lambda)}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{e_n(\lambda)}{x^{\frac{n}{2}}} + \dots \right];$$

le polynôme $e_n(\lambda)$ est de degré $3n$, ne contient que des termes dont le degré au moins égal à $n+2$ est de même parité que n .

De même,

$$e^{-\frac{k}{2} \left(\frac{2\lambda}{kx^{\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda^2}{kx^2} \right)} = 1 + k_1 \frac{\lambda}{x^{\frac{1}{2}}} + k_2 \left(\frac{\lambda}{x^{\frac{1}{2}}} \right)^2 + \dots + k_n \left(\frac{\lambda}{x^{\frac{1}{2}}} \right)^n + \dots,$$

les coefficients $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ étant indépendants de λ .

Le terme $\left(1 + \frac{\lambda}{kx^{\frac{1}{2}}} \right)^u$ se développe également en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{\lambda}{x^{\frac{1}{2}}}$.

Finalement on a

$$e^{- (kx)^{\frac{1}{2}} \frac{v^2}{1+v} - \frac{k}{2} (v^2 + 2v)} (1+v)^u = e^{-\lambda^2} \left[1 + \frac{f_1(\lambda)}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{f_n(\lambda)}{x^{\frac{n}{2}}} + \dots \right].$$

Le polynôme $f_n(\lambda)$ est de degré $3n$, ne contient que des termes dont le degré au moins égal à n est de même parité que n . Le reste R_n s'écrit

$$R_n = \frac{1}{x^{\frac{n}{2}}} \left[\frac{f_{n+1}(\lambda)}{x^2} + \dots + \frac{f_{n+p}(\lambda)}{x^2} + \dots \right].$$

Si le nombre ν est tel que

$$3\nu(n+p) - \frac{p}{2} < 0,$$

le rapport $\frac{f_{n+p}(\lambda)}{x^{\frac{p}{2}}}$ tend vers zéro; par conséquent, si le nombre ν est choisi de telle sorte que

$$3\nu(n+1) - \frac{1}{2} < 0,$$

il est clair que tous les termes de la parenthèse tendent vers zéro quand p augmente indéfiniment, et l'on peut écrire

$$R_n = \frac{\varepsilon'}{x^{\frac{n}{2}}},$$

ε' tendant uniformément vers zéro sur tout le parcours d'intégration.

D'autre part, le polynôme

$$d_p \left[1 + \frac{\lambda}{(kx)^{\frac{1}{4}}} \right]$$

s'ordonne par rapport aux puissances croissantes de $\left(\frac{\lambda}{kx^{\frac{1}{4}}}\right)$; son terme de plus haut degré est de degré $3p$; il est multiplié dans la série asymptotique figurant sous le signe $\int$ par $\frac{1}{x^{\frac{p}{2}}}$ qui peut s'écrire $\frac{1}{x^{\frac{2p}{4}}}$. On a donc

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{d_1(u)}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{d_n(u)}{x^{\frac{n}{2}}} + \frac{\varepsilon}{x^{\frac{n}{2}}} \\ = a_0 + \frac{g_1(\lambda)}{x^{\frac{1}{4}}} + \frac{g_2(\lambda)}{x^{\frac{2}{4}}} + \dots + \frac{g_{n'}(\lambda)}{x^{\frac{n'}{4}}} + \frac{\varepsilon''}{x^{\frac{n'}{4}}}. \end{aligned}$$

Le polynôme $g_p(\lambda)$ ne contient que des termes de même parité

que p . La quantité sous le signe $\int$ s'écrit donc finalement

$$e^{-\lambda^2} \left[a_0 + \frac{G_1(\lambda)}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{G_2(\lambda)}{x^{\frac{2}{2}}} + \dots + \frac{G_p(\lambda)}{x^{\frac{p}{2}}} + \dots + \frac{G_n(\lambda)}{x^{\frac{n}{2}}} + \frac{\varepsilon}{x^{\frac{n}{2}}} \right].$$

$G_p(\lambda)$ étant un polynôme ne contenant que des termes dont le degré a même parité que p et ε tendant uniformément vers zéro sur tout le contour d'intégration, si le module de λ y reste au plus égal à φ^ν , ν étant un nombre positif inférieur à un nombre ν_1 qui ne dépend que de n , le nombre ν_1 est sûrement inférieur à $\frac{1}{4}$.

On a alors

$$\int y^{n-1} \varphi_1(y) dy = p \int e^{-\lambda^2} \left[a_0 + \frac{G_1(\lambda)}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{G_n(\lambda)}{x^{\frac{n}{2}}} + \frac{\varepsilon}{x^{\frac{n}{2}}} \right] d\lambda,$$

l'intégrale du second membre est prise dans le plan des λ sur une portion de droite passant par l'origine comprise entre deux points situés de part et d'autre de l'origine à une distance égale à φ^ν ; si sur cette droite l'argument de λ^2 est tel que son cosinus soit positif, ce second membre devient, quand φ augmente indéfiniment,

$$(21) \quad \int y^{x-1} \varphi_1(y) dy = p \left[A_0 + \frac{A_2}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{A_{2p}}{x^{\frac{p}{2}}} + \frac{\varepsilon}{x^{\frac{p}{2}}} \right],$$

en posant

$$2p = n.$$

On voit que les termes contenant les puissances impaires de $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ disparaissent. La quantité ε tend uniformément vers zéro quand l'argument de λ^2 varie entre des limites, telles que son cosinus demeure constamment positif.

Au lieu de considérer un chemin d'intégration constitué par une petite droite passant par le point $u = 1$, on peut prendre pour contour d'intégration une petite portion de droite passant par le point

$$u = -1.$$

On pose alors

$$u = e^{im\pi(1-v)} = -1 + v,$$

m étant un nombre impair positif ou négatif.

On peut écrire

$$\begin{aligned} \int y^{x-1} \varphi(y) dy &= -\alpha^{x+\mu} \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} e^{i\pi\mu} e^{2(kx)^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad \times \int e^{-(kx)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n+1}{u}\right)^2 - \frac{kn^2}{2}} u^\mu \left[a_0 + \frac{d_1(u)}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{d_n(u)}{x^{\frac{n}{2}}} + \frac{\varepsilon}{x^{\frac{n}{2}}} \right] \\ &= \alpha^{x+\mu} \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} e^{i\pi\mu} e^{2(kx)^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{2} + im\pi\mu} \\ &\quad \times \int e^{-(kx)^{\frac{1}{2}} \frac{v^2}{e^{ik\pi(1-v)} - \frac{k}{2}(v^2-2v)}} (1-v)^\mu \\ &\quad \times \left\{ a_0 + \frac{d_1[e^{im\pi(1-v)}]}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{\varepsilon}{x^{\frac{n}{2}}} \right\}. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$x = x' e^{2im\pi},$$

l'exposant de e sous le signe $\int$ s'écrit

$$-(kx')^{\frac{1}{2}} \frac{v^2}{1-v} - \frac{k}{2} (v^2 - 2v).$$

D'autre part, le polynôme $d_p(u)$ ne contient que des termes de même parité que p .

On a donc

$$d_p[e^{im\pi(1-v)}] = e^{ipm\pi} d_p(1-v),$$

d'où

$$\frac{d_p[e^{im\pi(1-v)}]}{x^{\frac{p}{2}}} = \frac{d_p(1-v)}{x'^{\frac{p}{2}}}.$$

Si l'on pose

$$(kx')^{\frac{1}{4}} = \lambda,$$

on aura donc sous le signe $\int$ une fonction se déduisant de celle qui a été considérée dans le cas précédent en y changeant x en x' et λ en $-\lambda$; il vient ainsi

$$\int y^{x-1} \varphi_1(y) dy = \nu' \int e^{-\lambda^2} \left[a_0 + \frac{G_1(-\lambda)}{x'^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{G_n(-\lambda)}{x'^{\frac{n}{2}}} + \frac{\varepsilon}{x'^{\frac{n}{2}}} \right] d\lambda.$$

avec

$$(22) \quad P' = -\alpha^{\lambda+\mu} e^{i\pi\mu} \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{1}{(kx')^{\frac{1}{2}}} e^{2kx'\frac{1}{2} - \frac{k}{2} + im\pi},$$

On a donc finalement

$$(23) \quad \int y^{x-1} \varphi_1(y) dy = P' \left[A_0 + \frac{A_2}{x'^2} + \dots + \frac{A_{2p}}{x'^2} + \frac{\varepsilon}{x'^2} \right].$$

IV.

Étant donné un nombre positif m aussi petit que l'on veut, on peut toujours tracer dans le plan des y un cercle C de centre a et de rayon assez petit pour que l'on ait

$$\varphi_1(y) = e^{\frac{b}{y-a}} (y-a)^\mu [a_0 + \tau_1],$$

τ_1 restant inférieur à m , quand le point y reste à l'intérieur de ce cercle dans une région, telle que l'argument ϖ' de $y-a$ soit compris entre $\beta + \pi - \frac{3\pi}{2}$ et $\beta + \pi + \frac{3\pi}{2}$. Considérons d'autre part un

cercle C' de centre a , dont le rayon tend vers zéro comme $\frac{1}{\rho^2}$. Dès

que ρ est suffisamment grand, il est intérieur au cercle C et l'on peut écrire

$$\begin{aligned} & \int y^{x-1} \varphi_1(y) dy \\ &= -\alpha^{\lambda+\mu} e^{i\pi\mu} \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2(kx)^{\frac{1}{2}}} \int e^{-(kx)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{u-1}{u}\right)^2 - \frac{kx^2}{2}} u^\mu (a_0 + \tau_1') du, \end{aligned}$$

l'intégrale étant prise sur un chemin d'intégration situé tout entier à l'intérieur du cercle C' dans une région telle que l'argument ϖ' reste compris entre les limites précédemment déterminées.

Désignons par α l'argument de a et posons

$$x = \rho e^{i\sigma},$$

l'argument de ε est $\varpi' - \alpha - \pi$ et l'on peut écrire

$$u = r e^{-i\gamma}$$

avec

$$\gamma = -\sigma' + \alpha + \pi + \frac{\beta - \alpha - \sigma}{2}$$

Si k' désigne le module de k , on voit que la partie réelle de l'expression

$$(kx)^{\frac{1}{2}} \frac{(u-1)^2}{u}$$

est

$$(\rho k')^{\frac{1}{2}} [\xi \cos \delta + \eta \sin \delta],$$

en posant

$$\xi - \eta i = u + \frac{1}{u} - 2$$

et

$$\delta = \frac{\beta - \alpha + \sigma}{2}.$$

Ce dernier angle n'est autre que l'argument de $(kx)^{\frac{1}{2}}$.

On a donc

$$(24) \quad \begin{cases} \xi = \left(r + \frac{1}{2}\right) \cos \gamma - 2, \\ \eta = \left(r - \frac{1}{2}\right) \sin \gamma. \end{cases}$$

Considérons ξ et η comme les coordonnées rectangulaires d'un point du plan; quand r reste fixe et que γ varie seul, autrement dit quand le point y décrit un cercle de centre a , le point (ξ, η) décrit une ellipse ayant pour foyer l'origine et le point -4 de l'axe des abscisses; si γ reste fixe et si r varie seul, autrement dit si le point y décrit un rayon issu du point a , le point ξ, η décrit une hyperbole de mêmes foyers.

Le contour du plan des y , sur lequel on intègre, se déforme quand ρ augmente indéfiniment, de telle sorte que la distance de chacun de ces points au point a tende vers zéro comme $\rho^{-\frac{1}{2}}$; sur ce contour la variable u conserve un module inférieur à une quantité positive fixe; si le point ξ, η décrit alors dans son plan une courbe telle que la projection sur la direction δ du vecteur qui a pour origine l'origine des coordonnées et pour extrémité le point ξ, η

reste supérieur à un nombre positif fixe, le module de l'intégrale

$$\int e^{-(kx)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{u-1}{u} \right)^2 - \frac{ku^2}{2}} u^{\mu} (A_0 + \eta) du$$

tend vers zéro comme $e^{-h\rho^{\frac{1}{2}}}$, h étant positif.

On est ainsi amené à étudier les courbes décrites par le point ξ, η dans son plan, quand le point y décrit la portion du contour d'intégration comprise à l'intérieur du cercle C' dont le rayon tend vers zéro comme $\frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}$.

Considérons maintenant la portion d'un rayon du cercle C comprise entre le point p situé sur C et le point q situé sur C' .

On a

$$\int y^{x-1} \varphi_1(y) dy = -a^{x+\mu} e^{i\pi\mu} \int (1-z)^{x-1} e^{-\frac{k}{z}} z^{\mu} (a_0 + \eta) dz.$$

Mais le facteur $(1-z)$ reste fini et

$$(1-z)^x e^{-\frac{k}{z}} z^{\mu} = e^{-\nu z(1+\eta)} z^{\mu} e^{-\frac{k}{z}}.$$

Le module de η devient inférieur à toute quantité positive donnée à l'avance, si le rayon du cercle C est suffisamment petit.

Posant alors

$$z = \left(\frac{k}{x} \right)^{\frac{1}{2}} u,$$

on a

$$\begin{aligned} \int y^{x-1} \varphi_1(y) dy \\ = -a^{x+\mu} e^{i\pi\mu} \left(\frac{k}{x} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-2(kx)^{\frac{1}{2}}} \int M(u) u^{\mu} e^{-kx^{\frac{1}{2}} \left[u(1+\eta) + \frac{1}{u} - 2 \right]} du, \end{aligned}$$

$M(u)$ restant fini; or si l'on pose

$$\eta = \varepsilon e^{i\tilde{\gamma}},$$

on a

$$u \eta = r \varepsilon e^{i(\gamma + \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}')}.$$

et

$$\left| e^{-kx^{\frac{1}{2}} u \eta} \right| = e^{-\left| \varphi k' \right|^{\frac{1}{2}} r \varepsilon \cos(\gamma + \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}')} < e^{r \varepsilon (\varphi k')^{\frac{1}{2}}},$$

et finalement

$$\left| e^{-\frac{1}{2}(kx)^2} \left[u(1 + \eta) + \frac{1}{u} - 2 \right] \right| < e^{-(\rho k')^2 [\xi^2 \cos \delta + \eta \sin \delta - r \varepsilon]}.$$

Le module r de u varie depuis une valeur très grande correspondant au point q situé sur C' jusqu'à une valeur qui devient infinie comme $\rho^{\frac{1}{2}}$ correspondant au point p situé sur C .

La quantité

$$\xi \cos \delta + \eta \sin \delta$$

est, sur tout le parcours d'intégration, de la forme

$$r \cos(\delta - \gamma) + B,$$

B restant fini.

Si $\cos(\delta - \gamma)$ reste positif quand le point ξ, η décrit la courbe correspondante dans son plan, on pourra toujours choisir r assez petit pour que la différence

$$\cos(\delta - \gamma) - \varepsilon$$

soit positive. Dans ces conditions, l'intégrale tend vers zéro comme $e^{-h\rho^{\frac{1}{2}}}$, h étant positif.

Au point $u = 1$ on a

$$\gamma = -\varpi' + \alpha + \pi + \frac{\beta - \alpha - \sigma}{2} = 0,$$

d'où

$$\varpi' = \varpi'_0 = \alpha + \pi + \frac{\beta - \alpha - \sigma}{2}.$$

Considérons dans le plan des u une droite D passant par le point $u = 1$. Sur cette droite on prend pour direction positive celle vers laquelle se déplace le point M , quand l'angle ν de la direction OM et de l'axe des abscisses croît. Si m est la distance du point 1 au point M comptée positivement dans le sens ainsi défini et si ζ est l'angle de cette direction positive et de la direction positive de l'axe des abscisses, on a

$$m \sin(\zeta - \nu) = \sin \nu$$

et

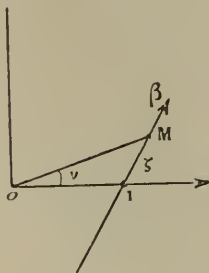
$$r = \sqrt{1 + m^2 + 2m \cos \zeta}.$$

En s'appuyant sur ces deux formules et en remarquant que

$$\gamma = -\varpi' + \varpi'_0 = -\varpi'_0 - \nu + \varpi'_0 = -\nu,$$

on démontre que, lorsque le point M décrit la portion de droite D

Fig. 3.



voisine du point 1, le point ξ, η décrit une courbe admettant à l'origine un point de rebroussement; en développant ξ et η suivant les puissances croissantes de m , il vient

$$\begin{aligned}\xi &= m^2 \cos 2\zeta + A_1 m^3 + \dots, \\ \eta &= -m^2 \sin 2\zeta + B_1 m^3 + \dots\end{aligned}$$

Cette remarque nous sera utile dans la suite.

V.

Dans la recherche des séries, qui représentent asymptotiquement les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, interviennent les valeurs relatives des angles α et β ; pour fixer les idées nous supposons que

$$\alpha < \beta < \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

Dans le plan des y traçons alors la droite qui passe par le point a et fait avec la direction positive de l'angle des abscisses l'angle β .

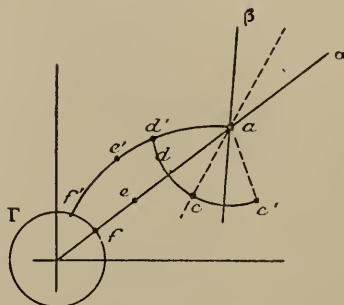
La direction $\alpha + \pi + \frac{\beta - \alpha}{2}$ est donc la direction ac de la bissectrice de cette droite et de Oa .

Supposons tout d'abord que le point x s'éloigne à l'infini avec un argument nul, et prenons pour contour d'intégration S_1 le con-

tour formé par la portion de droite ac , l'arc de cercle cd et la portion de droite de ; la distance ac tend vers zéro comme $\frac{1}{\rho^2}$; mais le point c est toujours situé au delà du point qui correspond au point 1 dans le plan des u .

Quand l'angle σ est voisin de zéro, on déforme le contour S_1 de

Fig. 3.



la façon suivante; il est constitué par une portion de droite ac' issue du point a et faisant avec l'axe des x l'angle ϖ'_0 :

$$\varpi'_0 = \alpha + \pi + \frac{\beta + \alpha - \sigma}{2} = \varpi'_{0,1} - \frac{\sigma}{2},$$

en posant

$$\varpi'_{0,1} = \alpha + \pi + \frac{\beta - \alpha}{2},$$

puis par l'arc de cercle $c'd$ et enfin la portion de droite de .

La droite ac' fait avec la droite ac l'angle $-\frac{\sigma}{2}$.

Pour que le contour ainsi formé soit équivalent au contour primitif S_1 , il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta + \pi - \frac{\pi}{2} < \varpi'_0 < \beta + \pi + \frac{\pi}{2}$$

ou

$$\alpha - \beta - \pi < \sigma < \alpha - \beta + \pi.$$

Or l'angle $\alpha - \beta$ est compris entre zéro et $-\frac{\pi}{2}$, cette condition sera donc satisfaite tant que

$$-\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{\pi}{2}.$$

entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. La projection sur la direction σ du vecteur joignant l'origine au point ξ , η reste donc constamment supérieure à un nombre positif fixe, sauf quand le point ξ , η vient au voisinage de l'origine.

Cette dernière portion du contour, décrit par le point ξ , η , correspond à la portion du contour d'intégration voisine du point γ_0 ; dans le cas actuel l'angle ζ de la droite D avec la direction positive de l'axe des abscisses dans le plan des u est nul; on a

$$\begin{aligned}\xi &= r + \frac{1}{r} - 2, \\ \eta &= 0.\end{aligned}$$

Quand m varie depuis une valeur finie, mais petite, jusqu'à la valeur $A\rho^{\nu-\frac{1}{4}}$, A étant une constante positive convenable et ν un nombre positif inférieur à $\frac{1}{4}$, le point ξ , η décrit une portion de l'axe des abscisses situé entre un point voisin de l'origine et fixe à un point ξ' :

$$\xi' = m^2 + A_1 m^3 + \dots,$$

où m a la valeur $A\rho^{\nu-\frac{1}{4}}$; la projection du vecteur $O\xi$ sur la direction δ atteint son minimum pour le point ξ' , qui est l'extrémité de la portion de l'axe des abscisses la plus voisine de l'origine. On a donc pour toute cette partie du contour d'intégration

$$-(\rho k')^{\frac{1}{2}}(\xi \cos \delta + \eta \sin \delta) < -(\rho k')^{\frac{1}{2}}(\xi' \cos \delta + \eta' \sin \delta).$$

Or

$$(\rho k')^{\frac{1}{2}}(\xi' \cos \delta + \eta' \sin \delta) = M_0 \cos \delta \rho^{2\nu} + M_1 \cos \delta \rho^{3(\nu-\frac{1}{4})+\frac{1}{2}} \dots \xi.$$

Si le nombre ν est suffisamment petit, on a donc

$$(\rho k')^{\frac{1}{2}}(\xi' \cos \delta + \eta' \sin \delta) = M_0 \cos \delta \rho^{2\nu} + \eta_1,$$

η_1 tendant vers zéro quand ρ augmente indéfiniment; or M_0 est positif; $\cos \delta$ est également positif. L'exposant de ρ dans la quantité sous le signe $\int$ devient donc infini comme

$$-h\rho^{2\nu};$$

quand ρ augmente indéfiniment, h étant positif.

Enfin si, pour la portion du contour d'intégration, qui correspond à la portion de l'axe des abscisses du plan $\xi\eta$, comprise entre l'origine et le point ξ' , nous posons

$$u = 1 + v, \\ v(k\omega^{\frac{1}{2}}) = \lambda,$$

on voit que l'argument de λ^2 n'est autre que ϑ , dont le cosinus est positif, et l'on obtient, en vertu de (21),

$$\int_{s_1} y^{x-1} \varphi_1(y) dy = P \left[A_0 + \frac{A_1}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{A_n}{x^{\frac{n}{2}}} + \frac{\varepsilon'}{x^{\frac{n}{2}}} \right],$$

ε' tendant vers zéro quand ρ augmente indéfiniment.

Il reste à examiner la portion d'intégrale prise le long de la portion de droite ef , f étant voisin de l'origine et sur le cercle Γ .

Au point

$$y = r e^{is},$$

on fait correspondre le point y' de coordonnées rectangulaires $(Lr, -s)$, et l'on considère dans le plan des y' l'image du contour d'intégration du plan des y .

Si l'on pose

$$I = \int y^{x-1} v(y) dy,$$

on constate facilement que le module du rapport

$$\frac{1}{a^x e^{-2h\rho^{\frac{1}{2}}}}$$

est de la forme

$$k e^{-h\rho + \varepsilon\rho^{\frac{1}{2}}},$$

k étant un nombre fini et h restant supérieur à un nombre positif fixe, si la projection du vecteur Oy' sur la direction τ reste inférieure à la projection du vecteur Oa' , a' étant l'image de a , quand le point y' décrit l'image du contour d'intégration.

Quand l'argument τ est compris entre μ et $\frac{\pi}{2} - \mu$, μ étant un angle positif aussi petit que l'on veut, on définit $f_1(x)$ par la

formule

$$f_1(x) = \int_{S_1} y^{x-1} \varphi(y) dy + \int_{\Gamma} (c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_q V_q) dy.$$

Quand l'argument σ est compris entre $\frac{\pi}{2} + \mu$ et $-\mu$, on définit $f_1(x)$ par la formule

$$f_1(x) = \int_{S_1} y^{x-1} \varphi(y) dy + \int_{-\Gamma} [c_1 (v_1 + V_1) + c_2 (v_2 + V_2) + \dots + c_q (v_q + V_q)] dy^{x-1} dy,$$

le contour Γ étant alors parcouru à partir du point f en sens inverse.

Dans les deux cas, le contour d'intégration est tel que la projection du vecteur Oy' reste inférieure à la projection du vecteur Oa' .

D'autre part, dans le premier cas, les coefficients γ qui interviennent dans les fonctions V tendent vers zéro ou vers l'unité; dans le second, ils tendent toujours vers zéro; on peut donc écrire finalement

$$(25) \quad f_1(x) = P \left[A_0 + \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_{2p}}{x^{2p}} + \frac{\varepsilon}{x^2} \right],$$

ε tendant vers zéro quand p augmente indéfiniment.

Quand l'angle σ est compris entre $-\mu$ et μ , les coefficients γ restent finis si le point x s'éloigne à l'infini en restant à distance finie des pôles de $f_1(x)$. En partant de la première définition de $f_1(x)$ on voit aisément que le rayon du cercle Γ peut être choisi assez petit, pour que la projection de Oy' reste inférieure à la projection de Oa' ; l'égalité précédente est encore vérifiée sous la seule restriction que le point x reste à distance finie des pôles de $f_1(x)$.

Cette condition disparaît quand les solutions de l'équation (7) sont régulières au voisinage de l'origine; les pôles de la fonction $f_1(x)$ ne s'étendent plus à l'infini dans la direction des abscisses positives, et cette fonction peut être définie par la formule

$$f_1(x) = \int_{S_1} y^{x-1} \varphi_1(y) dy + \int_e^0 y^{x-1} \varphi_1(y) dy,$$

la seconde intégrale étant prise sur la droite Oa depuis le point e jusqu'à l'origine. On démontre toujours par la même méthode que cette intégrale est représentée par une série asymptotique à termes nuls, abstraction faite du facteur P ; il en résulte que l'égalité (25) est satisfaite quand le point x s'éloigne à l'infini de façon quelconque avec un argument compris entre $-\mu$ et μ .

Supposons que σ soit voisin de $\frac{\pi}{2}$; on a

$$\frac{\pi}{2} - \mu < \sigma < \frac{\pi}{2} + \mu.$$

Si μ est suffisamment petit, l'angle δ est encore compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On prolonge alors l'arc de cercle $c'd$ jusqu'au point d' , situé sur le rayon $d'e'$; le point e' étant, par rapport au rayon Oa , du côté des arguments croissants; au contour ef , Γ , on substitue le contour $e'f'$, Γ ; la courbe $e'f'$, étant voisine de la droite Oa , est tout entière située, par rapport à cette droite, du côté des arguments croissants. On constate alors que, pour les intégrales prises le long du contour $e'f'$, Γ , tout ce qui a été démontré dans le cas précédent est encore vrai.

Il suffit donc d'étudier l'intégrale prise sur le contour S_1 ; or ce dernier ne diffère du contour de même nom du cas précédent qu'en ce que l'arc de cercle est prolongé jusqu'au point d' correspondant à l'argument

$$\varpi' = \alpha + \pi - \nu.$$

L'arc d'hyperbole, image dans le plan ξ, τ de la droite $d'e'$ est alors asymptote à une droite de direction

$$\gamma = \nu + \frac{\beta - \alpha - \sigma}{2}.$$

La différence $\delta - \gamma$ est donc

$$\delta - \gamma = \frac{\beta - \alpha + \sigma}{2} - \nu - \frac{\beta - \alpha + \sigma}{2} = \sigma - \nu.$$

Elle est inférieure à $\frac{\pi}{2}$ si

$$\frac{\pi}{2} + \mu - \nu < \frac{\pi}{2},$$

où

$$\mu < \nu.$$

Étant donné μ , il suffit donc de choisir un nombre ν satisfaisant à cette inégalité, pour que tout ce qui a été dit dans le cas précédent subsiste.

Toutefois la déformation du contour cf , Γ n'est possible que, si entre O et a n'existe aucune racine du polynome B_0 , qui ait été évitée sur le contour d'intégration par un petit cercle situé, par rapport au rayon Oa du côté des arguments décroissants.

S'il en existe une ou plusieurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, au voisinage desquels les solutions de B_0 sont régulières, on démontre que l'on a

$$f_1(x) = P \left[U + \frac{\varepsilon}{x^n} \right] + \frac{\alpha_1^x}{x^{\lambda_1+1}} \left[M_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^n} \right] + \dots + \frac{\alpha_p^x}{x^{\lambda_p+1}} \left[M_p + \frac{\varepsilon_p}{x^n} \right]$$

quand σ est voisin de $\frac{\pi}{2}$, U étant la série de la formule (25) et les séries M étant de la forme

$$M_j = a_{0,j} + \frac{\alpha_{1,j}}{x} + \dots + \frac{\alpha_{n,j}}{x^n}.$$

Si α_p est celle des racines α dont le module est le plus faible, on aura

$$f_1(x) = \frac{\alpha_p^x}{x^{\lambda_p+1}} \left[M_p + \frac{\varepsilon_p}{x^n} \right]$$

quand σ sera supérieur à $\frac{\pi}{2}$ et cette direction forme coupure.

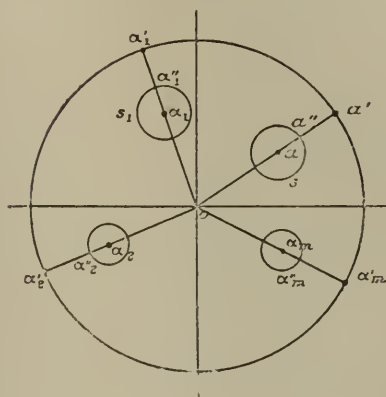
VI.

Quand l'argument σ est compris entre π et $\frac{\pi}{2}$, on est amené à donner au cercle Γ un rayon supérieur à la distance Oa . Le contour d'intégration au moyen duquel est définie la fonction $f(x)$ est construit de la façon suivante :

On trace une circonférence S ayant l'origine pour centre et de rayon supérieur à Oa . Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ les points racines du polynome B_0 situés à l'intérieur de cette circonférence et rangés dans l'ordre où les rencontre un rayon coïncidant d'abord avec Oa et tournant autour de l'origine en sens direct. On désigne par a' ,

$\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m$ les points où la circonférence S rencontre les rayons $O\alpha, O\alpha'_1, \dots, O\alpha'_m$; autour du point α_j , avec α_j pour

Fig. 5.



centre, on trace un petit cercle s_j qui coupe $O\alpha_j$ en α''_j ; on choisit alors pour contour S_1 le contour formé par un chemin allant à l'intérieur du cercle s depuis le point α jusqu'au point α'' et que nous déterminerons par la suite, la portion de droite $\alpha''\alpha'$ et l'arc $\alpha'\alpha'_1$ parcourus en sens direct.

Pour contour Γ on prend le contour constitué par la portion de droite $\alpha'_1\alpha''_1$, le cercle s_1 parcouru en sens inverse, la portion de droite $\alpha''_1\alpha'_1$, l'arc $\alpha'_1\alpha'_2$, la portion de droite $\alpha'_2\alpha''_2$, le cercle s_2 parcouru en sens inverse, la portion de droite $\alpha''_2\alpha'_2$, et ainsi de suite.

Ce contour se termine par la portion de droite $\alpha''\alpha'$, le cercle s parcouru en sens inverse, la portion de droite $\alpha''\alpha'$, l'arc $\alpha'\alpha'_1$.

On connaît déjà la représentation asymptotique des portions d'intégrales relatives aux cercles s qui ont pour centre une racine de B_0 au voisinage de laquelle les solutions de l'équation (7) sont régulières; il suffit donc ici d'étudier la portion d'intégrale relative à la partie du contour S_1 et à celle du contour Γ qui avoisinent le point α , racine double de B_0 au voisinage de laquelle les solutions de (7) sont irrégulières.

La méthode est toujours celle qui a été employée dans le Chapitre précédent; elle consiste à choisir convenablement la portion du contour d'intégration au voisinage du point α et à rechercher ce

que devient la portion d'intégrale correspondante en s'aidant de l'image de ce contour dans le plan des (ξ, τ) .

Je me bornerai ici à indiquer comment on peut choisir cette portion du contour et le résultat que l'on obtient. Si l'on a

$$\frac{\pi}{2} < \sigma < \alpha - \beta + \pi,$$

d'où

$$\delta < \frac{\pi}{2},$$

le contour S_1 est constitué :

1° Par le rayon ac' correspondant à la valeur de ω'

$$\omega'_0 = \alpha + \pi + \frac{\beta - \alpha - \sigma}{2}$$

comme dans le cas où σ était inférieur à $\frac{\pi}{2}$; le point c' a pour image dans le plan des u un point dont le module est supérieur à l'unité;

2° L'arc de cercle $c'e$, de centre a , de rayon ac' , parcouru en sens inverse jusqu'au point e situé sur le prolongement de Oa , au delà du point a ;

3° Une portion ef du prolongement de Oa .

Si l'on a

$$\alpha - \beta + \pi - \mu < \sigma < \alpha - \beta + \pi + \mu,$$

μ étant un très petit angle, on choisit le contour d'intégration de la façon suivante :

1° Un rayon ac' correspondant à la valeur de ω'

$$\omega' = \omega'_0 + \nu,$$

l'angle ν étant petit, mais supérieur à $\frac{\mu}{2}$, le point c' ayant pour image dans le plan des u un point de module inférieur à l'unité;

2° Une portion de droite partant de c' , passant par le point y_0 qui a pour image dans le plan des u le point 1; elle est légèrement inclinée sur la direction ay_0 correspondant à la valeur ω'_0 de l'argument ω' de telle sorte que l'angle désigné par ζ est ici égal à $\pi - \varepsilon$, ε étant petit et positif;

3° Un arc de cercle de centre a parcouru en sens inverse jusqu'au point e ;

4° La portion ef de la droite Oa .

Si l'angle σ est compris entre les limites

$$\alpha - \beta + \pi < \sigma < \pi,$$

la direction ϖ'_0 n'est plus comprise dans l'angle où $e^{\frac{b}{\gamma-a}}$ tend vers zéro; mais la direction $\varpi'_0 + \pi$ se trouve comprise dans cet angle.

Le contour est alors formé :

1° De la droite ac' correspondant à la valeur $\varpi'_0 + \pi$ de l'argument ω' , le point c' ayant pour image dans le plan des u un point dont le module est un peu supérieur à l'unité;

2° Un arc de cercle $c'_1c'_2$ de centre a parcouru en sens inverse;

3° Une petite portion de droite $c'_1c'_2$ passant par le point γ_0 et perpendiculaire à la droite $a\gamma_0$;

4° Un arc de cercle c'_2e de centre a parcouru en sens inverse, jusqu'au point e situé sur le prolongement de Oa ;

5° Une portion ef de cette droite Oa .

Dans ces trois cas, l'intégrale prise le long du contour ainsi défini donne naissance à la série asymptotique (25).

Quand σ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\pi$, on choisit pour le contour S_1 :

1° Une portion de droite ac' correspondant à la valeur ϖ'_0 de l'argument ϖ' ; le point c' ayant pour image dans le plan des u un point dont l'argument est supérieur à l'unité;

2° Un arc de cercle $c'e$ de centre a parcouru cette fois en sens direct, de telle sorte que son extrémité e située sur le prolongement de Oa corresponde à la valeur $\alpha + 2\pi$ de l'argument ω' ;

3° Une portion ef de la droite Oa , puis un arc de cercle ayant pour centre l'origine, parcouru en sens inverse jusqu'à son extrémité située sur le premier rayon Ox_m que l'on rencontre en tournant dans ce sens à partir de Oa autour de l'origine.

L'intégrale est encore représentée par la série asymptotique (25).

Il nous reste à étudier la portion de l'intégrale relative à la

partie du contour Γ qui est voisine du point a . Cette portion de contour est constituée par un lacet formé d'une portion $f\epsilon$ de la droite Oa située entre a et a''_m , et d'un petit cercle s de centre a ; comme l'argument de γ reste compris entre α et $\alpha + 2\pi$, la fonction $\varphi_1(\gamma)$ est représentée asymptotiquement sur tout le contour par la même série asymptotique que dans le cas précédent en vertu des hypothèses faites sur les valeurs respectives de α et de β .

On choisit le cercle s de telle sorte que son image dans le plan des u est un rayon légèrement supérieur à l'unité. Quand σ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\alpha - \beta + \pi$, on substitue à la portion du cercle voisine du rayon, correspondant à la valeur $\sigma'_0 + \pi$ de l'argument, une petite portion de droite perpendiculaire à ce rayon et passant par le point γ_4 , ayant pour image dans le plan des u le point -1 . Après avoir fait les changements de variable, qui permettent d'obtenir sous le signe $\int$ une fonction de u , on multiplie cette fonction par $e^{-2(kx)^{\frac{1}{2}}}$ au lieu de $e^{2(kx)^{\frac{1}{2}}}$, comme dans les cas précédents; il vient ainsi

$$\int e^{-(kx)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{u+1}{u} \right)^2 - \frac{kn^2}{2} u^u (a_0 + \eta)} du.$$

On pose

$$\xi' = \left(r + \frac{1}{2} \right) \cos \gamma + 2,$$

$$\eta' = \left(r - \frac{1}{2} \right) \sin \gamma,$$

et l'on forme l'image du contour d'intégration dans le plan des $\xi'\eta'$. En employant toujours le même genre de raisonnement, on constate que l'intégrale considérée est représentée asymptotiquement par la série

$$(26) \quad P' \left[\Lambda_0 + \frac{\Lambda_2}{x'^2} + \dots + \frac{\Lambda_{2p}}{x'^2} + \frac{\varepsilon}{x'^2} \right]$$

figurant dans le second membre de (23).

Quand σ est compris entre $\alpha - \beta + \pi$ et π , on substitue à la portion de cercle voisine du point γ_0 , dont l'image dans le plan des u est le point 1 , une petite portion de droite perpendiculaire au rayon; l'intégrale est alors représentée asymptotiquement par la série (25).

Quand τ est voisin de $\alpha - \beta + \pi$, on forme le contour d'intégration de la façon suivante :

1° Un arc de cercle dont l'origine e situé sur le prolongement de Oa correspond à la valeur α de l'argument ω' ; son rayon est supérieur à αr_0 ;

2° Une petite portion de droite passant par r_0 et inclinée sur αr_0 ;

3° Un arc de cercle de rayon inférieur à la distance αr_0 ;

4° Une petite portion de droite passant par le point r_1 ;

5° Un arc de cercle de rayon supérieur à αr_1 et dont l'extrémité sur le prolongement de Oa correspond à la valeur $\alpha + 2\pi$ de l'argument ω' .

En formant l'image de la portion de contour relative aux valeurs de ω' , comprise entre α et $\alpha + \pi$ dans le plan des ξ, η , et celle de la portion de contour relative aux valeurs de ω' , comprise entre $\alpha + \pi$ et $\alpha + 2\pi$ dans le plan des ξ', η' , on trouve que l'intégrale est représentée asymptotiquement par la somme des deux séries (25) et (26).

Il reste à étudier les intégrales le long du contour entourant le point a , qui portent sur l'une des $q - 1$ fonctions $\varphi_j(y)$, que l'on associe à $\varphi_1(y)$, pour obtenir un système de q solutions indépendantes de l'équation différentielle (7).

Ces fonctions sont déduites de fonctions $\psi_j(t)$ que l'on peut former de deux façons différentes.

Dans le plan des τ , où est prise l'intégrale servant à définir $\psi_j(t)$, on prend pour contour d'intégration un lacet formé par un cercle, ayant l'origine pour centre, et la droite Ob ; sur cette droite, on évite le point b par un demi-cercle, situé par rapport à Ob , soit du côté des arguments croissants, soit du côté des arguments, décroissants. Dans le premier cas, les fonctions $\psi_j(t)$ sont représentées par des séries asymptotiques, où l'exposant de e est nul, tant que l'argument ω satisfait aux inégalités

$$\beta - \frac{\pi}{2} < \omega < \beta + 2\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Les fonctions $\varphi_j(y)$ correspondantes sont représentées par des séries asymptotiques, telles que

$$(27) \quad (y - a)^{\mu} [a_0 + a_1(y - a) + \dots + a_n(y - a)^n + \varepsilon(y - a)^n].$$

Quand l'argument a franchi la valeur $\beta - \frac{\pi}{2}$, ces mêmes fonctions sont représentées par la série asymptotique, qui représente $\varphi_1(\gamma)$ pour les valeurs de ω' comprise entre $\beta - \frac{3\pi}{2}$ et $\beta + \frac{3\pi}{2}$, multipliée par une constante convenable.

Au voisinage de la direction singulière, les fonctions $\varphi_j(\gamma)$ sont représentées par la somme des deux séries précédentes.

Pour étudier les intégrales portant sur les fonctions $\varphi_j(\gamma)$, on effectue toujours les mêmes transformations; on obtient des résultats analogues aux précédents. Toutefois, quand $\varphi_j(\gamma)$ est représenté par une série telle que (27), l'exposant de e est de la forme

$$-(kx)^{\frac{1}{2}}u - \frac{ku^2}{2},$$

de telle sorte que l'on pose

$$\begin{aligned}\xi_1 &= r \cos \gamma + 2, \\ \eta_1 &= r \sin \gamma.\end{aligned}$$

L'image d'un cercle du plan des u ayant pour centre le point α , est dans le plan des ξ_1, η_1 , un cercle ayant pour centre le point 2.

On constate facilement que :

1° Si σ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\alpha - \beta + \pi$, ces intégrales donnent naissance à des séries asymptotiques à termes nuls, abstraction faite du facteur P;

2° Si σ est compris entre $\alpha - \beta + \pi$ et π , elles sont représentées asymptotiquement par la série (27) multipliée par un facteur constant convenable.

Quand σ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\pi$, on considère les fonctions $\varphi_j(\gamma)$ déduites des fonctions $\psi_j(t)$ définies au moyen du contour, sur lequel le point b est évité par un arc de cercle situé, par rapport à Ob , du côté des arguments décroissants; les intégrales correspondantes sont représentées asymptotiquement par des séries à termes nuls, abstraction faite du facteur P.

VII.

En résumé, si l'on groupe les résultats qui viennent d'être démontrés, et si l'on tient compte de ceux qui ont été établis dans le cas où les solutions de (7) sont régulières au voisinage des racines du polynôme B_0 , on est amené aux conclusions suivantes :

Soient r et α le module et l'argument de la racine α de B_0 . On marque dans un plan le point α' de coordonnées Lr et $-\alpha$. Soit α_j une racine du polynôme B_0 , dont le module est au plus égal à r ; on a

$$\alpha_j = r_j e^{i\omega_j},$$

l'angle ω_j étant compris entre α et $\alpha + 2\pi$.

On marque les points α'_j de coordonnées Lr_j , $-\omega_j$; on marque également le point α'' de coordonnées Lr , $-(\alpha + 2\pi)$. On trace la ligne polygonale convexe ayant pour sommets les points α' et α'' , certains des points α'_j et laissant à sa droite vers les abscisses positives tous les autres points α' .

Soient α' , α'_1 , α'_2 , ..., α'_m , α'' les sommets de cette ligne dans l'ordre où on les rencontre partant du point α' pour aller vers le point α , et soient μ_1 , μ_2 , ... les arguments des perpendiculaires aux côtés $\alpha'\alpha'_1$, $\alpha'_1\alpha'_2$, ... compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π .

Quand l'argument σ de x varie depuis γ petit et positif jusqu'à μ_1 , la fonction $f_1(x)$ est représentée asymptotiquement par

$$(28) \quad f_1(x) = P_1 \left[A_0 + \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_{2p}}{x^{2p}} + \frac{\varepsilon}{x^2} \right],$$

où

$$(29) \quad P_1 = -a x + \mu \left(\frac{k}{x} \right)^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{1}{k x^{\frac{1}{2}}} e^{i\pi\mu - 2(kx)^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{2}}.$$

Quand σ varie de μ_1 à μ_2 , cette même fonction est représentée asymptotiquement par la série attachée au point α_1 :

$$(30) \quad f_1(x) = A_1 \frac{\alpha_1^r}{x^{\lambda_1+1}} \left[\alpha_{0,0} + \frac{\alpha_{0,1}}{x} + \dots + \frac{\alpha_{0,n}}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right].$$

De même, quand σ varie de μ_2 à μ_3 , la fonction $f_1(x)$ est repré-

sentée par la série analogue à (30), attachée au point α_2 , et ainsi de suite.

Quand σ est compris entre $-\nu$ et $+\nu$, la fonction $f_1(x)$ est représentée asymptotiquement par la formule (28), quand x s'éloigne à l'infini en restant à distance finie de ses pôles; cette dernière restriction disparaît quand les pôles de $f_1(x)$ ne s'étendent pas à l'infini dans le sens des abscisses positives.

Soient $\mu_m, \mu_{m-1}, \dots$ les arguments des perpendiculaires aux côtés $\alpha''_m, \alpha'_m \alpha''_{m-1}, \dots$, ω compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\pi$. La fonction $f_1(x)$ est représentée asymptotiquement par la série (28), quand σ varie de $-\nu$ à μ_m .

Quand σ est compris entre μ_m et μ_{m-1} , elle est représentée par la série

$$(31) \quad f_1(x) = \Lambda_m \frac{\alpha_m^{\nu+\mu}}{x^{\mu_m+1}} e^{-2i\pi x} \left[\alpha_{m,0} + \frac{\alpha_{m,1}}{x} + \dots + \frac{\alpha_{m,n}}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

attachée au point α_m ⁽¹⁾.

Quand σ est compris entre μ_{m-1} et μ_{m-2} , elle est représentée par la série analogue à (31) attachée au point α_{m-2} , et ainsi de suite.

L'étude de la fonction $f_2(x)$ se fait évidemment par les mêmes méthodes; la série

$$(32) \quad f_2(x) = P'_1 \left[\Lambda_0 - \frac{\Lambda_2}{x^2} + \dots + (-1)^p \frac{\Lambda_{2p}}{x^{2p}} + \frac{\varepsilon}{x^{2p}} \right],$$

où

$$(33) \quad P'_1 = -\alpha^{\alpha+\mu} \left(\frac{k}{x} \right)^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{1}{(kx e^{2i\pi})^{\frac{1}{4}}} e^{2(\lambda\alpha)^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{2} + i\pi\mu},$$

joue pour $f_2(x)$ le même rôle que la série (28) pour $f_1(x)$.

Considérons enfin un point α_j , racine du polynôme B_0 , au voisinage duquel les solutions de (7) sont régulières. A chacune d'elles correspond une fonction $f_j(x)$ solution de l'équation aux différences finies qui est représentée asymptotiquement par une série attachée au point α_j quand l'argument σ de x est compris

(1) Dans le second membre, α_m est pris avec l'argument σ_m compris entre α et $\alpha + 2\pi$, d'où le facteur $e^{-2i\pi\alpha}$.

entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Mais il se peut que quand τ varie en dehors des limites précédentes, cette fonction $f_j(x)$ soit représentée dans un certain angle par les séries attachées au point α au voisinage duquel les solutions de (7) sont irrégulières.

Il en est ainsi chaque fois que α ayant un module au plus égal à α_j son image α' se trouve parmi les sommets du polygone convexe formé en partant de l'image α'_j de α_j , comme le polygone considéré plus haut a été formé en partant de l'image α' du point α .

Si la direction $\alpha - \beta + \pi$ n'appartient pas à l'angle considéré, la fonction $f_j(x)$ y est représentée soit par la série (28), soit par la série (33) multipliée par une constante convenable. Si la direction $\alpha - \beta + \pi$ appartient à l'angle considéré, elle forme coupure et le divise en deux parties; dans l'une $f_j(x)$ est représentée par la série (28), dans l'autre par la série (33).

Les deux développements asymptotiques (28) et (33) attachés à la racine double α de B_0 jouent dans la représentation des solutions de l'équation aux différences finies le même rôle que les développements de la forme (30), correspondant aux racines de B_0 au voisinage desquels les solutions de (7) sont régulières et se permutent avec ces derniers pour représenter les solutions de l'équation aux différences finies, quand l'argument, avec lequel x devient infini, varie de zéro à 2π .



TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XLIX.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*, nouvelle édition, 1916.)

	Pages.
[119d] Goursat (E.) . — Sur quelques équations du second ordre qui admettent une transformation de Bäcklund.....	1
[M ¹] Barré . — Sur diverses classes de surfaces engendrées par une hélice circulaire.....	65
[O ¹ 2] Appell (P.) . — Courbe de raccordement et élastique plane.....	104
[M ¹ 3f] Lebesgue (H.) . — Sur les diamètres rectilignes des courbes algébriques planes.....	109
[O6k] Gambier (B.) . — Surfaces applicables sur la parabolôïde de révolution.....	150
[112b] Galbrun (H.) . — Sur certaines solutions exceptionnelles d'une équation linéaire aux différences finies.....	206

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XLIX.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

DE L'ANNÉE 1921.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie},

67228 Quai des Grands-Augustins, 55.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

DE L'ANNÉE 1921.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1922

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1921 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau....	MM. ANDOYER. APPELL. BONAPARTE (le Prince). DEMOULIN. DERUYTS. GOURSAT. HADAMARD. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. KÖNIGS. JORDAN. LECORNU. MITTAG-LEFFLER. NEUBERG. PAINLEVÉ. PICARD. VALLÉE POUSSIN (DE LA) VOLTERRA.
Président.....	MM. BOULANGER. CAHEN.
Vice-Présidents.....	P. LÉVY. MONTEL.
Secrétaires.....	SERVANT. FLAMANT.
Vice-Secrétaires.....	CALBRUN. CHAZY.
Archiviste.....	THYBAUT.
Trésorier.....	FATOU. MALUSKI.
Membres du Conseil ⁽²⁾	AURIC, 1922. BARRÉ, 1924. BENTRAND DE FONTVIAULT, 1924. BRICARD, 1922. CARTAN, 1924. DRACH, 1924. GRÉVY, 1923. LEBESGUE, 1923. LÉVY (A.), 1922. MAILLET, 1922. D'OCAGNE, 1923. VESSIOT, 1923.

⁽¹⁾ MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

⁽²⁾ La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Dans la séance du 14 janvier 1920, l'Assemblée générale de la Société mathématique de France, considérant que les relations de la Société avec ceux de ses membres qui appartiennent aux nations ennemies ont été suspendues pendant la guerre, a décidé que ces relations ne pourraient être reprises qu'à la suite d'une demande formelle des membres susvisés, demande qui serait soumise au vote du Conseil; en conséquence, les noms de ces membres ne figurent pas sur la liste ci-dessous (1) :

Date
de
l'admission.

1920. ABELIN, professeur au lycée Charlemagne, rue de Paris, 1, Versailles (Seine-et-Oise).
1872. ACHARD, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *La Foncière*, rue de la Terrasse, 6 bis, à Paris (17^e).
1900. ADHÉMAR (vicomte Robert d'), place de Genevières, 14, à Lille (Nord).
1920. ALBO, professeur au lycée Jules-Ferry, rue de Berne, 7, à Paris (8^e).
1919. ALMERAS, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, à Paris (6^e).
1896. ANDOYER, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Val-de-Grâce, 11, à Paris (5^e).
1894. ANDRADE, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Villars, 3, à Besançon.
1918. ANGELESCO, professeur à l'Université de Cluj (Roumanie).
1919. ANTOINE, maître de conférences à la Faculté des Sciences, quai Zorn, 15, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1920. ANZENBERGER, professeur au lycée, à Besançon (Doubs).
1879. APPELL, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, recteur de l'Université de Paris, à la Sorbonne, à Paris (5^e).
1910. AUCHIBALD (C.-R.), professeur à Brown-University, Providence, Rhode Island (États-Unis).
1919. ARNOU, ingénieur, rue de Provence, 126, à Paris (9^e).
1920. ARVENGAS, ingénieur à la poudrerie de Sevran-Livry (Seine-et-Oise).
1920. AUBERT, professeur au lycée Henri IV, à Paris (5^e).
1900. AURIC, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue du Val-de-Grâce, 2, à Paris (5^e).
1920. AUTEURBE, sous-directeur à la Cie d'assurances sur la vie, *L'Union*, place Vendôme, 9, à Paris (1^{er}).
1919. BACHELIER, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Besançon (Doubs).
1919. BAILLAUD, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, directeur de l'Observatoire de Paris (14^e).
1900. BAIRE, professeur à la Faculté des Sciences, de Dijon, en congé, place Saint-François, 12, à Lausanne (Suisse).
1896. BAKER, professeur à l'Université de Toronto (Canada).
1917. BARKAU (J.-A.), professeur à l'Université, à Groningen (Hollande).
1905. BARRÉ, chef de bataillon du génie, docteur ès sciences mathématiques, rue Lhomond, 10, à Paris (5^e).
1918. BARNIOL (A.), directeur des Services de la comptabilité aux chemins de fer du P.-L.-M., rue Saint-Lazare, 88, à Paris (9^e). S. P. (2).
1920. BAYS, professeur agrégé à l'Université de Fribourg, rue Lafontaine, 39, à Paris (16^e).
1919. BECHIN, professeur à l'École Navale, boulevard Gambetta, 36, à Brest (Finistère).
1919. BÉNÉZÉ, professeur au lycée, à Cahors (Lot).
1920. BERNHEIM, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue de Siam, 15, à Paris (16^e).

(1) La liste qui suit donne les noms des membres de la Société à la fin de l'année 1921

(2) Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels

Date
de

l'admission.

1891. **BERTRAND DE FONTVILANT**, professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, avenue de Wagram, 167, à Paris (17^e). S. P.
1910. **BERTRAND** (G.), astronome à l'Observatoire d'Abbadia, par Hendaye (Basses-Pyrénées).
1913. **BILIMOVITCH**, privat-dozent à l'Université de Kiew, rue Stanislas, 14, à Paris (6^e).
1921. **BINDSCHLEDER**, rue Monge, 75 bis, à Paris (5^e).
1888. **BIOCHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6^e). S. P.
1920. **BLOCH** (Eug.), professeur au lycée Saint-Louis, rue Rataud, 11, à Paris (5^e).
1919. **BLONDEL** (Ch.), professeur de philosophie à l'Université, quai des Pêcheurs, 7, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1891. **BLUTEL**, inspecteur général de l'Instruction publique, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14^e).
1902. **BOBERIL** (comte Roger de), rue d'Antibes, 114, à Cannes (Alpes-Maritimes). S. P.
1907. **BOITEL DE BIENVAL**, ancien élève de l'École Polytechnique, au château de Valsery, à Cœuvres (Aisne). S. P.
1892. **BONAPARTE** (prince), membre de l'Institut, avenue d'Iéna, 10, à Paris (16^e).
1920. **BONCENNE**, professeur au lycée Voltaire, place de la République, 4, à Levallois-Perret (Seine).
1895. **BOREL** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Bac, 32, à Paris (7^e). S. P.
1913. **BORTOLOTTI** (E.), professeur à l'Université de Modène, via Maggiore, 18, à Bologne (Italie).
1919. **BOSLER**, docteur ès sciences, à l'Observatoire de Meudon (Seine-et-Oise).
1909. **BOULAD** (F.), ingénieur au service des ponts des chemins de fer de l'État égyptien, au Caire (Égypte).
1896. **BOULANGER**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, directeur des études à l'École Polytechnique, rue Descartes, 21, à Paris (5^e).
1913. **BOULIGAND**, professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers (Vienne).
1921. **BOUNY**, professeur de mécanique à l'École des Mines de Mons.
1903. **BOUTIN**, rue Lavieuville, 26, à Paris (18^e).
1904. **BOUTHOUX** (P.), professeur au Collège de France, à Paris. S. P.
1920. **BRANTUT**, ingénieur en chef d'artillerie navale, directeur de la Pyrotechnie, à Toulon (Var).
1911. **BRATU**, professeur à l'Université stradela Golici, 8, à Jassy (Roumanie).
1897. **BRICARD**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 108, à Paris (14^e).
1919. **BRILLOUIN** (M.), membre de l'Institut, professeur au Collège de France, boulevard du Port-Royal, 31, à Paris (13^e).
1920. **BRILLOUIN** (Léon), docteur ès sciences, rue Boissonnade, 16, à Paris (16^e).
1919. **BRICE**, président de la Chambre syndicale des constructeurs en ciment armé, place Paul-Verlaine, 3, à Paris (13^e).
1873. **BROCARD**, lieutenant-colonel du génie territorial, rue des Dues-de-Bar, 75, à Bar-le-Duc. S. P.
1920. **BROGLIE** (de), square de Messine, 9, à Paris (8^e).
1912. **BROWNE**, Grange Mockler, à Carrick-on-Suir (comte de Tipperary, Irlande).
1920. **BRUNSCHWIG**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Lettres, rue Schœffer, 53, à Paris (16^e).

Date
de
l'admission.

1901. **BUHL**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Coffres, 11, à Toulouse.
1894. **CAHEN** (E.), rue Cortambert, 46, à Paris (16°).
1920. **CAHEN** (Armand), professeur au lycée Rollin (ancien collège), à Paris (17°).
1921. **CAIBNS** (W.-D.), professeur de mathématiques Oberlin Collège, à Oberlin, Ohio (États-Unis).
1920. **CAMBEFORT**, professeur au lycée, rue de Liège, 42, à Pau (Basses-Pyrénées).
1917. **CANDÈZE**, lieutenant-colonel, place du Square, 13, à Aurillac (Cantal).
1885. **CARON**, chef honoraire des travaux graphiques à la Sorbonne, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5°).
1892. **CARONNET**, docteur ès sciences mathématiques, professeur au Collège Chaptal, avenue Niel, 15, à Paris (17°).
1919. **CARRUS**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Michelet, 66, à Alger.
1896. **CAUHAN**, professeur à la Faculté des Sciences, avenue de Montespan, 4, au Chesnay (Seine-et-Oise).
1887. **CARYALLO**, directeur honoraire des études à l'École Polytechnique, rue des Bourdonnais, 27, à Versailles. S. P.
1919. **CASABONNE**, professeur au lycée Henry IV, rue Censier, 26, à Paris (5°).
1920. **CAUSSE**, professeur au lycée, rue Saint-Antoine, 12, à Toulouse (Haute-Garonne).
1890. **CEDERCREUTZ** (baronne Nanny), Unionsgatan, 4, à Helsingfors (Finlande).
1919. **CERF**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue du Nord, à Dijon (Côte-d'Or).
1911. **CHALORY**, professeur au lycée Carnot, 38, rue de Vaugirard, à Paris (6°).
1919. **CHANDON** (M^{me}), aide-astronome à l'Observatoire, avenue de l'Observatoire, à Paris (14°).
1919. **CHAPELON**, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lille, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Morland, 2, à Paris (4°).
1919. **CHARBOVNIER**, ingénieur-général d'artillerie navale, avenue Octave-Gréard, 3, à Paris (7°).
1920. **CHARPY**, membre de l'Institut, place de la Poterie, 13, à Montluçon (Allier).
1896. **CHARVE**, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, villa Gambie, 23, rue Va-à-la-Mer, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1911. **CHATELET**, doyen et professeur à la Faculté des Sciences, rue Caumartin, 78, à Lille (Nord).
1907. **CHAZY**, professeur à la Faculté des Sciences de Lille (Nord).
1920. **CHERONNET**, ingénieur aux établissements Gaumont, rue d'Uzès, 10, à Paris (2°).
1919. **CHILOWSKY**, rue du Lunain, 15, à Paris (14°).
1921. **CLAPIER**, docteur ès sciences, avenue de Lodève, 47, à Montpellier (Hérault).
1921. **CLAUDON**, ingénieur des Ponts et Chaussées, rue Pasteur, 8, à Brest (Finistère).
1913. **COULYN**, capitaine du génie, rue des Vignes, 34, à Paris (16°).
1920. **COISSART**, professeur au lycée Voltaire, avenue Gambetta, 17, à Paris (11°).
1919. **COLLIN**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Geoffroy-Saint-Hilaire, 51, à Paris (5°).
1920. **COMET**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Lagarde, 5, à Paris (5°).
1920. **COMMISSAIRE**, professeur au lycée Charlemagne, quai des Célestins, 2, à Paris (4°).
1915. **CONSTANTINIDÈS**, professeur au Gymnase de Phodos (Grèce).
1920. **COPPEL**, licencié ès sciences, avenue d'Orléans, 109, à Paris (14°).
1896. **COSSEKAT** (E.), directeur de l'Observatoire, à Toulouse (Haute-Garonne).
1900. **COTTON** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, rue Hébert, 20, à Grenoble (Isère). S. P.
1919. **COUSIN**, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux (Gironde).

Date
de
l'admission.

1914. CRELIER, professeur à l'Université de Berne, à Bienne (Suisse).
1904. CURTISS, professeur à l'Université Northwestern, Stermann Avenue, 2023, à Evanston (Illinois, États-Unis).
1919. DAIN, ingénieur, rue Alphonse-de-Neuville, 17, à Paris (17°).
1920. DANELLE, professeur au lycée Louis-le-Grand, à Paris (5°).
1919. DANJOY, ingénieur des constructions civiles, rue de Villersexel, 9, à Paris (7°).
1919. DARMOIS, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1885. DAUTHEVILLE, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27 bis, à Montpellier (Hérault).
1919. DAUTRY, ingénieur en chef à la Compagnie du chemin de fer du Nord, rue Jacob, 4, à Paris (6°).
1920. DEDRON, professeur au Prytanée militaire, à La Flèche (Sarthe).
1920. DEFOURCEAUX, professeur au lycée Condorcet, rue Damrémont, 72, à Paris (18°).
1920. DELARUE, professeur au lycée Charlemagne, quai de Béthune, 20, à Paris (4°).
1901. DELASSUS, professeur de mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences, rue de Brach, 92, à Bordeaux.
1895. DELAUNAY (N.), professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1920. DELENS, professeur au lycée, rue de Sainte-Adresse, 35, Le Havre (Seine-Inférieure).
1919. DELTHEIL, professeur à la Faculté des Sciences, rue Montaudran, 48, à Toulouse (Haute-Garonne).
1913. DELVILLE (L.), ingénieur, rue de Tournon, 14, à Paris (6°).
1892. DEMOULIV (Alph.), professeur à l'Université, rue Joseph-Plateau, 10, à Gand (Belgique).
1905. DENJOY, professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg, en mission à l'Université d'Utrecht, Stationstraat, 12 bis, à Utrecht (Hollande).
1883. DERUYTS, professeur à l'Université, rue Louvrex, 37, à Liège (Belgique).
1894. DESINT, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17°).
1900. DICKSTEIN, Marszałkowska, 117, à Varsovie.
1914. DONDÉ (J. DE), rue Forestière, 11, à Bruxelles (Belgique).
1920. DOUTET, Ker Marguerite, rue Pornichet, à Saint-Nazaire (Loire-Inférieure).
1899. DRACH, professeur à la Faculté des Sciences, rue Geoffroy-Saint-Hilaire, 53, à Paris (5°).
1909. DRURY, bibliothécaire de l'Université, Brown, Providence, Rhode Island (États-Unis).
1920. DUFOUR, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Monge, 21, à Paris (5°).
1907. DULAC, professeur à la Faculté des Sciences, quai des Brotteaux, 4, à Lyon (Rhône).
1896. DUMAS (G.), docteur de l'Université de Paris, professeur à l'Université, Cabrières, avenue Mont-Charmant, à Bèthusy-Lausanne (Suisse).
1897. DUMONT, professeur au lycée, avenue Bouvard, 6, à Annecy (Haute-Savoie).
1921. EGNELL (Axel), docteur ès sciences, rue de Courcelles, 181, à Paris (17°).
1902. EGOROFF (Dimitry), professeur à l'Université, Povarskaja, Borissoglebsky per., n° 8, à Moscou (Russie).
1915. ESCLAYON, directeur de l'Observatoire de Strasbourg (Bas-Rhin).
1912. EISENHARDT (L.-P.), professeur à l'Université de Princeton, Alexander Street, 22, à Princeton (New-Jersey, États-Unis).
1916. ELCUS, banquier, rue du Colisée, 36, à Paris (8°). S. P.
1919. EMERY, colonel d'artillerie, président de la Commission des poudres de guerre et de la Commission d'expériences de Versailles, rue de Remusat, 23, à Paris (16°).
1920. ERREBA, chaussée de Waterloo, 1039, Uccle (Belgique).

Date
de
l'admission.

1900. ESTANAVE, docteur ès sciences, secrétaire de la Faculté des Sciences de Marseille (Bouches-du-Rhône).
1907. ETZEL, professeur de mathématiques et d'astronomie au collège de Saint-Thomas, à Saint-Paul (Minnesota, États-Unis).
1896. EUVERTE, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue du Pré-aux-Clercs, 18, à Paris (7°).
1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, traverse Magnan à Mazargues, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1906. FARAGGI, professeur au lycée, avenue Mirabeau, 7, à Nice (Alpes-Maritimes).
1904. FATOU, docteur ès sciences, astronome adjoint à l'Observatoire, boulevard du Montparnasse, 172, à Paris (14°).
1892. FEHR (Henri), professeur à l'Université, route de Florissant, 110, à Genève (Suisse).
1920. FETTER, général commandant l'artillerie, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1885. FIELDS (J.), professeur à l'Université, Toronto (Ontario, Canada).
1919. FLAVENT, chargé de cours à la Faculté des Sciences, avenue de la Forêt-Noire, 31, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1920. FLAVIEN, professeur au lycée Henri IV, rue Claude-Bernard, 58, à Paris (5°).
1920. FLEUCHOT, professeur au lycée, à Dijon (Côte-d'Or).
1872. FLYE SAINTE-MARIE, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1897. FONTENÉ, inspecteur général honoraire de l'Instruction publique, rue Le Goff, 7, à Paris (5°).
1903. FORD (WALTER B.), professeur de mathématiques à l'Université de Michigan, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1919. FORGERON, agrégé de mathématiques, actuaire, rue de la Pompe, 1, à Paris (16°).
1920. FORT, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Rataud, 9, à Paris (5°).
1889. FOUCHÉ, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Soufflot, 5, à Paris (5°).
1905. FOUËT, professeur à l'Institut catholique, rue Le Verrier, 17, à Paris (6°).
1872. FOURET, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17°). S. P.
1903. FRAISSÉ, inspecteur des études au Prytanée, à La Flèche (Sarthe).
1920. FRANCESCHINI, professeur au Prytanée militaire, La Flèche (Sarthe).
1911. FRÉCHET, professeur à la Faculté des Sciences, 2, quai Jacoutot, Robertsau, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1911. GALBRUN, docteur ès sciences, avenue Émile-Deschanel, 14, à Paris (7°).
1900. GALDEANO (Z.-G. DE), correspondant des Académies royales des Sciences de Madrid et de Lisbonne, professeur à l'Université, Calle del Coso, 99, à Saragosse (Espagne).
1919. GAMBIER, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes, 10, rue Oudinot, à Paris (7°).
1906. GARGAM DE MONCETZ, licencié ès sciences, rue de Villiers, 42, à Levallois-Perret (Seine).
1872. GABRIEL, inspecteur général des ponts et chaussées en retraite, professeur honoraire à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17°).
1908. GARNIER, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers (Vienne).
1919. GARNIER, ingénieur en chef d'artillerie navale, rue Valentin-Haüy, 10, à Paris (15°).
1911. GAU, doyen et professeur à la Faculté des Sciences, cours Saint-André, 116, à Grenoble.
1920. GAY, professeur au lycée, à Grenoble (Isère).

Date
de
l'admission.

1919. GEARY (R.-C.), maître ès sciences de l'Université nationale d'Irlande, rue du Renard, 37, à Paris (4°).
1890. GEBBIA, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1920. GENORGHINE, rue de l'Abbé-de-l'Épée, 6, à Paris (5°).
1906. GÉRARDIN, quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1920. GEYREV, chargé de cours à la Faculté des Sciences, à Dijon (Côte-d'Or).
1913. GIRAUD, professeur de calcul différentiel et intégral à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand, La Terrasse-Fontmaure, à Chamalières (Puy-de-Dôme).
1917. GLOBI-MIKHAILENKO, docteur ès sciences, avenue des Gobelins, 10 bis, à Paris (5°).
1913. GODEAUX, professeur à l'École Militaire de Belgique, avenue de l'Opale, 109, à Bruxelles (Belgique).
1903. GODEY, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16°).
1914. GOLOUBEFF (W.), agrégé de l'Université, rue Stanislas, 14, à Paris (6°).
1907. GOT (Th.), docteur ès sciences, professeur au lycée Buffon, rue du Dragon, 3, à Paris (6°).
1881. GOURSAT, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Navarre, 11 bis, à Paris (5°). S. P.
1920. GRAMONT (DE), duc DE GUICHE, docteur ès sciences, avenue Henri-Martin, 42 bis, à Paris (16°).
1896. GRÉVY, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5°).
1919. GROS, ingénieur, rue Cambon, 37, à Paris (1^{re}).
1899. GUADET, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de l'Université, 69, à Paris (7°).
1906. GUERBY, professeur au collège Stanislas, rue d'Assas, 50, à Paris (6°). S. P.
1919. GUÉRIN, administrateur délégué de l'Électro-entreprise, rue de la Bienfaisance, 43, à Paris (8°).
1900. GUICHARD (C.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Fontaine, 19, à Paris (16°).
1907. GUICHARD (L.), professeur de mathématiques au collège de Barbezieux (Charente).
1919. GUILLAUME, ingénieur à la Compagnie des chemins de fer du Nord, à Valenciennes (Nord).
1920. GUITTON, professeur au lycée Henri IV, rue de Bagnoux, 41, à Sceaux (Seine).
1919. HAAG, professeur à la Faculté des Sciences rue Mont-Ladrenuil, 20, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1896. HADAMARD, membre de l'Institut, professeur au Collège de France et à l'École Polytechnique, rue Humboldt, 25, à Paris (14°). S. P.
1894. HALSTED (G.-B.), Colorado State Teachers College, à Greeley (Colorado, États-Unis). S. P.
1920. HANN, membre du Bureau des Longitudes, astronome à l'Observatoire, rue de Rennes, 108, à Paris (6°).
1901. HANCOCK, professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).
1909. HANSEN, privat-docent à l'Université, Strandboulevarden, 66, Copenhague (Danemark).
1872. HATON DE LA GOUPIILLIÈRE, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des Mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6°). S. P.
1905. HEDRICK, professeur à l'Université, Hicks Avenue, 304, à Columbia (Missouri, États-Unis).
1919. HELBRONNEN, docteur ès sciences, avenue Kléber, 46, à Paris (16°).

Date
de
l'admission.

1892. HERMANN, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5°).
1911. HERNHOLTZ, professeur, avenue de Belmont, 28, à Montreux (Suisse).
1911. HOLMGREN, professeur à l'Université d'Upsal, à l'Observatoire, à Upsal (Suède).
1921. HOSTINSKY, professeur à l'Université Masaryk, Moravska, 40, à Prague (Rep. Tchéco-slovaque).
1895. HOTT (S.), professeur à l'École St'-Croix de Neuilly, boulevard Pereire, 218 bis, à Paris (17°). S. P.
1918. HUBER (M.), sous-directeur de la Statistique générale de la France au Ministère du Travail et de la Prévoyance sociale, quai d'Orsay, 97, à Paris (7°).
1918. HUMBERT (P.), professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier (Hérault).
1907. HUSSON, professeur à la Faculté des Sciences, rue Isabey, 107 bis, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1919. ILIOVICI, professeur au lycée Carnot, rue de Vaugirard, 225, à Paris (15°).
1920. ISCH-WALL, ingénieur, rue de l'Arcade, 23, à Paris (8°).
1921. JACQUES, agrégé des sciences mathématiques, rue d'Ulm, 45, à Paris (5°).
1896. JACQUET (E.), professeur au lycée Henri IV, rue Notre-Dame-des-Champs, 76, à Paris (6°).
1914. JAGER (F.), docteur ès sciences et en droit à Elvange, près Faulquemont (Moselle).
1919. JANET (M.), maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1920. JANSSEN, docteur de l'Université d'Upsal, Fack 8, à Orebro (Suède).
1903. JENSEN (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des téléphones, Amicisvej, 16, à Copenhague V. (Danemark).
1872. JORDAN, membre de l'Institut, professeur honoraire à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 46, à Paris (7°). S. P.
1914. JORDAN, docteur ès sciences, chargé de cours à l'Université de Budapest, disznaitca, 1, 15, à Budapest (Hongrie).
1919. JOUGUET, ingénieur en chef des mines, répétiteur à l'École Polytechnique.
1919. JULIA, maître de conférences à la Faculté des Sciences, boulevard de Courcelles, 22, à Paris (17°).
1919. JUVET, licencié ès sciences, avenue du 1^{er}-Mars, 10, à Neuchâtel (Suisse).
1916. KAMPÉ DE FÉRIET, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lille (Nord).
1913. KASNER (E.), professeur à l'Université Columbia, à New-York (États-Unis).
1920. KINOSUKE OGURA, professeur à l'Université d'Osaka, place du Panthéon, 9, à Paris (5°).
1913. KIVELIOVITCH, licencié ès sciences, rue Laromignière, 6, à Paris (5°).
1880. KENIGS, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Faubourg-Saint-Jacques, 77, à Paris (14°).
1921. KOCBELIANTZ, professeur à l'Université d'Erivan, rue Bonaparte, 49, à Paris (6°).
1913. KOSTITZIN (V.), avenue Villemain, 32, à Paris.
1907. KUVLOFF, ingénieur des mines, professeur d'analyse à l'École supérieure des Mines de Petrograd, à Ouzd-Radomysl, Gitomirska Chaussée, Station Nebylitza, village Kolganowka, gouvernement de Kiew (Russie).
1919. LABROUSSE, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44, à Paris (6°).
1920. LACAZE, nouvelle école Sainte-Geueviève, rue de la Vieille-Église, à Versailles (Seine-et-Oise).
1920. LAGARDE, astronome à l'Observatoire, à Paris (14°).
1920. LAGORSSE, professeur au Prytanée militaire, La Flèche (Sarthe).
1921. LAINÉ, licencié ès sciences, professeur à l'Institut catholique d'Angers (Maine-et-Loire).

Date
de
l'admission.

1906. LALESCO, professeur à l'Université, str. Seanne, 19, à Bucarest (Roumanie).
1919. LAMBERT, astronome adjoint à l'Observatoire, boulevard Arago, 99, à Paris (14^e).
1893. LANCELIN, astronome adjoint à l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14^e).
1919. LANGEVIN, professeur au Collège de France, boulevard du Port-Royal, 10 *bis*, à Paris (5^e).
1919. LAPOINTE, professeur au lycée Saint-Louis, rue Sophie-Germain, 3, Paris (14^e).
1896. LAROSE, ingénieur des télégraphes, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Froidevaux, 8, à Paris (14^e).
1920. LAUBEUF, rue François-Ponsard, Paris (16^e).
1896. LEAI, professeur à la Faculté des Sciences, rue Montesquien, 8, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1896. LEBEL, professeur au lycée, rue Pelletier-de-Chambrun, 12, à Dijon.
1902. LEBESGUE, professeur au Collège de France, rue Saint-Sabin, 35 *bis*, à Paris (11^e).
1903. LEBEUF, directeur de l'Observatoire, professeur d'astronomie à l'Université, à Besançon (Doubs).
1919. LEHLANC (M.), membre de l'Institut, ingénieur, boulevard de Montmorency, 1, à Paris (16^e).
1919. LECONTE, inspecteur de l'Académie de Paris, boulevard Saint-Germain, 78, à Paris (6^e).
1920. LE CORBEILLER, ingénieur des télégraphes, rue de Grenelle, 81, à Paris (7^e).
1893. LECORNU, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5^e).
1919. LEFEBVRE (Ch.), ingénieur des constructions civiles, boulevard Haussmann, 157, à Paris (8^e).
1920. LEFEBVRE, directeur de l'enseignement primaire de la Seine, Hôtel de Ville, place Lobau, à Paris (4^e).
1918. LEFSCHETZ, ingénieur E. C. P., professeur assistant de mathématiques à l'Université de Kansas, Missouri St. 937, à Lawrence (Kansas, Etats-Unis).
1895. LÉMERAY (E.-M.), professeur libre à la Faculté des Sciences de Marseille, villa Vêza, avenue Meissonier, à Antibes (Alpes-Maritimes).
1920. LERNER, professeur au lycée de Buzen (Roumanie); en congé, rue Cujas, 20, à Paris (5^e).
1895. LE ROUX, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 13, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1898. LE ROY, membre de l'Institut, professeur au Collège de France, rue Cassette, 27, à Paris (6^e).
1921. LEROY, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Rennes, faubourg de Fougères, 115, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1920. LE VAYASSEUR, professeur à la Faculté des Sciences, rue Corneille, 125, à Lyon (Rhône).
1900. LEVI CIVITA (T.), professeur à l'Université de Rome (Italie).
1907. LESGOITIGUES, professeur au lycée Henri IV, rue Jean-Bart, 4, à Paris (6^e).
1909. LÉVY (Albert), professeur au lycée Carnot, rue de Rennes, 86, à Paris (6^e).
1907. LÉVY (Paul), ingénieur des mines, professeur d'analyse à l'École Polytechnique, rue Chernoviz, 9, à Paris (16^e). S. P.
1920. LIERMITTE, professeur au lycée Janson-de-Sailly, rue de Lubeck, 32, à Paris (16^e).
1920. LIOTTE, capitaine inspecteur des études à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 8, à Paris (5^e).
1898. LINDELÖF (Ernst), professeur à l'Université, Sandvikskajen, 15, à Helsingfors (Finlande).

Date
de
l'admission.

1886. LIPOVILLE, ingénieur en chef des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, à Maure (Ille-et-Vilaine).
1919. LOISEAU, ingénieur à la Compagnie des chemins de fer du Nord, à Cambrai (Nord).
1912. LOVETT (E.-O.), Rice Institute, à Houston (Texas, États-Unis).
1902. LUCAS-GIRANDVILLE, à la Manufacture de l'État, à Tonneins.
1902. LUCAS DE PESLOUAN, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Rapp, 41, à Paris (7^e).
1913. LUSIN, professeur adjoint à l'Université de Moscou (Russie).
1895. MAILLET, ingénieur en chef des ponts et chaussées, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine). S. P.
1905. MALUSKI, proviseur du lycée Lakanal, rue Houdan, 3, à Sceaux (Seine).
1919. MARCHAUD, professeur au lycée, rue Henri-René, 3, à Montpellier (Hérault).
1906. MARCUS, agrégé de l'Université, rue Frédéric-Passy, 15, à Neuilly (Seine).
1919. MARIJON, inspecteur général de l'Instruction publique, avenue Félix-Faure, 37, à Paris (15^e).
1920. MARMON, chef de bataillon du génie, avenue de Suffren, 164, à Paris (7^e).
1919. MAROGER, professeur au lycée de Marseille (Bouches-du-Rhône).
1904. MAROTTE, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 bis, à Paris (12^e).
1884. MARTIN (Artemas), Columbia Street 1352, N. W., à Washington D. C. (États-Unis).
1920. MARTY, professeur au lycée Henri-Poincaré, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1920. MASCART, directeur de l'Observatoire de Lyon, à Saint-Genis-Laval (Rhône).
1919. MATANOVITCH, ingénieur E. C. P., rue Damrémont, 8, à Paris (18^e).
1921. MAURICE, ingénieur général, directeur de l'École d'application du Génie Maritime rue Octave-Gréard, 3, à Paris (15^e).
1920. MAYER, secrétaire général du Bureau d'Organisation économique, rue de Provence, à Paris (9^e).
1889. MENDIZABAL TAMBOREL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique). S. P.
1884. MERCEBEAU, licencié ès sciences, docteur en médecine, rue de l'Université, 191, à Paris (7^e). S. P.
1919. MÉRIEUX, professeur au lycée Condorcet, rue Caumartin, à Paris (8^e).
1902. MERLIN (Émile), chargé des cours d'astronomie mathématique et de géodésie à l'Université, rue d'Ostende, 11, à Gand (Belgique).
1919. MESNAGER, membre de l'Institut, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, rue de Rivoli, 182, à Paris (4^e). S. P.
1919. MÉTRAL, professeur au lycée de Brest (Finistère).
1904. METZLER, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).
1919. MEYER (F.), professeur au lycée Rollin, avenue Trudaine, 16, à Paris (9^e).
1909. MICHEL (Charles), professeur au lycée Saint-Louis, rue Sarrotte, 14, à Paris (14^e).
1893. MICHEL (François), ingénieur en chef des services électriques de la Compagnie du chemin de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10^e).
1920. MILHAUD, professeur au collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8^e).
1921. MILLOUX, agrégé de mathématiques, rue Quatrefoies, 4, à Paris (5^e).
1920. MINEUR, professeur au lycée Rollin, avenue Trudaine, 16, à Paris (9^e).
1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1907. MONTEL, maître de conférences à la Faculté des Sciences, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, boulevard de Vaugirard, 57, à Paris (15^e).
1898. MONTESSUS DE BALLORE (vicomte Robert DE), professeur à la Faculté libre des Sciences, boulevard Bigo-Danel, 15, à Lille (Nord).

Date
de
l'admission

1911. MOORE (Ch.-N.), professeur assistant à l'Université de Cincinnati (États-Unis).
1920. MOREL, professeur au Prytanée militaire, à La Flèche (Sarthe).
1920. MOUTHON, professeur au lycée Lakanal, rue Alphonse-Daudet, 15, à Paris (14^e).
1920. MUR (Thomas), Elmoste Sandown Road, Rondebosch (Sud-Africain).
1921. MURRAY (F.-H.), rue de Tournon, 21, à Paris (6^e).
1919. MIXART, professeur au lycée Montaigne, rue Gay-Lussac, 68, à Paris (5^e).
1921. MYLLER LEBEDEFF (M^{me}), professeur à l'Université de Jassy, Str Pacurari, 48, à Jassy (Roumanie).
1918. NÉCULCEA, professeur à l'Université de Jassy (Roumanie).
1909. NEOVIUS, ancien professeur à l'Université d'Helsingfors, Chr Vinthersvei 31, à Copenhague (Danemark).
1920. NEPVEU, professeur au lycée, boulevard de la Cité, 8, à Limoges (Haute-Vienne).
1885. NEUBERG, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1897. NICOLLIER, professeur, La Chataigneraie, à Saint-Clarens (Vaud, Suisse).
1920. NIELSEN (Frederik Lange), Armauer Hausensat, 5, III, Christiania (Norvège).
1921. NOAILLON, rue Monsieur-le-Prince, 63, à Paris (6^e).
1919. NÖRLUND (E.), professeur à l'Université de Lund (Suède).
1920. OIRIOT, professeur au lycée Buffon, boulevard de Port-Royal, 82, à Paris (5^e).
1882. OCAGNE (M. D'), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique et à l'École des Ponts et Chaussées, rue La Boétie, 30, à Paris (8^e). S. P.
1921. ONICESCU, docteur es sciences mathématiques de l'Université de Rome, rue de Lille, 57, à Paris (6^e).
1905. OUVET, professeur au lycée du Parc, à Lyon (Rhône).
1873. OVIDIO (E. D'), sénateur, professeur à l'Université, via Sebastiano Valfré, 14, à Turin (Italie).
1920. PAGÈS, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44, à Paris (6^e).
1893. PAINLEVÉ, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue Séguier, 18, à Paris (6^e).
1912. PANGÉ (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue François 1^{er}, 32, à Paris (8^e). S. P.
1888. PAPELIER, professeur au lycée, rue Notre-Dame-de-Reconvrance, 29, à Orléans (Loiret).
1919. PARODI (H.), ingénieur en chef à la Compagnie des chemins de fer d'Orléans, quai d'Orsay, 141, à Paris (15^e).
1917. PASQUIER (DU), professeur à l'Université, rue de la Côte, à Neuchâtel (Suisse).
1921. PASQUIER, licencié es sciences, professeur à l'Institut catholique d'Angers (Maine-et-Loire).
1881. PELLET, professeur honoraire à la Faculté des Sciences, boulevard Gergovia, 77, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1914. PÉRÈS, professeur à la Faculté des Sciences, Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. PEROTT (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis). S. P.
1892. PERRIN (Élie), professeur de mathématiques à l'École J.-B. Say, rue de la Convention, 85, à Paris (15^e).
1896. PETROVITCH, professeur à l'Université, Kasancié-Venac, 26, à Belgrade (Serbie).
1902. PETROVITCH (S.), general major, professeur ordinaire à l'Académie d'artillerie Michel, Sergevskaïa, 42, log. 10, à Petrograde (Russie).
1887. PEZZO (DEL), professeur à l'Université, piazza San Domenico Maggiore, 9, à Naples (Italie).

Date
de
l'admission

1905. PFEIFFER, professeur à l'Université, Szaoudi Wladimirskaïa 45, log. II. à Kiew (Russie).
1879. PICARD (Émile), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, quai Conti, 25, à Paris (6°).
1919. PICART (L.), directeur de l'Observatoire de Bordeaux, à Floirac (Gironde).
1872. PICQUET, chef de bataillon du génie en retraite, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6°).
1920. PIERRA, directeur de la Société des appareils de transmission Hale Shan, rue de Provence, à Paris (9°).
1913. PODTIAGINE (N.), rue Stanislas, 14, à Paris (6°).
1920. POMEY (J.-B.), ingénieur en chef des postes et télégraphes, boulevard Raspail, 120, à Paris (6°).
1920. POMEY (Etienne), professeur à l'École de Physique et de Chimie, boulevard Saint-Marcel, 70, à Paris (5°).
1920. POMEY (Leon), ingénieur des Manufactures de l'État, rue Rosa-Bonheur, 10, à Paris
1918. POMPEIU, professeur à l'Université de Bucarest (Roumanie).
1920. PONS, professeur au lycée, avenue Bouisson-Bertrand, à Montpellier (Hérault).
1906. POPOVICI, professeur à la Faculté des Sciences de Jassy (Roumanie).
1894. POTRON (M.), docteur ès sciences, nouvelle école Sainte-Genève, rue de la Vieille-Eglise, 2, à Versailles (Seine-et-Oise).
1920. PORTALIER, professeur au lycée Henri IV, à Paris (5°).
1914. POWALO-SCHWEIKOWSKI, licencié ès sciences, rue Gazan, 5 bis, à Paris (14°).
1919. PRADEL, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44, à Paris (6°).
1919. PRÉVOST, ingénieur civil des mines, rue Huysmans, 6, à Paris (6°).
1896. QUIQUET, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, boulevard Saint-Germain, 92, à Paris (5°).
1919. RATEAU, membre de l'Institut, avenue Elysée-Reclus, 10 bis, à Paris (7°).
1903. REMONDOS, professeur d'analyse supérieure à la Faculté des Sciences, rue Spyridion-Tricoupi, 54, à Athènes (Grèce).
1919. RENAUD, professeur au Lycée, rue Dacier, 7, Angers (Maine-et-Loire).
1919. RÉVELLE, répétiteur à l'École Polytechnique, à Saint-Tropez (Var).
1903. RICHARD, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, rue de Strasbourg, 100, à Châteauroux.
1919. RICHARD (E.), professeur au lycée Michelet, boulevard Lefebvre, 45, à Paris (15°).
1908. RICHARD D'ADONCOURT (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Nationale, 74, à Lille.
1920. RIQUIER, professeur à la Faculté des Sciences, rue Malfilâtre, 14, à Caen (Calvados).
1908. RISSER, actuaire au Ministère du Travail, rue Sédillot, 5, à Paris (7°).
1919. ROBERT, professeur au lycée de Montpellier (Hérault).
1916. ROBINSON (L.-B.), 22nd street 306 E, à Baltimore (Maryland, États-Unis).
1903. ROCHE, agrégé de l'Université, docteur ès sciences, professeur à l'Université libre d'Angers (Maine-et-Loire).
1919. ROQUES (M^{me}), docteur ès sciences, actuaire à la C^e d'assurance « La New York », avenue des Champs-Élysées, 63, à Paris (8°).
1914. ROSENBLATT, professeur à l'Université de Cracovie, rue Bartowa, 18, à Cracovie (Pologne).
1896. ROUGIER, professeur au Lycée et à l'École des ingénieurs, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.

Date
de
l'admission.

1906. ROUSIERS, professeur au collège Stanislas, boulevard du Montparnasse, 62, à Paris (14°).
1920. ROUYER, professeur à la Faculté des Sciences, rue Jean-Rameau, 3, à Alger.
1885. ROY, professeur à la Faculté des Sciences, rue Frizac, 9, à Toulouse (H^e-Garonne).
1920. ROWE (C.-H.), professeur à Trinity College, rue Gay-Lussac, 28, à Paris (5°).
1911. RUONICKI, licencié ès sciences, avenue Reille, 28, à Paris (14°).
1920. SAINTE LAGUE, professeur au lycée Carnot, rue Barye, 12, à Paris (7°).
1919. SAKELLARIOU, professeur à l'Université, rue Asklépiou, 96, à Athènes (Grèce).
1900. SALTIKOW, professeur à l'Université, à Kharkow (Russie). S. P.
1921. SARANTOPoulos, docteur ès sciences de l'Université d'Athènes, rue Solomos, 25, à Athènes (Grèce).
1919. SARTRE, agrégé de l'Université, rue d'Ulm, 45, à Paris (5°).
1897. SCHOU (Erik), ingénieur, Thorvaldsinsi, 193, à Copenhague (Danemark).
1920. SCHUL, professeur à l'Académie technique de Delft, Freckenolag, La Haye (Hollande).
1901. SÉE (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).
1896. SÉGUIER (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue du Bac, 114, à Paris (7°).
1882. SÉLIVANOFF (Démétrius), professeur à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Petrograde (Russie). S. P.
1920. SERGESCO, professeur au lycée de Fupnu (Roumanie); en congé, boulevard Saint-Germain, 46, à Paris (5°).
1920. SERHIER, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Boulard, 38, à Paris (14°).
1900. SERVANT, chargé de conférences à la Sorbonne, à Bourg-la-Reine (Seine).
1908. SHAW (J.-B.), professeur à l'Université, Box 143, University Station, Urbana (Illinois, États-Unis).
1919. SIMONIN, astronome à l'Observatoire, avenue du Parc-de-Montsouris, 30, à Paris (14°).
1912. SIRE, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon (Rhône).
1920. SOYU, docteur ès sciences, College of Science, Université de Kyoto, Japon, rue de la Pompe, 152, à Paris (16°).
1916. SOULA, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier, rue de la Bienfaisance, 1, Nîmes (Gard).
1900. SPARRE (comte DE), doyen de la Faculté catholique des Sciences, avenue de la Bibliothèque, 7, à Lyon. S. P.
1912. STECKER (H.-F.), professeur de mathématiques, à Pennsylvania State College, Miles St. 306 (Pennsylvanie, États-Unis).
1912. STEINHAUS, professeur à l'Université de Lwow, rue Kodecka, 14, 1, à Lwow (Pologne).
1918. STOILOW (S.), docteur ès sciences, maître de conférences à l'Université de Jassy (Roumanie).
1898. STÖRNER, professeur à l'Université, Huk Avenue, 33, Bygdø, Christiania (Norvège).
1904. SUBRIA, directeur de l'École préparatoire à l'École supérieure d'Électricité, rue de Staël, 26, à Paris (15°).
1904. SUNDMAN, professeur à l'Université, Observatoire astronomique, à Helsingfors (Finlande).
1920. TEJIE TAKAGI, professeur à l'Université de Tokio, (Japon).
1913. TAWARKINE, répétiteur à l'École impériale des Ponts et Chaussées, rue Liteinaia, 45, App. 33, à Pétersbourg (Russie).
1920. THIRY, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de l'Université, 36, à Strasbourg (Bas-Rhin).

Date
de
l'admission.

1919. THOISY (DE), ingénieur, rue Vineuse, 20, à Paris (16°).
1899. THYBAUT, professeur au lycée Henri IV, chef des travaux graphiques à la Faculté des Sciences, boulevard St-Germain, 50, à Paris (5°).
1910. TIMOCHENKO, professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1913. TINO (O.), via Lagrange, 2, à Turin (Italie).
1919. TISSIER, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Alger.
1912. TOUCHARD, ingénieur des Arts et Manufactures, boulevard Haussmann, 150, à Paris (8°).
1910. TRAYNARD, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon, en congé à la Violette, Sommières (Gard). S. P.
1872. TRESCA, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du Général-Henri-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1896. TRESSE, professeur au lycée Buffon, rue Mizon, 6, à Paris (15°).
1919. TRIMBACH, ingénieur, avenue du Roule, 97, à Neuilly (Seine).
1907. TRIPIER (H.), sous-directeur des études à l'École Centrale, rue Alphonse-de-Neuville, 17, à Paris (17°).
1920. TROUSSET, aide astronome à l'Observatoire de Floirac (Gironde).
1919. TURNEL, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44, à Paris (6°).
1911. TURRIÈRE, docteur ès sciences, professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier (Hérault).
1920. VACQUANT, professeur au lycée Janson-de-Sailly, rue de Siam, 28, à Paris (16°).
1913. VALIROV, professeur à la Faculté des Sciences, allée de la Robertsau, 52, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1893. VALLÉE POUSSIN (Ch.-J. DE LA), membre de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, professeur à l'Université, avenue des Alliés, 149, à Louvain (Belgique).
1904. VANDEUREN, professeur à l'École militaire, avenue Macan, 16, à Bruxelles.
1905. VAN VLECK, professeur de mathématiques, à l'Université, N. Pinckney St, 519, à Madison (Wisconsin, États-Unis).
1920. VAROPOULOS, docteur ès sciences de l'Université d'Athènes, rue d'Ulm, 45, à Paris (5°).
1897. VASSILAS-VITALIS (J.), professeur à l'École militaire supérieure, rue Épicure, 13, à Athènes (Grèce).
1898. VASSILIEF, membre du Conseil d'État, Vassili Ostrowlignie 12, n° 19, à Pétrograde (Russie).
1920. VAILLOT, rue Barbet-de-Jouy, 42, à Paris (7°).
1920. VAZILESCU, avenue Carnot, 5, à Paris (17°).
1913. VEBLEN (O.), professeur à l'Université de Princeton (États-Unis).
1920. VERDIER, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44, à Paris (6°).
1920. VERGNE, rue Auber, 8, à Paris (9°).
1920. VÉRONNET, astronome à l'Observatoire, chargé de conférences à la Faculté des Sciences, rue Wimpfeling, 29, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1901. VESSIOT, professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris (5°).
1920. VIELLEFOND, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Garibaldi, 45, à Paris (15°).
1911. VILLAT, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Maréchal-Pétain, 11, Strasbourg (Bas-Rhin).
1919. VINEUX, professeur au lycée, à Nice (Alpes-Maritimes).
1920. VINTEJOUX, professeur au lycée Carnot, rue Cernuschi, 12, à Paris (17°).

Date
de
l'admission.

1919. **VOGT**, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Grand-Verger, 33, à Naney (Meurthe-et-Moselle).
1888. **VOLTERRA** (Vito), sénateur, professeur à l'Université, via in Lucina, 17, à Rome (Italie).
1900. **VIBERT**, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5°).
1919. **WAVRE**, docteur ès sciences, Université de Genève, Genève (Suisse).
1880. **WALCKENAER**, inspecteur général en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7°).
1920. **WAHL**, gradé de l'Université Harward, rue de Tournon, 21, à Paris (6°).
1920. **WEBER**, professeur au lycée Buffon, avenue de Châtillon, 21, à Paris (14°).
1879. **WEILL**, directeur honoraire du collège Chaptal, boulevard Delessert, 23, à Paris (16°).
1919. **WEILL**, professeur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, à Paris (6°).
1921. **WIENER** (N.), professeur au Massachusetts Institut of technology, à Boston (États-Unis).
1906. **WILSON** (E.-B.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1911. **WINTER**, avenue d'Iéna, 66, à Paris (16°).
1909. **WOODS** (F.-S.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1878. **WORMS DE ROMILLY**, inspecteur général des mines, en retraite, rue du Général-Langlois, 5, à Paris (16°).
1920. **XAVIER-LÉON**, directeur de la *Revue de Métaphysique et de Morale*, rue des Mathurins, 39, à Paris (8°).
1921. **YATOTARO ABE**, professeur à l'École Normale supérieure de Tokio, rue Bausset, 7 bis, à Paris (15°).
1912. **YOUNG** (W.-H.), membre de la Société Royale de Londres, professeur à l'Université de Liverpool, villa Collonge, La Conversion, à Vaud (Suisse).
1920. **ZAREMBA**, professeur à l'Université de Cracovie, Warszavokaie, rue Zytnia, 6, Cracovie (Pologne).
1903. **ZERVOS**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Sozopoleos, 88, à Athènes (Grèce).
1898. **ZIWET**, professeur de mathématiques à l'Université Tappanavi, 644, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1909. **ZORETTI**, professeur de mécanique à la Faculté des Sciences de Caen (Calvados).

Membres décédés en 1920 ou 1921 : MM. BAUDET, BOURGET, CARPENTIER,
FAUQUEMBERGUE, GENAUX, HUMBERT (G.), PARENTY.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS DÉCÉDÉS.

BENOIST. — BIENAYMÉ. — BISCHOFFSHEIM. — BORCHARDT. — BOURLET. — CANET. —
CHASLES. — CLAUDE-LAFONTAINE. — GAUTHIER-VILLARS. — HALPHEN. — HERMITE.
HIRST. — LAFON DE LADÉBAT. — LÉAUTÉ. — MANNHEIM. — PERRIN (R.). —
POINCARÉ. — DE POLIGNAC. — RAFFY. — SYLOW. — TANNERY (PAUL). —
TCHEBICHEF. — VIELLARD.

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.		MM.	
1873	CHASLES.	1898	LECORNU.
1874	LAFON DE LADÉBAT.	1899	GUYOU.
1875	BIENAYMÉ.	1900	POINCARÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.	1901	D'OCAGNE.
1877	MANNHEIM.	1902	RAFFY.
1878	DARBOUX.	1903	PAINLEVÉ.
1879	O. BONNET.	1904	CARVALLO.
1880	JORDAN.	1905	BOREL.
1881	LAGUERRE.	1906	HADAMARD.
1882	HALPHEN.	1907	BLUTEL.
1883	ROUCHÉ.	1908	PERRIN (R.).
1884	PICARD.	1909	BIOCHE.
1885	APPELL.	1910	BRICARD.
1886	POINCARÉ.	1911	LÉVY (L.).
1887	FOURET.	1912	ANDOYER.
1888	LAISANT.	1913	COSSERAT (F.).
1889	ANDRÉ (D.).	1914	YESSIOT.
1890	HATON DE LA GOUPIILLIÈRE.	1915	CARTAN.
1891	COLLIGNON.	1916	FOUCHÉ.
1892	VICAIRE.	1917	GUICHARD.
1893	HUMBERT.	1918	MAILLET.
1894	PICQUET.	1919	LEBESGUE.
1895	GOURSAT	1920	DRACH.
1896	KÖNIGS	1921	BOULANGER.
1897	PICARD.		

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques.</i>	Pays-Bas.
Bâle.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics.</i>	États-Unis.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik.</i>	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Calcutta.....	Calcutta mathematical Society.	Inde anglaise.
Cambridge.....	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskub.</i>	Norvège.
Coïmbre.....	<i>Annuaire scientifico da Academia Polytechnica do Porto.</i>	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik.</i>	Danemark.
Copenhague.....	<i>Det Kongelige danske videnskabernes selskabs Skrifter.</i>	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Académie technique.	Pays-Bas.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis.</i>	Belgique.
Göttingen.....	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Halifax.....	Nova Scotian Institute of Science.	N ^{lle} -Écosse (Canada)
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kansas.....	Université de Kansas.	États-Unis.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkow.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkow.....	Société mathématique de Kharkow.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen.</i>	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Archiv der Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Liège.....	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne.....	<i>Periodico di Matematica.</i>	Italie.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.

Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne
Luxembourg.....	Institut grand-ducal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences.</i>	France.
Mexico.....	Sociedad científica <i>Antonio Alzate.</i>	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York.....	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa.....	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme.....	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques.</i>	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Paris.....	<i>Intermédiaire des Mathématiciens.</i>	France.
Pétrograde.....	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise.....	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Bohême.	Tchéco-Slovaquie.
Prague.....	<i>Jednota českých matematiků a fysiků.</i>	
Prague.....	Société mathématique de Bohême.	
Princeton.....	<i>Annals of Mathematics.</i>	New-Jersey, États-Unis
Rennes.....	<i>Travaux de l'Université.</i>	France.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei.</i>	Italie.
Rome.....	Società italiana delle Scienze.	Italie.
Rome.....	Società per il progresso delle Scienze.	Italie.
Sophia.....	<i>Annuaire de l'Université de Sophia.</i>	Bulgarie.
Stockholm.....	<i>Acta mathematica.</i>	Suède.
Stockholm.....	<i>Archiv for Mathematik.</i>	Suède.
Stockholm.....	<i>Bibliotheca mathematica.</i>	Suède.
Tokyo.....	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences.</i>	France.
Turin.....	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Varsovie.....	Prace Matematyczno Fizyczne.	Pologne.
Venise.....	Institut Royal des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik.</i>	Autriche.
Washington.....	National Academy of Sciences.	États-Unis.
Zagreb (Agram).....	Académie Sud-Slave des Sciences et Beaux-Arts	Yongo-Slavie.
Zurich.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 12 JANVIER 1921.

PRÉSIDENCE DE M. DRACH.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement de son Bureau et d'une partie du Conseil.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : MM. Clapier, présenté par MM. Guichard et Thybaut; l'abbé Lainé, présenté par MM. Bouligand et Roche; l'abbé Pasquier, présenté par MM. Bouligand et Roche.

Communications :

M. Maurice Fouché : *Sur la détermination du centre de courbure de la trajectoire d'un point d'un plan mobile sur lui-même.*

Je voudrais montrer comment on peut traiter cette question classique d'une manière à la fois plus simple et plus générale qu'on ne le fait d'ordinaire.

Soient I le centre instantané de rotation, (B) la base, (R) la roulante, Lx la tangente commune à ces deux courbes, Ly la normale, et M un point quelconque du plan. Nous prenons pour sens positif des arcs sur (B) et (R) le sens Lx, et pour sens positif de rotation celui d'une rotation d'un quart de tour amenant Lx sur Ly.

On pourra d'abord démontrer aisément que le point M et le centre de courbure C de sa trajectoire forment sur la normale IM deux divisions homographiques dont les points doubles sont confondus en I. Si N est la position de C qui correspond au point M rejeté à l'infini, on aura donc

$$(1) \quad \frac{1}{IC} - \frac{1}{IM} = \frac{1}{IN}.$$

Si, au contraire, c'est le point C qui s'éloigne à l'infini, et si N' est la

position correspondante de M, on aura

$$\frac{1}{IC} - \frac{1}{IM} = -\frac{1}{IN'} = \frac{1}{IN}.$$

N', symétrique de N, est le point de la droite IM dont la trajectoire a un rayon infini : c'est un point *d'inflexion* de cette trajectoire. Quant au point N, il est facile de montrer que c'est le centre de courbure commun des enveloppes de toutes les droites perpendiculaires à IM.

Soient I' le point de la base qui devient le centre instantané de rotation quand le plan a tourné de $d\theta$, et I'₂ sa projection sur Ix qui n'en diffère que d'un infiniment petit du second ordre. Le point N est à l'intersection de IM que j'appellerai aussi Iz pour fixer le sens positif, avec la parallèle à IM menée par I'₂ qu'on aura fait tourner de l'angle $d\theta$, autour de I'₂. En projetant le contour II'₂NI sur un axe perpendiculaire à Iz, on obtiendra

$$IN = \frac{ds}{d\theta} \cos \varphi = -IN',$$

φ désignant l'angle de Iz avec Iy, et ds l'arc II'.

Comme $\frac{ds}{d\theta}$ ne dépend pas de φ , on voit déjà que les lieux de N et N' sont des cercles symétriques tangentes à la base. Le premier sera appelé le cercle des *enveloppes*, on l'appelle aussi cercle des rebroussements. Le second est le cercle des inflexions.

Soient B le centre de courbure de la base, R celui de la roulante, b et r les rayons de courbure correspondants, IB et IR, pris avec leurs signes. On voit presque immédiatement que

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{b} - \frac{1}{r};$$

d'où

$$\frac{1}{IC} - \frac{1}{IM} = \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r} \right).$$

C'est la *formule d'Euler*.

Les extrémités J et J' des diamètres des deux cercles précédents sont données par les formules

$$\frac{1}{IJ} = -\frac{1}{IJ'} = \frac{1}{b} - \frac{1}{r}.$$

La détermination des centres de courbure ne dépend donc que des

points J et J', et il n'y aura rien de changé si l'on change la base et la roulante de manière que

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{r} = \text{const.}$$

Cette relation homographique est identique à la relation (1); mais elle est relative à la droite Iy au lieu de la droite Iz. Il s'ensuit que le centre de courbure B de la base est le centre de courbure de la trajectoire du centre de courbure R de la roulante.

Une homographie est complètement déterminée par trois couples de points. Ici, nous connaissons déjà les deux couples de points doubles confondus en I. Si l'on connaît de plus sur la droite Iz un point M et le centre de courbure C de sa trajectoire, ou bien l'un des points N et N', on sera ramené, pour la détermination des autres centres de courbure, à construire le point qui correspond dans l'homographie à un point donné. On y arrive parfaitement par la *méthode des deux projections*. Supposons d'abord les points doubles séparés I et K. Par l'un d'eux I, je mène une droite Iu, appelée *charnière*, et d'un point quelconque S du plan je projette sur Iu le deuxième point double K, en K₁ et le point M dont on connaît l'homologue C, en M₁. M₁C rencontre la droite SK₁ K en un point T qui est le deuxième centre de projection. Pour avoir l'homologue de M', pris sur Iz, on projette de S, M' sur la charnière en M'₁, puis de T, M'₁ en C₁ sur Iz.

Dans le cas actuel, la droite SKK₁ I passe au point I et la construction s'en trouve simplifiée.

Si l'on part du point à l'infini sur Iz auquel correspond le point N, supposé connu, on obtient la *règle des deux triangles semblables* :

Construire deux triangles homothétiques, l'un sur MI, l'autre sur IN (I homologue de M). La droite MT qui joint les troisièmes sommets de ces deux triangles donne sur IM le centre de courbure cherché.

Rappelons que N est la projection de J sur IM. Il suffit donc de connaître le point J, c'est-à-dire l'un des deux cercles pour pouvoir appliquer cette règle fort simple à tous les points du plan mobile. Cette méthode est plus avantageuse que la construction classique de Savary, parce que, dans bien des cas, il est plus facile de déterminer le point N ou le point J que les centres de courbure de (B) et de (R), sans compter que la construction de Savary devient illusoire si le point M est sur Oy. Par exemple on trouve immédiatement le cercle des enveloppes si le mouvement est défini par un angle mobile dont les côtés restent tangents à deux courbes fixes, ce qui comprend le

cas des podaires. Si l'on connaît la trajectoire d'un point M, la règle des deux triangles semblables appliquée en sens inverse fera connaître le point N de IM, ce qui permet d'appliquer la méthode à de nombreux cas : mouvement défini par l'ensemble d'une droite et d'un point connaissant la trajectoire du point et l'enveloppe de la droite; par un vecteur dont on connaît les trajectoires des extrémités, courbes en coordonnées polaires, courbes transformées de celles-ci en multipliant l'angle polaire par un nombre invariable, ou en élevant le rayon vecteur à une puissance quelconque positive ou négative, entière ou fractionnaire, etc. L'ellipse est l'antipodaire de son cercle principal par rapport à l'un de ses foyers. En lui appliquant la construction relative à la podaire effectuée en sens inverse, on retrouve la construction du centre de courbure enseignée par M. d'Ocagne dans son cours de l'École Polytechnique, et qu'il a obtenue par des moyens tout différents.

On peut aller plus loin : Reprenons les méthodes des deux projections. Laissons la charnière invariable et déplaçons le point S sur la droite IS. La construction même montre que T est relié à S par une relation homographique de même nature que celle qui relie les points M et C :

$$\frac{1}{IT} - \frac{1}{IS} = \text{const.} = \frac{1}{IU}.$$

Seulement, la constante n'a pas la valeur qu'il faut pour que T soit le centre de courbure de la trajectoire de S. Cette constante dépend de la direction de la charnière. Si l'on veut que la constante ait la valeur convenable, il faut que le point U qui correspond au point S rejeté à l'infini soit sur le cercle des enveloppes. Alors, les propriétés les plus simples des angles inscrits montrent que la charnière doit faire avec Iz le même angle que fait IS avec Iz , et l'on obtient le *théorème de Bobillier*.

Si la droite IS se confond avec Iy , et si l'on se rappelle que B est le centre de courbure de la trajectoire de R, on pourra prendre pour centres de projections B à la place de S et R à la place de T. Alors la charnière devra être perpendiculaire à Iz et l'on retrouve la *construction de Savary* qui est bien un cas particulier de la méthode des deux projections.

La règle des deux projections conduit aussi à cette généralisation du théorème de Bobillier.

Considérons deux plans mobiles P et P_1 qui se déplacent sur un plan fixe de manière que la base soit la même pour les deux mouvements. Par le centre instantané de rotation I, commun aux deux

mouvements, menons deux droites Iz dans le plan P , et Iz_1 dans le plan P_1 . Les droites qui joignent deux points M et M_1 de ces deux droites et les centres de courbure C et C_1 de leurs trajectoires se coupent sur une droite passant par I qui reste la même quand M se déplace sur Iz , et M_1 sur Iz_1 .

M. Bertrand Gambier : *Application imaginaire de surfaces réelles.*

J'ai montré que si une surface réelle S n'admet aucune auto-application elle recouvre complètement toute surface réelle S_1 de même ds^2 , ou, si l'on préfère, S_1 recouvre une certaine fraction, non nulle, de S ou même la totalité de S suivant les circonstances. Au contraire pour que deux surfaces réelles applicables S et S_1 ne se correspondent, dans toute leur étendue, que point réel pour point imaginaire, il est nécessaire que S et S_1 aient chacune une auto-application.

Examinons la réciproque : une surface réelle, donnée, S admettant une auto-application, existe-t-il des surfaces S_1 de même ds^2 que S , réelles, ne recouvrant S sur aucune étendue ?

La réponse est aisée à faire en général et repose sur la formation de ce que j'appelle ds^2 réduit et régions du ds^2 réduit.

Je suppose que la surface n'a pas un ds^2 de révolution ou à courbure constante. Imaginons par exemple une quadrique à centre

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0.$$

Si nous prenons comme variables indépendantes x et y , le ds^2 s'exprime par une forme quadratique en dx , dy dont les coefficients sont rationnels en x et y ; les auto-applications de la surface, groupant les points huit par huit par symétries, tiennent avec cette forme du ds^2 à deux causes : z est une fonction à deux déterminations de x , y , de sorte que la surface admet une auto-application, symétrie plane xOy , qui n'est pas mise en évidence par l'inspection du ds^2 ; d'autre part, le changement de x en $-x$ ou de y en $-y$ ne change pas le ds^2 ; ceci est mis en évidence par l'inspection du ds^2 , c'est ce que j'appelle une *transformation intrinsèque du ds^2* . Je peux les faire disparaître en prenant pour nouvelles variables $X \equiv x^2$ et $Y \equiv y^2$; avec ces nouvelles variables X , Y , il n'y a plus de transformation intrinsèque, les auto-applications résultent toutes de ce fait que le nouveau ds^2 , dit *réduit*, étant une forme quadratique en dX , dY à coefficients uniformes, les coordonnées x , y , z sont multiformes en X et Y ; le

système (x, y, z) admet en effet huit déterminations. Le ds^2 est

$$\begin{aligned} (1) \quad 4 ds^2 &\equiv dX^2 \left[\frac{1}{X} + \frac{c}{a^2} \frac{1}{1 - \frac{X}{a} - \frac{Y}{b}} \right] + dY^2 \left[\frac{1}{Y} + \frac{c}{b^2} \frac{1}{1 - \frac{X}{a} - \frac{Y}{b}} \right] \\ &\quad + 2 dX dY \frac{c^2}{ab} \frac{1}{\left(1 - \frac{X}{a} - \frac{Y}{b}\right)^2} \\ &\equiv E(X, Y) dX^2 + 2 F(X, Y) dX dY + G(X, Y) dY^2. \end{aligned}$$

Or imaginons le ds^2 (1) donné *a priori*, si l'on écrit les inégalités

$$(2) \quad EG - F^2 > 0, \quad E > 0, \quad G > 0$$

qui reviennent à deux seulement on définit, quels que soient les signes de a, b, c , donc qu'il s'agisse d'ellipsoïdes réels ou imaginaires, ou d'hyperboloïdes, trois *régions* et trois seulement dans le plan X, Y sans point commun, même sur leurs frontières. Or on démontre aisément que dans une région où un ds^2 est une forme quadratique définie positive on peut obtenir une infinité de surfaces réelles ayant ce ds^2 et cette région pour image. Bornons-nous par exemple au cas $a > b > c > 0$, ellipsoïde réel E ; alors on voit que la région 1 étant celle qui correspond à E , dans la région 2 on obtient un point de l'ellipsoïde imaginaire (x, y réels, z imaginaire pure). Donc les surfaces E_2 ou E_3 , réelles, correspondant aux régions 2 et 3, ont même ds^2 que l'ellipsoïde E et à un point réel arbitraire de E_2 ou E_3 correspond un point imaginaire de E ; de même E_2 et E_3 ne peuvent se recouvrir sur aucune étendue.

Cette méthode se généralisera pour un ds^2 quelconque

$$E du^2 + 2 F du dv + G dv^2;$$

s'il existe des transformations intrinsèques, c'est-à-dire une substitution

$$(3) \quad u_1 = f(u, v), \quad v_1 = (u, v)$$

entraînant

$$\begin{aligned} (4) \quad E(u_1, v_1) du_1^2 + 2 F(u_1, v_1) du_1 dv_1 + G(u_1, v_1) dv_1^2 \\ \equiv E(u, v) du^2 + 2 F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2, \end{aligned}$$

on peut, sauf dans le cas des ds^2 de révolution ou à courbure constante, la supprimer par un changement de variables convenables. On arrive donc à un ds^2 *réduit*, avec changement de notation,

$$(5) \quad ds^2 = E(X, Y) dX^2 + 2 F(X, Y) dX dY + G(X, Y) dY^2,$$

tel qu'à tout point réel d'une surface réelle ayant ce ds^2 correspond un seul système (X, Y) , X et Y étant donc réels, et qu'aux points correspondants dans l'application de deux surfaces (ou d'une seule surface auto-applicable) les valeurs de X et Y soient les mêmes. Alors les inégalités

$$EG - F^2 > 0, \quad E > 0, \quad G > 0$$

définissent soit une, soit plusieurs régions; deux surfaces représentatives de deux régions distinctes ne peuvent se recouvrir. Les frontières des régions correspondent à des courbes remarquables sur les surfaces représentatives, caractérisées par certaines propriétés *permanentes* (lignes d'arrêt, ou courbes invariantes dans une auto-application, etc.).

On remarquera que si F n'est pas nul, le ds^2 nouveau

$$(6) \quad ds^2 = E(X, Y) dX^2 - 2F(X, Y) dX dY + G(X, Y) dY^2$$

définit, s'il est réduit, les mêmes régions que (5); s'il n'est pas réduit, il en définit au moins autant.

Sur une surface donnée on peut réaliser le ds^2 réduit d'une infinité de façons, par substitution biunivoque sur X et Y ; mais tous les ds^2 réduits sont équivalents pour l'étude de la surface.

Pour ce qui concerne deux surfaces réelles représentatives d'une même région, la question est plus délicate. J'ai donné des exemples où même dans une seule et unique région on peut obtenir des surfaces, en nombre limité ou même infini, ne pouvant se recouvrir.

SÉANCE DU 26 JANVIER 1921.

PRÉSIDENCE DE M. BOULANGER.

M. le Président adresse un dernier hommage à la mémoire de M. Georges Humbert, ancien président de la Société, décédé le 22 janvier.

Conférence de M. Bertrand de Fontviolant, sur les Méthodes modernes de la Résistance des Matériaux.

SÉANCE DU 9 FÉVRIER 1921.

PRÉSIDENTE DE M. BOULANGER.

Deuxième Conférence de M. Bertrand de Fontviolant sur les
Méthodes modernes de la Résistance des Matériaux.

SÉANCE DU 23 FÉVRIER 1921.

PRÉSIDENTE DE M. BOULANGER.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : MM. Jacques et Onicescu, présentés par MM. Sartre et Flamant; M. Cairns, présenté par MM. Hadamard et Boulanger.

Communications :

M. Traynard (présenté par M. Maluski) : *Sur le nombre des droites tracées sur une surface du quatrième degré.*

J'ai étudié dans ma Thèse ⁽¹⁾ une surface hyperelliptique du quatrième degré sur laquelle 32 droites sont tracées. Ces droites sont partagées en deux ensembles de 16 droites, chaque droite rencontrant 10 droites de l'autre ensemble, et j'en ai donné la représentation symbolique par les caractères à deux chiffres introduits par G. Humbert.

Je me propose de démontrer ici que cette surface ne peut contenir une trente-troisième droite sans se décomposer. Je rappelle, en renvoyant à ma Thèse pour les détails, qu'il existe des groupes de 8 droites et des groupes de 6 droites et une conique, intersections complètes de la surface avec une quadrique.

Je considère un groupe de 8 droites : une droite A tracée sur la surface le rencontre en deux points situés soit sur deux génératrices

⁽¹⁾ *Thèses de la Faculté des Sciences de Paris, 1907, et Annales de l'École Normale supérieure, 1907.*

d'ensemble différent, soit sur deux génératrices du même ensemble. Écartant d'abord la première hypothèse je suppose que, le groupe de 8 droites étant

$$11' \quad 22' \quad 33' \quad 44' \quad (11') \quad (22') \quad (33') \quad (44'),$$

les deux droites rencontrées par A sont 33' et 44' par exemple. Dans le groupe suivant,

$$11' \quad 22' \quad 34' \quad 43' \quad (11') \quad (22') \quad (34') \quad (43'),$$

A ne peut rencontrer que deux des droites 34', 43', (34'), (43') qui doivent être associées en couples du même ensemble par suite de l'hypothèse initiale. Deux cas sont alors à distinguer :

1° A rencontre 33', 44', 34', 43'. Mais il existe une quadrique

$$33' \quad 44' \quad 34' \quad 43' \quad (11') \quad (22') \quad (12') \quad (21'),$$

dont A est alors une génératrice. Cette quadrique coupant la surface du quatrième degré suivant 9 droites, celle-ci se décompose.

2° A rencontre 33', 44', (34'), (43'). Elle ne peut, par suite de l'hypothèse initiale, rencontrer aucune droite qui coupe (34') ou (43'); or, les seules droites dans ce cas sont 33' et 44'; de même elle ne peut rencontrer d'autre droite du second ensemble que (34') et (43'). Or il existe par exemple la quadrique

$$12' \quad 23' \quad 34' \quad 41' \quad (12') \quad (23') \quad (34') \quad (41'),$$

qui ne serait rencontrée qu'en un point. Cette disposition n'est donc pas admissible.

Je suppose maintenant que A rencontre une droite de chaque ensemble. Autrement dit, l'intersection de la surface par un certain plan de 2 droites se décompose en 4 droites. Soit par exemple le plan 44', (44'), qui coupe en outre la surface suivant les droites A et B. L'ensemble de ces deux droites est rencontré par toutes celles des 32 droites qui ne rencontrent ni 44' ni (44'); ce sont

$$14' \quad 24' \quad 31' \quad 41' \quad 42' \quad 43' \quad (14') \quad (24') \quad (34') \quad (41') \quad (42') \quad (43').$$

Or il existe les deux quadriques

$$\begin{aligned} 14' \quad 24' \quad 31' \quad (41') \quad (42') \quad (43'), \\ 41' \quad 42' \quad 43' \quad (14') \quad (24') \quad (34'), \end{aligned}$$

qui coupent en outre la surface suivant la conique du plan $44'$, ($44'$). La droite A, par exemple, rencontre nécessairement deux des trois droites $14'$, $24'$, $34'$, car si elle n'en rencontre que une ou zéro, B rencontre les autres et le raisonnement qui va suivre s'applique à B.

Soit donc A rencontrant $24'$ et $34'$. Il existe la quadrique

$$24' \ 34' \ 44' \ (11') \ (12') \ (13'),$$

qui est rencontrée par A en trois points; d'ailleurs, cette quadrique coupe en outre la surface suivant la conique du plan $14'$, ($14'$); elle la coupe donc suivant 7 droites et une conique et la surface se décompose.

Le résultat annoncé est ainsi démontré : *La surface hyperelliptique du quatrième degré à 32 droites ne peut contenir une trentième droite sans se décomposer.*

En lui-même ce fait n'aurait qu'un intérêt accessoire, mais il me paraît faire prévoir la proposition suivante, qui a plus d'importance :

Le nombre maximum des droites tracées sur une surface du quatrième degré est 32.

Dire qu'une droite est tracée sur une surface du quatrième degré, c'est imposer à cette surface une condition; d'autre part, la surface du quatrième degré dépend de 34 paramètres; déduction faite des 15 paramètres de la transformation homographique, il reste 19 paramètres vrais; mais la surface hyperelliptique à 32 droites conserve 3 paramètres, ce qui montre que l'existence des 32 droites correspond à 16 conditions; on vient de voir qu'il est impossible de particulariser les 3 paramètres restants de façon que la surface contienne des droites supplémentaires. Il ne paraît pas probable qu'une autre disposition de droites puisse conduire à une économie de paramètres supérieure à celle que réalise la surface que j'ai étudiée et par suite à un nombre de droites supérieur; mais je n'ai pu parvenir à une démonstration de ce maximum.

M. Hadamard : *Sur la comparaison des problèmes aux limites pour les deux principaux types d'équations aux dérivées partielles.*

On sait que l'étude des conditions aux limites propres à déterminer une solution u d'une équation linéaire aux dérivées partielles du

second ordre conduit à des résultats tout différents, suivant que l'équation est elliptique ou hyperbolique.

Y a-t-il cependant des problèmes aux limites que l'on puisse transposer tels quels d'un cas à l'autre ?

La question se pose, par exemple, pour le cas d'une courbe fermée C (telle qu'une circonférence) dans le plan. S'il s'agit de l'équation (elliptique)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

u peut être déterminé par ses valeurs le long de C.

Peut-on de même déterminer par ses valeurs le long de C une solution de l'équation hyperbolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0?$$

La réponse est négative ⁽¹⁾. On l'obtient immédiatement si C est un cercle, chaque rectangle inscrit $\alpha\beta\gamma\delta$ parallèle aux axes donnant une condition de possibilité $u_\alpha + u_\gamma = u_\beta + u_\delta$.

Lorsque C est une ellipse, elle se présente de même ou sous une forme un peu différente, suivant qu'un certain argument h est commensurable ou incommensurable avec π . Dans le second cas, on a des conditions de possibilité de nature infinitaire, consistant, non en ce que certaines quantités doivent s'annuler, mais en ce qu'une certaine suite de coefficients du développement trigonométrique de u sur C doit tendre vers zéro avec une rapidité minima assignable à l'avance.

M. A. Buhl : *Sur les volumes engendrés par la rotation d'un contour sphérique.*

1. La question du volume engendré par un contour sphérique en rotation autour d'un axe quelconque paraît être en relation avec d'autres questions géométriques et pouvoir donner ainsi d'assez abondants développements.

Tout d'abord il faut rappeler une fois de plus qu'elle rentre, comme cas très particulier, dans les résultats généraux de M. G. Koenigs, relatifs au mouvement quelconque d'un contour fermé (*Journal de*

⁽¹⁾ Les vraies données propres à déterminer u s'obtiennent (C étant, par exemple, supposée convexe) en considérant les quatre arcs en lesquels C est divisée par les points de contact de ses tangentes parallèles aux axes et se donnant u sur le premier et le troisième arc, les données de Cauchy sur le deuxième et rien sur le quatrième. C'est cette remarque, indiquée par M. Picard en 1907 dans ses *Leçons* à la Sorbonne, qui m'a suggéré la présente Communication.

Mathématiques, 1889). Elle est aussi en relation avec les aires sphéroconiques de M. G. Humbert, aires déterminées sur une sphère par un cône qui la transperce (cf. *Géométrie et Analyse des intégrales doubles*, Gauthier-Villars et Cie, 1920).

Bien que ces analogies constituent, à mon avis, le plus grand intérêt de la question, je me propose ici de réduire celle-ci à elle-même. Comment pourrait-on, de manière directe et aussi simple que possible, évaluer le volume en litige? Le théorème suivant, s'il n'est pas le plus simple, est, à coup sûr, peu compliqué.

Quand un contour fermé, C, tracé sur une sphère S de centre O tourne autour d'un axe quelconque AB situé à une distance ρ de O, ce contour engendre un volume produit de deux facteurs qui sont : 1° le chemin circulaire $2\pi\rho$ décrit par O; 2° l'aire plane contenue dans la projection du contour C sur le plan OAB.

Pour démontrer ce théorème, je puis supposer que O est l'origine de trois axes rectangulaires par rapport auxquels la droite AB a pour équations

$$x = -\rho, \quad z = 0.$$

Soit un point M de la sphère S en lequel nous considérerons l'élément d'aire $d\sigma$; soient aussi λ, μ, ν les cosinus directeurs de OM. Soit encore δ la plus courte distance de OM et de AB.

Les cosinus directeurs de δ sont

$$-\frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}, \quad 0, \quad \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}.$$

La normale au plan contenant δ et AB a, de même, pour cosinus directeurs

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}, \quad 0, \quad \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}.$$

Dès lors, l'élément $d\sigma$ pouvant être considéré comme plan, le volume coronnal élémentaire dV qu'il engendre en tournant autour de AB peut être évalué par le théorème de M. G. Kœnigs relatif aux aires planes tournant autour d'axes *quelconques*, théorème que l'on trouvera dans les publications précitées et d'après lequel dV doit être égal au produit de $2\pi\delta$ par la projection de $d\sigma$ sur le plan δ AB. Donc

$$dV = 2\pi\delta \sqrt{\lambda^2 + \nu^2} d\sigma.$$

D'autre part, pour la plus courte distance δ , on a immédiatement

$$\delta = \frac{\rho\nu}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}.$$

Donc

$$dV = 2\pi \rho v d\tau.$$

Ceci, pour l'élément $d\tau$, démontre le théorème énoncé d'abord, puisque $v d\sigma$ est la projection de $d\sigma$ sur le plan OAB. Et si le théorème est vrai pour $d\sigma$, il est vrai pour une aire sphérique finie.

Tout compte fait, ce théorème est bien élémentaire et, quoique mes recherches bibliographiques ne me l'aient point fait rencontrer ailleurs, je ne sais si je puis le considérer comme vraiment original. Mais ce qui doit, malgré tout, avoir quelque intérêt, c'est précisément la facilité avec laquelle on passe du théorème de M. Kœnigs relatif à l'aire plane au théorème relatif à l'aire sphérique. Il me semble bien que cette analogie n'a pas été signalée jusqu'ici.

2. De telles considérations fourmillent d'ailleurs d'analogies de formes diverses. Bornons-nous à rappeler la suivante.

Soit une sphère S' ayant pour diamètre le rayon Oz de S si z est le point où Oz coupe S .

On démontre facilement que la nappe conique ayant O pour sommet et le contour C (tracé sur S) pour directrice détermine sur S' une aire sphérique égale à l'aire plane enfermée dans la projection de C sur le plan OAB.

On peut donc, à volonté, dans l'évaluation du volume tournant dû à un contour sphérique, faire intervenir le produit de $2\pi\rho$ soit par une aire plane, soit par une aire sphérique.

Enfin comme conséquence du théorème de M. Kœnigs et des résultats précédents on peut encore parvenir à cet élégant énoncé :

Soit un contour fermé plan F enfermant une aire de centre de gravité G. Soit un axe AB du même plan ne coupant pas F. Soit Γ le cylindre droit admettant F comme section droite. Toutes les sections droites de Γ et toutes ses sections sphériques de centre G sont des contours qui, par rotation autour de AB, donnent des volumes tournants équivalents.

M. Lebesgue : *Sur les constructions possibles avec le compas seul en géométrie sphérique.*

SÉANCE DU 9 MARS 1921.

PRÉSIDENCE DE M. ROULANGER.

Election :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. Axel Egnell, présenté par MM. Guichard et Lebesgue.

Communication :

M. S. Bays : *Sur le problème des triples de Steiner et sa généralisation.*

1. Le problème des *triples* ou *triades* de Steiner est connu :

Pour quel nombre d'éléments N peut-on trouver un système de triples (combinaisons 3 à 3) contenant UNE FOIS ET UNE SEULE FOIS chaque couple de ces éléments? Pour un N donné, combien y a-t-il de systèmes DIFFÉRENTS, c'est-à-dire de systèmes qui ne proviennent pas l'un de l'autre par une permutation des N éléments?

Les derniers résultats dans le problème sous sa forme générale ont été obtenus par H. White, F. Cole et L. Cummings ⁽¹⁾. Ils ont obtenu entre autres les systèmes de triples de Steiner différents pour $N=15$; leur nombre est 80.

Je ne me suis occupé moi-même que d'une classe particulière de solutions du problème ⁽²⁾ : les systèmes de triples *cycliques* pour $N=6n+1$ éléments. Un système de triples de Steiner des $6n+1$ éléments 0, 1, 2, ..., $6n$, est *cyclique* lorsque ses $\frac{N(N-1)}{6} = n(6n+1)$ triples sont répartis en n séries cycliques de la forme ⁽³⁾

$$a+x, \quad b+x, \quad c+x \quad (x=0, 1, 2, \dots, 6n).$$

J'ai actuellement un résultat général : pour $N=6n+1$, premier, un système de caractéristiques ⁽²⁾ déterminant sans autre $\left[\frac{2^n-1}{n} \right]$ ⁽⁴⁾ systèmes cycliques de Steiner différents, et un procédé permettant d'obtenir pour les premières valeurs de $N=6n+1$, premier ou puissance de nombre premier, tous les systèmes cycliques de Steiner

⁽¹⁾ F.-N. COLE, *Transactions of the Amer. Mathem. Society*, vol. XIV, 1913, n° 1, p. 1. — H.-S. WHITE, *Ibid.*, même numéro, p. 6. — S.-D. CUMMINGS, *Ibid.*, vol. XV, 1914, n° 3, p. 311. — H. WHITE, vol. XVI, 1915, n° 1, p. 14. — F. COLE, L. CUMMINGS et H. WHITE, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. II, 1916, p. 197.

⁽²⁾ Voir deux Notes des *Comptes rendus*, t. 165, 1917, p. 543; t. 171, 1920, p. 1363.

⁽³⁾ a, b, c sont trois des nombres 0, 1, 2, ..., $6n$. Par chaque nombre $a+x, b+x, c+x$, j'entends son plus petit reste positif (mod N).

⁽⁴⁾ En entendant par ces crochets le premier entier qui dépasse ou est égal à $\frac{2^n-1}{n}$.

différents. J'ai effectué jusqu'ici cette recherche pour $N = 7, 13, 19, (25), 31, 37, 43$; les nombres correspondants des systèmes cycliques de triples différents sont 1, 1, 4, (12), 80, 820, 9380. L'intérêt d'ailleurs est moins maintenant dans ces nombres que dans la manière dont se répartissent ces systèmes cycliques différents, pour chaque N , et les groupes qu'ils possèdent; *répartition et groupes qui dépendent entièrement de la constitution de certains systèmes de caractéristiques fondamentaux désignés par S''* . Chaque système S'' détermine une famille de systèmes cycliques de triples différents à symétrie propre. C'est maintenant une loi de formation de ces systèmes S'' qu'il s'agit d'obtenir.

2. Il y a intérêt à généraliser le problème des triples de Steiner, ne serait-ce que pour aider à sa résolution. La question de la constitution de certains systèmes S'' pour $N = 43$, par exemple, dépend de systèmes de *quadruples* cycliques, et même pour l'un d'eux d'un système de *septuples* cyclique.

Le problème des *quadruples* est naturellement celui-ci :

Pour quel nombre d'éléments N peut-on trouver un système de quadruples (combinaisons 4 à 4), tel que chaque triple de ces éléments entre UNE FOIS ET UNE SEULE FOIS dans un quadruple?

Pour qu'un système de *triples* existe pour N éléments, la condition nécessaire est l'intégrité de

$$(1) \quad \frac{N-1}{2}, \quad \frac{N(N-1)}{2 \cdot 3},$$

ce qui exige N de la forme $6n+1$ ou $6n+3$. D'autre part, pour chaque N de la forme $6n+1$ et $6n+3$, il existe des systèmes de triples de Steiner.

Pour qu'un système de *quadruples* existe pour N éléments, la condition nécessaire est l'intégrité de

$$(2) \quad \frac{N-2}{2}, \quad \frac{(N-1)(N-2)}{2 \cdot 3}, \quad \frac{N(N-1)(N-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Les deux premières conditions (2) reviennent aux conditions (1), en substituant dans celles-ci $N-1$ à N . Elles exigent donc $N = 6n+2$ ou $6n+4$. La troisième condition (2) n'introduit pas ici une nouvelle restriction.

Existe-t-il maintenant des systèmes de quadruples pour chaque

$N = 6n + 2$ et $6n + 4$? Je réponds par un système pour les deux premières valeurs de N .

$N = 8$, forme $6n + 2$. — Soient les éléments 0, 1, 2, ..., 7. Un système de quadruples est

0	1	4	5	0	2	4	6	0	1	2	3	0	2	5	7
1	2	5	6	1	3	5	7	2	3	4	5	2	4	7	1
2	3	6	7					4	5	6	7	4	6	1	3
3	4	7	0					6	7	0	1	6	0	3	5

Ce système n'est pas cyclique; il ne possède que le sous-groupe $[(x, 1+x)^2]$ du groupe cyclique $[(x, 1+x)]$. Pour ce cas $N = 8$, il n'existe *aucun* système de quadruples cyclique.

$N = 10$, forme $6n + 4$. — Soient les éléments 0, 1, 2, ..., 9. Il existe pour $N = 10$ *un seul* système de quadruples cyclique, celui qui est déterminé par les trois quadruples suivants ⁽¹⁾ :

$$0 \ 1 \ 3 \ 4 \quad 0 \ 1 \ 2 \ 6 \quad 0 \ 2 \ 4 \ 7$$

3. Le problème des quintuples est :

Pour quel nombre d'éléments N peut-on trouver un système de quintuples, tel que chaque quadruple de ces éléments entre UNE FOIS ET UNE SEULE FOIS dans un quintuple?

Pour qu'un système de quintuples existe pour N éléments, la condition nécessaire est l'intégrité de

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{N-3}{2}, \quad \frac{(N-2)(N-3)}{2 \cdot 3}, \quad \frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \\ \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}. \end{array} \right.$$

Les trois premières conditions (3) reviennent aux conditions (2), en substituant dans celles-ci $N-1$ à N . Elles exigent donc $N = 6n + 3$ ou $6n + 5$. Ici la quatrième condition apporte aux deux formes une restriction; n ne doit pas être de la forme $5x + 1$ dans $6n + 3$, et $5x + 4$ dans $6n + 5$.

Existe-t-il maintenant des systèmes de quintuples pour chacune des formes permises? Pour la première valeur $N = 11$, voici un système de quintuples cyclique, contenant donc les 330 quadruples de

⁽¹⁾ Formé donc des 30 quadruples découlant de ces trois premiers par la substitution cyclique (0, 1, 2, ..., 9).

11 éléments ⁽¹⁾ :

0 1 2 3 5 0 1 2 6 9 0 1 2 7 8 0 1 3 4 7 0 1 3 6 8 0 1 5 7 9

Il en existe un second :

0 1 2 3 9 0 1 2 4 7 0 1 2 5 6 0 1 3 4 8 0 1 3 5 7 0 1 4 6 9

mais il est équivalent au premier et s'en déduit par la permutation $|x, N - x|$, de sorte que probablement existe pour les quintuples le même théorème que pour les triples :

Les systèmes cycliques de quintuples vont par couples de systèmes équivalents, sans quintuples communs, déductibles l'un de l'autre par la substitution $|x, N - x|$ ⁽²⁾.

En terminant, la question suivante a peut-être déjà quelque intérêt. Pour l'existence d'un système de n -uples de N éléments, la condition nécessaire est l'intégrité de

$$\frac{[N - (n - 2)]}{2}, \frac{[N - (n - 3)][N - (n - 2)]}{2.3}, \dots, \\ \frac{N(N - 1) \dots [N - (n - 3)][N - (n - 2)]}{2.3 \dots n}.$$

Existera-t-il indéfiniment des nombres N satisfaisant à cet ensemble de conditions, ou viendra-t-il un n à partir duquel le problème n'est plus possible pour aucun N ?

M. Pomey: *Sur un problème de probabilités posé par la conduite d'appareils téléphoniques automatiques.*

Le calcul de ces probabilités trouve un nouveau champ d'application dans le calcul du nombre des organes de mise en communication qui sont nécessaires à un commutateur téléphonique destiné à un réseau dans lequel des études de statistique ont fait ressortir l'activité à prévoir pour le trafic. La question est d'importance pour les commutateurs automatiques.

Récemment, pour le bureau de Fleurns à Paris, l'Administration a demandé des propositions à des constructeurs pour des organes répar-

(1) En n'écrivant de nouveau que les quintuples de tête des séries cycliques fournies par la substitution $(0, 1, 2, \dots, 9, 0')$.

(2) Ce théorème pour les triples a été remarqué par H. White (travail cité plus haut, 1913) pour le cas particulier du système cyclique de triples de 13 éléments. Je l'ai établi d'une manière générale.

titeurs automatiques d'appels. Le problème avait été ainsi posé. Le bureau doit desservir 6000 abonnés; chacun appelle un nombre de fois égal en moyenne à 1,80 par heure, la durée moyenne de la conversation est de 2,25 minutes. L'un des constructeurs a proposé des organes conçus à peu près comme suit : d'un côté, se trouvent les abonnés appelants; chacun se trouve représenté par un plot où sa ligne aboutit et, dès qu'il décroche son téléphone, un chercheur se met, au bureau central, immédiatement en mouvement pour prendre contact successivement avec les divers plots, et la construction est telle qu'il s'arrête sur la ligne appelante.

Le chercheur est lui-même relié en permanence à un autre chercheur qui s'inquiète de trouver à son associé un cordon avec une fiche disponible. Un cordon avec fiche s'appelle un *monocorde*. Le second chercheur dont je viens de parler est aussi un organe automatique qui tâte les divers plots où sont raccordés les monocordes et qui s'arrête dès qu'il a trouvé un monocorde disponible. Alors un téléphoniste intervient et achève la communication. Le bureau téléphonique de Fleurus ne sera donc pas un automatique. Mais il y aura une répartition automatique des appels entre les diverses opératrices du bureau.

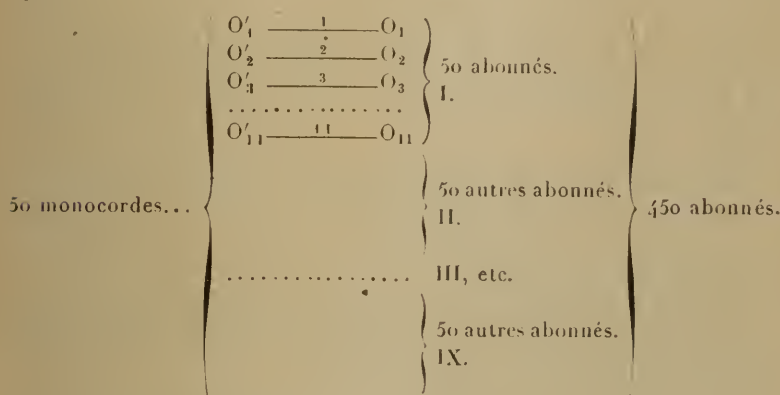
Voici alors la combinaison adoptée :

Un chercheur double comprend un chercheur O_1C qui tourne autour de O_1 et qui tâte les plots 1, 2, 3, ... et 50. L'abonné n° 3 est par exemple rattaché au plot 3; mais comme le chercheur O_1C peut déjà avoir été mis en mouvement par une autre demande, la ligne de l'abonné n° 3 aboutit non seulement au plot 3 du chercheur double $O_1O'_1$, mais encore aux plots n° 3 de 11 chercheurs semblables. C'est ce qu'on appelle un *multiplage*. Par le fait, à un groupe de 50 abonnés correspondront $50 \times 11 = 550$ plots. Passons à l'autre bout du chercheur double.

Le chercheur double $O_1O'_1$ comprend un chercheur de monocordes O'_1C' . Si le plot 1' est libre, l'abonné n° 3 sera relié par $O_1O'_1$ et 1' à un premier monocorde qui servira à l'établissement de la communication. Mais il se peut que ce monocorde soit occupé. Le chercheur continuera donc sa marche jusqu'à ce qu'il en rencontre un disponible.

Or l'expérience (ou le calcul des probabilités) a montré que, pour desservir 50 abonnés de façon à ne perdre qu'un appel sur 1000, il fallait 11 chercheurs doubles et l'expérience (ou le calcul des probabilités) a montré de même que, si l'on a 50 *monocordes* à sa disposition, on peut desservir 460 abonnés avec la même chance de ne perdre

qu'un appel sur 1000. Ces nombres se rapportent à l'activité du trafic qui a été donnée (1,80 appel à l'heure; 2,25 minutes de durée de conversation). On est ainsi amené à répéter 9 fois le groupe des onze chercheurs doubles, de façon à avoir $50 \times 9 = 450$ (nombre voisin de 460) abonnés pour les 50 monocordes auxquels aboutissent les appels.



I, II, III, etc. et IX forment neuf groupes identiques, composés chacun de 11 chercheurs doubles.

Chaque chercheur double cherche à droite entre 50 abonnés et à gauche entre 50 monocordes. Chaque chercheur double se met en marche à tour de rôle.

Du côté des abonnés, nous avons ce qu'on appelle un *multiplage* sur 11 chercheurs doubles pour chaque abonné, et, du côté des monocordes, nous avons un multiplage de 50 monocordes sur les neuf groupes de 11 chercheurs.

Comme il y a 6000 abonnés, tout l'ensemble décrit est répété 13 fois. Car $6000 : 460$ est voisin de 13.

Avec les données indiquées par l'Administration, chaque abonné occupe une durée de

$$\frac{2,25 \times 1,80}{60} = 0,067 \quad (\text{fraction d'heure});$$

le calcul des probabilités donne 11 pour le nombre d'organes nécessaires à ces 50 abonnés.

De même, le calcul des probabilités indique que, pour la probabilité d'un appel perdu par 1000, 50 monocordes peuvent écouler un trafic de 3096^m (l'unité de durée d'occupation étant l'heure).

Or 30,96 : 0,067 donne 460 ; c'est le nombre des abonnés qu'on peut grouper sur 50 monocordes, en admettant que chaque abonné occupe sa ligne pendant 0^h,067.

La formule d'Erlang (qui paraît la plus employée) est

$$P = \frac{\frac{a^x}{x!}}{1 + a + \dots + \frac{a^x}{x!}}.$$

Ici, P = la probabilité de $\frac{1}{1000}$ et si a est pris égal à 0,067, on trouve $x = 11$.

De même encore, si l'on prend toujours $P = \frac{1}{1000}$ et que x soit égal à 50, le nombre a représentera 30,96.

La formule d'Erlang est déduite de la théorie, moyennant certaines hypothèses simplificatrices.

Des formules analogues à celle d'Erlang ont été aussi proposées. Il serait intéressant de préciser les hypothèses impliquées dans les simplifications adoptées par les divers auteurs.

Le journal *Automatic Telephone* ⁽¹⁾ de Chicago (New-York Office 21 East 40 th. st.) a publié des études détaillées sur ce sujet.

Les travaux d'Erlang et d'Englet ont été donnés dans l'*Électrotechnische Zeitschrift*.

Le *Journal des Ingénieurs* du Post Office de Londres a aussi donné d'importants résumés.

M. Cornet, ingénieur des Télégraphes, 75, boulevard Brune, pourra donner les renseignements de détail ou de bibliographie nécessaires à ceux que ces questions intéresseraient.

SÉANCE DU 13 AVRIL 1921.

PRÉSIDENCE DE M. BOULANGER.

Conférence de M. Parenty sur l'onde stationnaire dans les jets de vapeur et de gaz à travers les orifices.

Conférence de M. Esclangon sur les ondes produites par les projectiles.

(1) H.-E. CLAPHAM, Editor Chicago U.S.A.

SÉANCE DU 27 AVRIL 1921.

PRÉSIDENCE DE M. PAUL LÉVY.

Élection :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. Forrest H. Murray, présenté par MM. Boutroux et Chazy.

Communication :

M. Paul Lévy : *Sur la notion de moyenne dans l'espace fonctionnel.*

Soit dans l'espace fonctionnel un volume V limité par une surface S . Les parties intérieures du volume ont une mesure négligeable à côté de celles voisines de la surface, et par suite la moyenne dans l'ensemble du volume d'une fonctionnelle uniformément continue ne dépend que de ses valeurs sur la surface S (pour la définition de la moyenne dans l'espace fonctionnel, voir le Mémoire de Gateaux dans le *Bull. Soc. math.*, 1919). On pourrait être tenté en conséquence de penser que la moyenne dans le volume et la moyenne sur la surface sont égales. Il n'en est pas toujours ainsi. La moyenne dans le volume se ramène à une moyenne sur la surface, à condition d'accorder à des éléments d'aire égaux des poids inversement proportionnels aux valeurs correspondantes de la courbure moyenne K .

On s'en rend compte aisément en remarquant que le volume V peut se réduire, en négligeant des parties négligeables, à la portion comprise entre la surface S et la surface voisine S' , obtenue en portant sur la normale en chaque point où la courbure moyenne K est positive (en prenant le sens positif de la normale vers l'intérieur), une longueur $\frac{\varepsilon}{K}$ (ε étant une constante très petite). Si l'on divise la surface S en éléments égaux, les éléments correspondants de S' seront aussi égaux et le volume considéré est divisé en troncs de cônes dont les mesures sont proportionnelles à leurs hauteurs, c'est-à-dire inversement proportionnelles aux valeurs de K .

Il est d'ailleurs fréquent dans l'espace fonctionnel qu'une variété soit telle que n'importe quelle fonctionnelle uniformément continue U y soit presque partout égale à sa moyenne m , c'est-à-dire que, quelque petit que soit ε , les parties de la variété considérée pour lesquelles U n'est pas compris entre $m - \varepsilon$ et $m + \varepsilon$ sont négligeables

devant les autres. Nous dirons qu'une telle variété est de la première catégorie. Si la surface S considérée ci-dessus est de la première catégorie, sa courbure moyenne en particulier a presque partout une même valeur et il est inutile de la faire intervenir dans le calcul de la moyenne.

On peut aisément définir des surfaces qui ne sont pas de la première catégorie. Soit une surface S décrite par des variétés V dépendant de p paramètres, ayant des mesures comparables (c'est-à-dire qu'aucune n'est négligeable devant les autres), et dont chacune est de la première catégorie. La surface S est ce que nous appellerons une *surface de la deuxième catégorie et d'ordre p* . Un système de q fonctionnelles peut évidemment y prendre des systèmes de valeurs dépendant d'un nombre de paramètres égal au plus petit des nombres p et q , chacun de ces systèmes étant réalisé dans une fraction non négligeable de l'aire totale. Il peut arriver en particulier que les valeurs moyennes de K dans les différentes variétés V ne soient pas toutes égales, et alors il est effectivement nécessaire d'introduire la courbure moyenne dans le théorème énoncé au début.

SEANCE DU 12 MAI 1921.

PRÉSIDENCE DE M. BOULANGER.

Élection :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. Noaillon, présenté par MM. Hadamard et Boulanger.

Communication :

M. Hadamard : *Sur les transformations ponctuelles.*

Étant donnée une transformation ponctuelle qui à chaque point P d'un certain domaine G fait correspondre un point-image P' , lequel décrit un second domaine G' , la première question qui se pose est de savoir à quelles conditions cette transformation est biunivoque, c'est-à-dire, telle que chaque point P' est l'image d'un seul et unique point P . On est d'ailleurs forcément conduit à la traiter en deux étapes, en se plaçant d'abord au point de vue *local*, autrement dit en se demandant si, autour d'un point déterminé quelconque P de G , existe un domaine partiel g ayant avec son image g' une correspondance biunivoque.

Cette condition locale étant supposée vérifiée autour de chaque point P , il s'agit de savoir quelles conditions supplémentaires il y a lieu de lui adjoindre pour assurer la même conclusion en ce qui concerne l'ensemble du domaine G .

C'est la question dont je me suis occupé en 1906 ⁽¹⁾ pour le cas où G est le plan ou l'espace à n dimensions tout entier.

Un problème tout semblable se pose pour des domaines limités. C'est lui, en particulier, qu'introduit la théorie de la représentation conforme et que M. Picard a été ainsi conduit à résoudre dans son *Traité d'Analyse* ⁽²⁾, G étant une aire plane. La conclusion supplémentaire est alors la suivante :

La correspondance doit être biunivoque entre le contour C de l'aire G et son image C' ; autrement dit, celle-ci doit être une courbe de Jordan, dépourvue de points doubles.

Dans le Tome 26 (1917) des *Archiv der Math. und Physik*, MM. Carathéodory et Rademacher reviennent sur cette question et, en particulier, sur la démonstration de M. Picard. Ils lui reprochent de faire intervenir la formule de Cauchy relative aux fonctions analytiques et la remplacent par une autre fondée sur des considérations assez délicates de théorie des ensembles.

Il y a lieu d'observer, si tant est que ce ne soit pas là enfoncer une porte ouverte, que la démonstration de M. Picard ne fait appel qu'en apparence aux propriétés des fonctions analytiques. En réalité, elle ne repose que sur les propriétés de l'indice de Kronecker, qui s'introduisent d'elles-mêmes dans toute question de cette nature et ne supposent que la continuité des fonctions employées.

Il suffit pour le voir, comme j'ai eu l'occasion de le montrer dans les conférences que j'ai professées à Madrid en 1919, de reprendre les considérations mêmes par lesquelles, dans une Note additionnelle insérée à la suite de l'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* de J. Tannery (2^e édition), j'avais déduit le théorème de M. Schönflies de celui de M. Jordan.

Non seulement le théorème est ainsi établi pour le cas du plan, mais la démonstration s'étend d'elle-même au cas d'espaces à un nombre quelconque n de dimensions, étant donné que les travaux de M. Lebesgue ont étendu le théorème de M. Jordan à de tels espaces. En d'autres termes, si le domaine à n dimensions G a une image G' telle que, localement, la correspondance soit toujours biunivoque et

⁽¹⁾ Voir le Tome XXXIV de ce *Bulletin*, p. 71.

⁽²⁾ Tome II, p. 309.

si, en outre, la frontière G de G a pour image une surface ou hypersurface de Jordan (donc sans points doubles), la correspondance est biunivoque relativement à l'ensemble des domaines G, G' .

La forme de condition supplémentaire donnée par MM. Carathéodory et Rademacher est cependant assurément digne d'intérêt, quoi qu'elle soit notablement moins simple ⁽¹⁾ que celle qui avait été donnée par nous-même pour le cas des espaces illimités, et par M. Picard pour le cas d'aires limitées, par le fait qu'elle s'applique aux deux cas et qu'on peut, en effet, en déduire les deux résultats en question ⁽²⁾.

SÉANCE DU 26 MAI 1921.

PRÉSIDENTE DE M. BOULANGER.

Élection :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. Hostinsky, présenté par MM. Ricard et Kœnigs.

Communications :

M. Barré : *Note sur les lignes isoclines.*

Soit donnée l'équation différentielle du premier ordre

$$(1) \quad F(x, y, y') = 0,$$

on sait que l'on appelle *isoclines* les lieux des points du plan pour lesquels l'intégrale a la même pente, autrement dit les lignes définies par

$$(2) \quad F(x, y, K) = 0.$$

M. Massau a tiré de la considération de ces lignes un excellent parti pour la construction graphique des intégrales de l'équation (1). Les particularités présentées par les isoclines renseignent également sur

(1) Cette condition est qu'à une suite de points P de G n'ayant aucun point d'accumulation dans le domaine (ouvert) G corresponde nécessairement une suite de points images P' sans points d'accumulation dans G' .

(2) Cette déduction n'est faite par les auteurs qu'en ce qui concerne le cas des aires limitées. Elle est toutefois aisée pour le cas (laissé de côté par eux) des espaces complets.

celles des intégrales. Le savant ingénieur belge a montré, notamment, qu'en un point où l'isocline touche l'intégrale, celle-ci est inflexionnelle. Le lieu de ces points est une courbe $\mathfrak{J}$. M. Massau ajoute qu'aux points où $\mathfrak{J}$ touche l'isocline correspondante, et par suite l'intégrale, l'isocline est inflexionnelle. Nous avons bien aisément retrouvé ce résultat, mais la proposition de M. Massau doit être complétée ainsi qu'il suit :

En un point du lieu $\mathfrak{J}$ des inflexions des intégrales où ce lieu touche à la fois l'intégrale et l'isocline qui y passent :

- 1° *L'isocline présente, en général, une inflexion ordinaire;*
- 2° *L'intégrale présente, en général, un méplat ordinaire.*

Ces résultats s'obtiennent très simplement par dérivation des équations (1) et (2) en considérant suivant le cas dans cette dernière K comme constant (isocline) ou K comme une fonction implicite de x et de y satisfaisant à la fois à l'équation (2) et à la suivante :

$$(3) \quad \frac{dF(x, y, K)}{dx} + K \frac{dF(x, y, K)}{dy} = 0.$$

M. Boulanger : *Sur l'intégration des équations hypergéométriques du troisième ordre.* — Enumération des divers types d'équations hypergéométriques du troisième ordre, intégrables algébriquement (application d'une méthode indiquée en 1885 par M. Goursat et consistant en l'identification des substitutions fondamentales du groupe de l'équation et de substitutions canoniques spéciales de chacun des groupes linéaires ternaires finis).

SÉANCE DU 8 JUIN 1921.

PRÉSIDENCE DE M. PAUL LÉVY.

Élection :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. Yayotaro Abe, présenté par MM. Hadamard et Flamant.

Communication :

M. le commandant Marmion : *Sur les courbes dont les normales principales rencontrent deux droites fixes.*

SÉANCE DU 22 JUIN 1921.

PRÉSIDENTE DE M. BOULANGER.

Communication :

M. Jean Chazy : *Sur la théorie de la relativité.*

La formule célèbre de la théorie de la relativité

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

contient une fonction arbitraire d'une variable. Si l'on substitue dans cette formule à la distance r du point gravitant au centre fixe, une fonction arbitraire de cette distance, les nouveaux coefficients satisfont encore aux dix équations différentielles formées par Einstein.

Dans les Mémoires et Ouvrages que j'ai lus, je n'ai pas trouvé de raison pour particulariser cette fonction arbitraire et la remplacer par la distance elle-même, sauf *dans une certaine mesure* les vérifications expérimentales de la théorie : avance du périhélie de Mercure et déviation des rayons lumineux au voisinage du Soleil.

SÉANCE DU 13 JUILLET 1921.

PRÉSIDENTE DE M. BOULANGER.

Élection :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. Bouny, présenté par MM. Flamant et Galbrun.

Communication :

M. Auric : *Sur la courbe de raccordement entre deux droites données* ⁽¹⁾.

(¹) Voir l'article de M. APPEL, *Bulletin de la Société*, 1921, et *Note sur diverses courbes de raccordement* par M. AURIC (*Annales des Ponts et Chaussées*, t. IV, 1908. p. 84).

Soient deux droites données OAA', OBB' qu'on désire raccorder en A et en B avec

$$OA = a, \quad OB = b.$$

La courbe doit évidemment, autant que possible, posséder en ces deux points une courbure nulle comme les droites avec lesquelles elle se raccorde; en prenant OA et OB comme axes de coordonnées on pourra choisir comme solution simple

$$\begin{aligned} y &= b + px^3 + qx^4 & (y = b \text{ pour } x = 0), \\ y' &= 3px^2 + 4qx^3, \\ y'' &= 6px + 12qx^2. \end{aligned}$$

On voit immédiatement que $y'' = 0$ pour $x = 0$; en écrivant en outre que y et y'' s'annulent pour $x = a$, il vient

$$y = b \left(1 - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} \right)$$

et l'on vérifie aisément que cette courbe remplit bien les conditions voulues.

Le maximum de courbure a lieu pour $x = \frac{a}{2}$ et l'on trouve pour les valeurs correspondantes

$$y = \frac{13}{16} b, \quad y' = -\frac{b}{a}, \quad y'' = -\frac{3b}{a^2}.$$

La tangente en ce point est donc parallèle à AB.

On aurait pu évidemment en permutant les axes de coordonnées prendre comme courbe de raccordement

$$x = a \left(1 - \frac{2y^3}{b^3} + \frac{y^4}{b^4} \right).$$

Le maximum de courbure aurait eu lieu alors pour

$$y' = \frac{b}{2}$$

avec

$$x = \frac{13}{16} a, \quad x' = -\frac{a}{b}, \quad x'' = -\frac{3a}{b^2}.$$

On pourrait également prendre une combinaison linéaire des deux courbes ainsi obtenues.

Ces remarques pourront être utilisées pour la solution du problème des raccordements des routes et des voies ferrées.

SÉANCE DU 26 OCTOBRE 1921.

PRÉSIDENCE DE M. BOULANGER.

Élection :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. Leroy (Florentin), présenté par MM. Bouligand et Leroux.

Communications :

M. Fatou : *Sur la résolution approchée en nombres entiers des équations linéaires et ses rapports avec la théorie des fonctions.*

M. Gambier : *Représentation conforme de deux surfaces avec conservation des lignes de courbure et de la valeur absolue du rapport des rayons de courbure principaux.*

Si une correspondance ponctuelle entre deux surfaces S et S_1 conserve les lignes de longueur nulle et les asymptotiques, on constate que les images sphériques de S et S_1 sont aussi en représentation conforme.

Réciproquement, si deux surfaces S et S_1 sont en représentation conforme et si leurs images sphériques le sont aussi, on constate deux cas distincts :

1° Ou bien les deux surfaces sont dans la correspondance précédemment définie, que j'appellerai P_1 . Il est équivalent de dire que les lignes de longueur nulle et les lignes de courbure sont conservées et que le rapport $\frac{R}{R'}$ des rayons de courbure principaux homologues est conservé.

2° Ou bien les lignes de longueur nulle et les lignes de courbure sont conservées, et le rapport $\frac{R}{R'}$ change de signe, en conservant la même valeur absolue. J'appelle P_2 cette correspondance.

Une surface S quelconque ne peut pas, *en général*, être associée à

une autre surface S_1 de façon à réaliser la correspondance P_1 ou P_2 . On néglige pour P_1 le cas banal où S_1 est semblable à S . Quand le problème est possible, il fait correspondre à la surface S une surface S_1 dépendant suivant le cas de 0, 1 ou 2 paramètres arbitraires de forme, si S n'est ni une sphère, ni une surface minima.

Deux surfaces minima quelconques admettent ∞^3 correspondances P_1 entre elles. Toute représentation conforme de la sphère sur elle-même est une correspondance P_1 .

Une surface minima quelconque et une sphère sont mises en correspondance P_2 en associant les points où les plans tangents sont parallèles. En composant cette correspondance avec la représentation conforme la plus générale de la sphère sur elle-même on a la correspondance P_2 la plus générale entre la surface minima donnée et la sphère.

Deux surfaces isothermiques associées se correspondent par plans tangents parallèles et avec conservation des angles, c'est le cas particulier de correspondance P_2 où les images sphériques coïncident.

A toute surface de révolution S correspondent par P_1 ∞^2 surfaces de révolution S_1 ; Σ et Σ_1 étant les surfaces de révolution respectivement isothermiques associées de S et S_1 , les surfaces Σ_1 correspondent par P_1 à Σ et par P_2 à S . Les méridiens se correspondent; les parallèles aussi.

Si, de plus, S est la surface de révolution définie, à une homothétie près négligeable ici, par la relation $\frac{R}{R'} = m$, où m est une constante numérique, toutes les surfaces S_1 coïncident avec S , mais non point pour point, de sorte que S admet ∞^2 auto-correspondances du type P_1 , les surfaces Σ_1 coïncident toutes avec la surface de révolution définie par $\frac{R}{R'} = -m$.

Dans ce cas particulier où $\frac{R}{R'} = m$ et où S est de révolution, il y a une autre solution, spéciale à ce cas, de P_1 ou P_2 . Si l'élément de la représentation sphérique a été mis sous la forme classique conduisant à la projection de Mercator

$$d\tau^2 = \frac{du^2 + dv^2}{\operatorname{ch}^2 u},$$

l'élément linéaire de S est d'après Olinde Rodrigues

$$ds^2 = \frac{R'^2}{\operatorname{ch}^2 u} (m^2 du^2 + dv^2),$$

d'où résulte immédiatement que l'équation des asymptotiques est, quel que soit le signe de m ,

$$m du^2 + dv^2 = 0,$$

tandis que celle des lignes de longueur nulle est

$$m^2 du^2 + dv^2 = 0.$$

Il résulte de là que la transformation en elle-même de S définie par

$$u = \alpha u + \beta,$$

$$v = \alpha v$$

conserve à la fois les asymptotiques, les lignes de longueur nulle.

Si, d'autre part, on considère la surface de révolution S_1 définie par $\frac{R}{R'} = \frac{1}{m}$ (R désignant toujours le rayon de courbure du méridien) on trouve pour équation soit des asymptotiques, soit des lignes de longueur nulle

$$\frac{du_1^2}{m} + dv_1^2 = 0,$$

$$\frac{du_1^2}{m^2} + dv_1^2 = 0$$

et il est clair que la correspondance

$$u_1 = \alpha v + \beta,$$

$$v_1 = \alpha u$$

conserve encore les asymptotiques et les lignes de longueur nulle. Cette fois les méridiens deviennent les parallèles et inversement.

La surface isothermique de S définie par $\frac{R}{R'} = -m$ et la surface analogue pour S_1 définie par $\frac{R}{R'} = -\frac{1}{m}$ admettent par les mêmes formules ∞^2 correspondances P_2 avec S .

Enfin on constate aisément que l'on peut réaliser une infinité de couples de deux surfaces solutions de P_1 ou P_2 , en associant soit deux surfaces spirales convenablement choisies, soit deux hélicoïdes convenablement choisis, soit une surface spirale et un hélicoïde convenablement choisis.

L'auteur allemand Stäckel avait signalé diverses propriétés de la correspondance P_1 (*Mathematische Annalen*, 1894, et *Leipziger Berichte*, 1896 et 1898) sans indiquer explicitement de solution pré-

cise, tout au plus une vague indication sur la surface de révolution $\frac{R}{R'} = m$.

L'auteur avait de plus donné une généralisation inexacte de la proposition de M. Kœnigs relative au système conjugué commun à deux surfaces applicables. Je développe autre part l'ensemble des deux problèmes P_1 et P_2 .

SÉANCE DU 9 NOVEMBRE 1921.

PRÉSIDENCE DE M. BOULANGER.

Communications :

M. E. Cahen : *Sur les formes quadratiques binaires qui représentent les mêmes entiers.*

Deux formes arithmétiques qui se déduisent l'une de l'autre par une substitution unité représentent les mêmes entiers. La réciproque n'est pas vraie en général, pour des formes quelconques, mais elle l'est pour les formes linéaires et pour les formes quadratiques binaires. Pour les formes linéaires et pour les formes quadratiques binaires définies la démonstration est relativement facile. Elle est plus difficile pour les formes quadratiques binaires indéfinies. Il y a une démonstration de Schering (*Journal de Crelle*) mais très compliquée. En voici une plus simple.

On commence par démontrer que si deux formes représentent les mêmes entiers elles représentent aussi les mêmes entiers d'une façon primitive (les valeurs des variables étant premières dans leur ensemble); on se bornera donc à considérer les représentations primitives. On peut aussi se borner aux formes primitives.

Soit p un nombre premier impair. Si l'on considère les entiers représentés primitivement par une forme et que l'on cherche à quelles puissances le facteur p peut entrer dans ces entiers, on trouve un résultat qui dépend de l'exposant δ auquel p entre dans le déterminant de la forme, et de façon que si deux formes f représentent primitivement les mêmes entiers δ est le même pour les deux formes.

Pour le facteur 2, la démonstration est un peu plus longue. Il faut alors considérer non seulement les entiers pairs représentés par les deux formes mais aussi les entiers impairs et s'aider de la théorie des genres.

On en conclut que les deux formes en question ont des déterminants qui contiennent les mêmes facteurs premiers aux mêmes exposants. Comme de plus ces deux déterminants ont le même signe on en conclut qu'ils sont égaux.

Maintenant il faut s'appuyer sur le théorème de Dirichlet qui dit que parmi les entiers représentés primitivement par une forme primitive il y a des nombres premiers. Or si l'on considère toutes les classes primitives d'un déterminant donné on sait qu'un nombre premier ne peut être représenté que dans deux classes inverses l'une de l'autre (pouvant d'ailleurs n'en faire qu'une). Donc les deux formes considérées appartiennent à la même classe ou à des classes inverses l'une de l'autre, ce qui démontre le théorème.

M. Fatou : *Remarques sur la méthode d'approximation de Newton.*

SÉANCE DU 23 NOVEMBRE 1921.

PRÉSIDENCE DE M. BOULANGER.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. Maurice, ingénieur général du Génie Maritime, directeur de l'École d'Application, présenté par MM. Boulanger et Got; M. Claudon, ingénieur des Ponts et Chaussées, présenté par MM. Gambier et Leroux; M. Sarantopoulos, docteur de l'Université d'Athènes, présenté par MM. Remoundos et Galbrun; M. Milloux, agrégé de mathématiques, présenté par MM. Châtelet et Chazy.

Communications :

M. le commandant Barré : *Sur la propagation des mouvements vibratoires dans les milieux cristallins anisotropes.*

De premières recherches ont été faites sur ce sujet par Green et Blanchet dans la première moitié du XIX^e siècle. Elles ne paraissent pas avoir été poursuivies. Quel que puisse être l'avenir physique de cette étude, il m'a paru intéressant de la reprendre et d'examiner comment se généralisent, pour les milieux cristallins anisotropes, les résultats

bien connus relatifs aux milieux isotropes et à la propagation des ondes planes lumineuses, à l'intérieur des cristaux, suivant les idées de Fresnel et de ses continuateurs.

Une Note ultérieure résumera les résultats obtenus signalés au cours de la présente Communication.

M. Gambier : *Sur un théorème de M. Kœnigs.*

SÉANCE DU 14 DÉCEMBRE 1921.

PRÉSIDENCE DE M. BOULANGER.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. Kogbeliantz, professeur à l'Université d'Erivan, présenté par MM. Appell et Borel; M^{me} Myller-Lebedeff, professeur à l'Université de Jassy, présentée par MM. Appell et Galbrun; M. Binschleder, présenté par MM. Hadamard et Galbrun; M. Wiener (N.), professeur au Massachusetts Institut of Technology, présenté par MM. Fréchet et Valiron.

Communication :

M. Denjoy : *Sur une classe de fonctions non analytiques de variables réelles qui sont déterminées par leurs valeurs et celles de toutes leurs dérivées en un point.*

M. A. Lévy : *Sur la série récurrente résultant du produit de deux polynomes.*

M. Defourneaux : *Note sur les polynomes $\cos(n \arccos x)$.*

Dans une Note, publiée au *Bulletin de la Société mathématique de France* (1), M. Michel, prenant comme point de départ l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y'' + \alpha xy' - n(n + \alpha - 1)y = 0,$$

a pu obtenir certains théorèmes généraux concernant le nombre des

(1) Séance du 24 novembre 1920.

racines réelles de tout polynome $f(x)$ développé sous la forme

$$AV_n + BV_p + \dots + LV_t,$$

$V_n(x)$ désignant un polynome solution de l'équation différentielle précédente, et V_t un polynome solution de l'équation différentielle obtenue en remplaçant n par t .

M. Michel considère, en particulier, les polynomes $V_n(x)$ qui correspondent au cas $\alpha = 1$, et qui sont susceptibles de deux formes :

La première, pour $|x| < 1$, qui est $\cos(n \arccos x)$;

La deuxième, pour $|x| > 1$, qui est $\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}$.

Antérieurement à cette Communication, j'ai eu l'occasion de signaler l'intérêt qui s'attache à ces derniers polynomes puisqu'ils se présentent spontanément comme combinaisons linéaires des polynomes électrosphériques U ⁽¹⁾ dans certains calculs d'ordre purement physique, tels que ceux qui sont relatifs à la répartition de l'électricité dans un système électrisé composé d'un plan et d'une sphère en présence ⁽²⁾, ou de deux sphères en présence.

La recherche des formules d'un emploi pratique m'a précisément conduit aux expressions précédentes dans lesquelles x est remplacé par $\frac{\nu}{2}$, la deuxième, celle qui correspond à $|x| > 1$ ou à $|\nu| > 2$, ayant seule un intérêt physique.

J'ai montré, en outre, comment ces polynomes

$$H_n(\nu) = \left(\frac{\nu}{2} + \sqrt{\frac{\nu^2}{4} - 1}\right)^n + \left(\frac{\nu}{2} - \sqrt{\frac{\nu^2}{4} - 1}\right)^n$$

se rattachent à plusieurs questions d'analyse, notamment à la résolution en nombres entiers de certaines équations du deuxième degré de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 = m \quad (3).$$

Il convient de présenter ici d'autres polynomes, susceptibles de certaines analogies avec les polynomes H et U , qui apparaissent également dans les calculs d'électricité, lorsqu'on cherche à simplifier ces calculs.

Ce sont

$$F_n(\nu) = U_n(\nu) + U_{n-1}(\nu), \quad G_n(\nu) = U_n(\nu) - U_{n-1}(\nu)$$

(1) A. GUILLET et M. AUBERT, *Annales de Physique*, 9^e série, p. 58 à 95.

(2) Voir *Journal de Physique*, livraison de mai 1919.

(3) Voir *Comptes rendus Acad. des Sc.*, t. 168, 5 mai 1919, p. 880.

qui satisfont aux équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} (\nu^2 - 4) F_n''(\nu) + 2(\nu + 1) F_n'(\nu) - n(n+1) F_n(\nu) &= 0, \\ (\nu^2 - 4) G_n''(\nu) + 2(\nu - 1) G_n'(\nu) - n(n+1) G_n(\nu) &= 0, \end{aligned}$$

dont on peut trouver des généralisations analogues à la précédente.

D'ailleurs le changement de variables $\nu = 4w - 2$ montre que les quatre fonctions $U(w)$, $II(w)$, $F(w)$, $G(w)$ satisfont à des équations différentielles qui sont chacune un cas particulier de l'équation différentielle de Gauss :

$$w(1-w) \frac{d^2 z}{dw^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)w] \frac{dz}{dw} - \alpha \beta z = 0.$$

SÉANCE DU 28 DÉCEMBRE 1921

PRÉSIDENCE DE M. ROULANGER.

Communications :

M. A. Auric : *Sur la généralisation des fractions continues.*

On connaît le rôle capital que devraient jouer les développements en fractions continues dans la théorie des nombres arithmétiques ou algébriques et l'on sait combien Hermite attachait de l'importance à l'établissement d'un algorithme qui aurait été une généralisation rationnelle de celui des fractions continues.

Soit dans ses œuvres, soit dans sa correspondance avec Stieltjes (voir notamment la lettre n° 408, t. II, p. 389), Hermite revient à plusieurs reprises sur les recherches qu'il avait entreprises à ce sujet et qui, dit-il, « n'ont cessé pendant plus de 50 ans de le préoccuper et aussi de le désespérer ».

Les difficultés rencontrées par Hermite et par ses continuateurs semblent tenir surtout à ce qu'ils ont abordé de front le calcul et l'étude des tableaux (déterminants ou matrices) qui sont la représentation explicite d'un système de formes linéaires, tandis qu'il eût été évidemment préférable et plus simple de commencer par l'étude du point représentatif d'une forme linéaire ; de même qu'en géométrie analytique l'étude des coordonnées précède toujours celle des systèmes de droites.

La théorie des fractions continues ordinaires peut s'exposer comme il suit :

On considère deux nombres quelconques a_0, a_1 appartenant soit au domaine réel, soit au domaine complexe.

On envisage alors l'équation

$$a_0 - x_1 a_1 = 0$$

et l'on choisit l'entier λ_1 le plus rapproché de x_1

$$x_1 = \lambda_1 + \varepsilon_1 \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_1| < \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

suivant le domaine dans lequel on se trouve.

On posera alors pour définir l'élément suivant a_2 ,

$$a_0 - \lambda_1 a_1 + a_2 = 0,$$

on résoudra de même l'équation

$$a_1 - x_2 a_2 = 0,$$

et en prenant l'entier λ_2 le plus rapproché de x_2 , on pourra définir l'élément suivant a_3

$$a_1 - \lambda_2 a_2 + a_3 = 0$$

et ainsi de suite.

On peut dire que la suite limitée ou illimitée

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \dots$$

représente la fraction continue issue du quotient $\frac{a_0}{a_1}$.

Il est facile de généraliser cette théorie en partant d'un nombre quelconque d'éléments initiaux, quatre par exemple.

Considérons quatre éléments consécutifs

$$a_i, \quad a_{i+1}, \quad a_{i+2}, \quad a_{i+3}.$$

On déterminera les entiers $\lambda_{i+1}, \mu_{i+2}, \nu_{i+3}$, de manière à rendre minima les modules des expressions suivantes :

$$a_0 - \lambda_{i+1} a_{i+1},$$

$$a_0 - \lambda_{i+1} a_{i+1} + \mu_{i+2} a_{i+2},$$

$$a_0 - \lambda_{i+1} a_{i+1} + \mu_{i+2} a_{i+2} - \nu_{i+3} a_{i+3},$$

et l'élément suivant a_{i+4} sera défini par la relation

$$a_0 - \lambda_{i+1} a_{i+1} + \mu_{i+2} a_{i+2} - \nu_{i+3} a_{i+3} + a_{i+4} = 0.$$

On prend les termes de cette relation alternativement positifs et négatifs afin que les déterminants des substitutions aient constamment pour valeur $+1$.

Dans le cas où tous les coefficients $\lambda_i \mu_i$ sont pris égaux à zéro, on retombe sur un développement que nous avons indiqué antérieurement ⁽¹⁾.

Jusqu'ici on n'a considéré qu'une suite d'éléments initiaux, mais les principes exposés permettent de traiter également le cas de deux ou de plusieurs suites.

Considérons, par exemple, le cas de deux séries de trois éléments initiaux :

$$\begin{array}{ccc} a_0 & a_1 & a_2, \\ b_0 & b_1 & b_2. \end{array}$$

On résoudra les équations

$$\begin{aligned} a_0 - x_1 a_1 + y_2 a_2 &= 0, \\ b_0 - x_1 b_1 + y_2 b_2 &= 0, \end{aligned}$$

et l'on prendra les entiers λ_1, μ_2 les plus rapprochés respectivement de x_1, y_2 .

On définira alors a_3 et b_3 par les relations récurrentes

$$\begin{aligned} a_0 - \lambda_1 a_1 + \mu_2 a_2 - a_3 &= 0, \\ b_0 - \lambda_1 b_1 + \mu_2 b_2 - b_3 &= 0. \end{aligned}$$

De même les éléments $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ seront utilisés pour la détermination de a_4 et de b_4 au moyen des deux équations de récurrence

$$\begin{aligned} a_1 - \lambda_2 a_2 + \mu_3 a_3 - a_4 &= 0, \\ b_1 - \lambda_2 b_2 + \mu_3 b_3 - b_4 &= 0, \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Il sera facile de passer au cas général de h suites formées par $h + K$ éléments initiaux; on sera ainsi en possession d'une méthode systématique pour la résolution exacte ou approchée d'équations quelconques, ce qui permettra de retrouver et de généraliser les résultats déjà obtenus dans cette voie par Hermite et par Stieltjes.

⁽¹⁾ *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 1^{er} décembre 1902 et 11 septembre 1905.

M. Janet : *Sur les capacités d'un système de conducteurs électrisés.*

M. Worms de Romilly : *Calcul de la racine carrée d'un nombre.*

Soit un nombre entier A, dont on développe la racine carrée sous forme d'une fraction continue. Les termes du développement se reproduisent périodiquement. En désignant par a le plus grand nombre entier dont le carré est inférieur à A, on aura

$$\sqrt{A} - a = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_p + \frac{1}{2a + \sqrt{A} - a}}}}$$

Si nous représentons par H la quantité $\sqrt{A} + a$, nous pourrions poser

$$(1) \quad \sqrt{A} - a = \frac{MH + P}{RH + M},$$

où M, P, R sont des nombres entiers.

Donnons à H la valeur approchée $2a$, il vient

$$N_1 = \frac{2aM + P}{2aR + M} = \frac{E_1}{G_1}.$$

Nous obtiendrons pour $\sqrt{A} - a$ une valeur plus approchée que N_1 en remplaçant, dans la relation (1), H par $2a + N_1$, ce qui donne

$$N_2 = \frac{M(2a + N_1) + P}{R(2a + N_1) + M} = \frac{E_2}{G_2}.$$

En continuant à opérer de même, nous trouverons

$$N_m = \frac{M\left(2a + \frac{E_{m-1}}{G_{m-1}}\right) + P}{R\left(2a + \frac{E_{m-1}}{G_{m-1}}\right) + M} = \frac{E_m}{G_m}.$$

Un calcul très simple montre alors que les E_i et les G_i se déduisent les uns des autres par les relations

$$\begin{aligned} E_m &= (2aR + 2M) E_{m-1} + (PR - M^2) E_{m-2}, \\ G_m &= (2aR + 2M) G_{m-1} + (PR - M^2) G_{m-2}, \end{aligned}$$

avec les conditions

$$E_0 = 0, \quad E_1 = 2\alpha M + P, \quad G_0 = 1, \quad G_1 = 2\alpha R + M.$$

On pourra donc calculer les E_i et les G_i au moyen de fonctions génératrices de la forme

$$\frac{\alpha + \beta x}{1 + \gamma x + \delta x^2}.$$

Appelons A, B, C, D les quatre premières valeurs des E_i ou des G_i ; les $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ devront satisfaire aux équations

$$A = \alpha, \quad B = -\gamma A + \beta, \quad C = -\gamma B - \delta A, \quad D = -\gamma C - \delta B,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = A, \quad \beta = B + \gamma \frac{CB + \Delta D}{\Delta C - B^2}, \quad \gamma = \frac{CB - \Delta D}{\Delta C - B^2}, \quad \delta = \frac{BD - C^2}{\Delta C - B^2}.$$

On aura donc, pour le cas des E_i ,

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2\alpha M + P, \quad \gamma = -(2\alpha R + 2M), \quad \delta = -PR + M^2 = \pm 1$$

et, pour le cas des G_i ,

$$\alpha = 1, \quad \beta = -M, \quad \gamma = -(2\alpha R + 2M), \quad \delta = -PR + M^2 = \pm 1.$$

Prenons par exemple $A = 10$ qui correspond à

$$\alpha = 3, \quad M = 0, \quad P = R = 1$$

et aux fonctions génératrices

$$\frac{x}{1 - 6x - x^2}, \quad \frac{1}{1 - 6x - x^2}$$

on voit que dans ce cas

$$\begin{aligned} E_0 &= 0, & G_0 &= 1, & E_{m+1} &= G_m, \\ \frac{1}{1 - 6x - x^2} &= 1 + 6x + 37x^2 + 228x^3 + 1405x^4 + 8658x^5 + 53353x^6 + \dots, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\frac{E_6}{G_6} = \frac{8658}{53353} = 0,16227766116837930,$$

la dernière décimale est inexacte, il faudrait 3 au lieu de 0.

Soit encore

$$A = 101, \quad \alpha = 10, \quad M = 0, \quad P = R = 1$$

qui donne les fonctions génératrices

$$\frac{x}{1-20x-x^2}, \quad \frac{1}{1-20x-x^2}$$

et par suite

$$\frac{1}{1-20x-x^2} = 1 + 20x + 401x^2 + 8040x^3 + 161201x^4 + \dots$$

On en déduit que

$$\frac{E_8}{G_8} = \frac{1299280080}{26050404001} = 0,04987562112089026$$

et que

$$\frac{E_9}{G_9} = \frac{26050404001}{522307368100} = 0,0498756211208902702 \dots$$

ou que

$$\frac{E_{10}}{G_{10}} = \frac{522307390100}{10472197606001} = 0,04987562112089027017$$

avec au moins 20 décimales exactes.

Le nombre $A = 41$ correspond à

$$\alpha = 6, \quad M = 2, \quad P = 1, \quad R = 5.$$

Avec les équations génératrices

$$\frac{25x}{1-64x-x^2}, \quad \frac{1-2x}{1-64x-x^2}$$

qui donnent

$$\frac{G_5}{E_5} = \frac{419837625}{1041211582} = 0,4031242374328486868.$$

Les dix-neuf premières décimales sont exactes.

Soit encore

$$A = 19, \quad \alpha = 4, \quad M = 14, \quad P = 5, \quad R = 39$$

et les fractions génératrices

$$\frac{117x}{1-340x+x^2}, \quad \frac{1-14x}{1-340x+x^2},$$

$$\frac{1}{1-340x+x^2} = 1 + 340x + 115599x^2 + 39303320x^3 + 13363013201x^4 + \dots$$

En s'arrêtant aux termes en x^2 on a

$$\frac{39780}{110839} = 0,3588989435$$

avec plus de huit décimales exactes.

Supposons que l'on s'arrête à la valeur $\frac{E_m}{G_m}$, quelle est l'erreur?

Posons $\frac{E_m}{G_m} = \varepsilon$, on aura

$$\frac{M(2a + \varepsilon_m) + P}{R(2a + \varepsilon_m) + M} - \varepsilon_m = \delta,$$

où δ représente la différence $\varepsilon_{m+1} - \varepsilon_m$. Les décimales communes à ε_{m+1} et ε_m sont évidemment exactes, de sorte que la première décimale différente de zéro de $\varepsilon_{m+1} - \varepsilon_m$ indique la première décimale inexacte de ε_m , et par suite fait connaître le degré d'approximation de la valeur ε_m . Prenons $A = 10$, $m = 5$.

Pour $A = 10$, on trouve

$$\delta = \left(6 + \frac{8\,658}{53\,353}\right) \frac{8\,658}{53\,353} = 1 - \delta_1,$$

$$1 - \delta_1 = \frac{328\,776}{53\,353} \frac{8\,658}{53\,253} = \frac{284\,654\,260\,8}{284\,654\,260\,9} \quad (\text{où } \delta_1 \text{ est faible})$$

ou

$$\delta_1 = \frac{1}{284\,654\,260\,9} \quad \text{et} \quad \varepsilon_5 = \frac{1\,405}{8\,658} = 0,162\,277\,662\,\overline{2}$$

(soit neuf décimales exactes, à très peu près) et

$$\varepsilon_6 = 0,162\,277\,661\,16$$

$$\frac{\varepsilon_4 = 0,162\,277\,662\,2}{0,000\,000\,001\,1}$$

Il y a donc une erreur d'une unité sur la neuvième décimale.



QA
1
S59

Société mathématique de
France, Paris
Bulletin

t.48-49
Physical &
Applied Sci.
~~Serials~~

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
